

混合問題に対する基本解の特異性

東教大 理 若林誠一郎

§ 1. 序. 混合問題に対する基本解の特異性に関して、
Duff[3], Deakin[2], Matsumura[4] 等の研究がある。
Duff[3] は stationary phase method を用いて、reflected
Riemann function の特異性について研究した。Deakin[2] は
同様の方法によって、1 階双曲系を取り扱った。一方、
Cauchy 問題に対して、Atiyah-Bott-Gårding[1] は、localization
theorem を用いて、特異台の inner estimate を与え、また基本解
の表示における積分の鎖を変更することにより、outer estimate
を与えた。Matsumura[4] はこの localization method を混合問
題に適用して、reflected Riemann function の反射波に対応する
特異台の inner estimate を与えた。Wakabayashi[8] におい
て、ある種の制限の下で、側面波に対応する特異台の inner
estimate が与えられた。Tsuji[7], Wakabayashi[9] におい
て、境界波に対応する特異性をも含めた形で、特異台の

inner estimate が与えられた。また、いくつかの仮定の下で、Shirota [6] は特異台の outer estimate を与えた。ここでは、 $1/4$ -空間における定係数双曲型混合問題に対する基本解の特異台の inner estimate 及び outer estimate に関する結果を述べる([9], [10] 参照,)。

§ 2. 記号及び仮定. 次の記号を用いる:

$\mathbb{R}^n$: n 次元(実)Euclid 空間, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, $x'' = (x_2, \dots, x_n)$, Ξ^n : $\mathbb{R}^n$ の(実)双対空間, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \Xi^n$, $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$, $\tilde{\xi} = (\xi, \xi_{n+1}) \in \Xi^{n+1}$, $\vartheta = (1, 0, \dots, 0) \in \Xi^n$, $\tilde{\vartheta} = (\vartheta, 0) \in \Xi^{n+1}$, $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$, $X = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+^1 \times \mathbb{R}_+^1$, $D = i^{-1}(\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$.

$P(\xi)$ を次数 m の hyperbolic polynomial w.r.t. ϑ とする。
すなわち、 $P^0(\vartheta) \neq 0$, $P(\xi + s\vartheta) \neq 0$ when $\xi \in \Xi^n$, $\text{Im } s < -\gamma_0$.
ここで、 P^0 は P の主部を表わす。さらに、 $P^0(0, 1) \neq 0$ を仮定する。

次の混合問題を考える:

$$\begin{cases} P(D) u(x) = f(x), & x \in \mathbb{R}_+^n, x_1 > 0, \\ (D_1^k u)(0, x'') = 0, & 0 \leq k \leq m-1, x_n > 0, \\ B_j(D) u(x)|_{x_n=0} = 0, & 1 \leq j \leq l, x_1 > 0, \end{cases}$$

ここで、 $B_j(D)$ は定係数境界作用素であり、 l は $P(\xi - i\gamma\vartheta, \lambda)$

$= 0 (\gamma > \gamma_0)$ の λ に関して、虚部正の根の個数に等しい。

$\Gamma = \Gamma(P, \nu) (C \mathbb{E}^n)$ によって $\{\xi \in \mathbb{E}^n; P^\circ(\xi) \neq 0\}$ の ν を含む連結成分を表わし、 $\Gamma_0 = \{\eta' \in \mathbb{E}^{n-1}; (\eta', 0) \in \Gamma\}$ とおく。
 $\xi' \in \mathbb{E}^{n-1} - i\gamma_0\nu' - i\Gamma_0$ のとき、 $P(\xi', \lambda) = 0$ の λ に関する根は実にならないので、虚部正の根を $\lambda_j^+(\xi') (j=1, \dots, l)$ 、虚部負の根を $\lambda_j^-(\xi') (j=1, \dots, m-l)$ と表わすことにする。

$$P_+(\xi', \lambda) = \prod_{j=1}^l (\lambda - \lambda_j^+(\xi')), \quad \xi' \in \mathbb{E}^{n-1} - i\gamma_0\nu' - i\Gamma_0.$$

とおき、Lopatinski 行列式を

$$R(\xi') = \det \left(\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{B_j(\xi', \lambda) \lambda^{k-1}}{P_+(\xi', \lambda)} d\lambda \right)_{j,k=1, \dots, l}, \quad \xi' \in \mathbb{E}^{n-1} - i\gamma_0\nu' - i\Gamma_0.$$

によって定義する。

以下次の仮定をおく。

(A.1) strictly hyperbolic polynomials w.r.t. ν $p_j(\xi) (j=1, \dots, g)$ が存在して、 $P(\xi) = p_1(\xi)^{\nu_1} \dots p_g(\xi)^{\nu_g}$ と表わされる。

(A.2) 系 $\{P, B_j\}$ は Σ -well posed である。すなわち、 $R(\xi' + s\nu') \neq 0$ when $\xi' \in \mathbb{E}^{n-1}$, $\text{Im } s < -\gamma_1$, $\tilde{R}_0(\nu') \neq 0 (\gamma_1 > \gamma_0)$ 。

ここで、 $\tilde{R}_0(\xi')$ は $R(\xi')$ の主部である (Sakamoto [5])。

§ 3. Localization theorem. $G(x, y)$ を $\{P, B_j\}$ に対する基本解とする ($y = (0, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}_+^n$ に与えられた単位衝撃による波動伝播を記述する)。そのとき、

$$G(x, y) = E(x-y) - F(x, y), \quad x \in \mathbb{R}_+^n, x_1 > 0, y = (0, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}_+^n$$

$$E(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{E}^n - i\eta} e^{ix \cdot \xi} P(\xi)^{-1} d\xi, \quad \eta \in \gamma_0 \mathcal{V} + \Gamma$$

: Cauchy 問題の基本解

$$(3.1) \quad F(x) = (2\pi)^{-(n+1)} \int_{\mathbb{E}^{n+1} - i\tilde{\eta}} \frac{1}{i} \sum_{j,k=1}^l e^{i\{(x-y') \cdot \xi' - y_n \xi_n + x_n \xi_{n+1}\}} \\ \times \frac{R_{jk}(\xi') B_k(\xi) \xi_{n+1}^{j-1}}{R(\xi') P_+(\xi, \xi_{n+1}) P(\xi)} d\tilde{\xi}, \quad \eta \in \gamma_1 \mathcal{V} + \Gamma, \quad \eta \in \gamma_1 \mathcal{V}' + \Gamma_0, \quad \eta_{n+1} = 0$$

: reflected Riemann function

ここで、

$$R_{jk}(\xi') = (k, j)\text{-cofactor of } \left(\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{B_j(\xi', \lambda) \lambda^{k-1}}{P_+(\xi', \lambda)} d\lambda \right)_{j,k=1, \dots, l}$$

であり、 $F(x, y)$ を $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n$ 上の超函数と考える。

$$\tilde{F}(x', y_n, x_n) = F(x, 0, y_n)$$

とおくと、 $\tilde{F}(x', y_n, x_n)$ は X 上の超函数とみなされる。 $E(x)$ に関しては Cauchy 問題の結果があるので、 $\tilde{F}(x', y_n, x_n)$ の特異台について調べればよい。まず、 $E(x)$ について [1] の結果を述べておく。

命題 3.1. ([1])

$\bigcup_{\xi \in \mathbb{E}^n \setminus \{0\}} \text{supp } E_\xi \times \{\xi\} \subset WF(E) \subset WFA(E) \subset \bigcup_{\xi \in \mathbb{E}^n \setminus \{0\}} K_\xi \times \{\xi\}$
が成立ち、さらに

$$\overline{\text{ch}}[\text{supp } E_{\xi_0}] = K_{\xi_0}$$

である。ここで、

$$E_{\xi_0}(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{E}^n - i\eta} e^{ix \cdot \xi} P_{\xi_0}(\xi)^{-1} d\xi, \quad \eta \in \gamma_0 \mathcal{V} + \Gamma,$$

P_{ξ_0} は ξ_0 における P の localization であり、

$$K_{\xi_0} = \{x \in \mathbb{R}^n; x \cdot \eta \geq 0, \forall \eta \in \Gamma(P_{\xi_0}, \mathcal{V})\}$$

である。

$$\dot{\Gamma} = \{ \xi' \in \mathbb{E}^{n-1}; (\xi', \xi_n) \in \Gamma \text{ for some } \xi_n \in \mathbb{E} \}$$

とおく。そのとき、 $R(\xi')$ は $\mathbb{E}^{n-1} - i\gamma, \mathcal{V}' - i\dot{\Gamma}$ で正則である ([5] 参照)。 $\dot{\Sigma}(C\mathbb{E}^{n-1})$ によって $\{ \xi' \in \dot{\Gamma}; R_0(-i\xi') \neq 0 \}$ の $\mathcal{V}'$ を含む連結成分を表わす。 $\dot{\Sigma}$ は開凸錐であり、

$$R(\xi') \neq 0 \quad \text{for } \xi' \in \mathbb{E}^{n-1} - i\gamma, \mathcal{V}' - i\dot{\Sigma}$$

が成立つ ([5], [10])。ここで定義した $\dot{\Gamma}, \dot{\Sigma}$ は Sakamoto [5] で定義されたものと一致する。

$\xi^0 \in \mathbb{E}^{n-1} \setminus \{0\}$ を任意に固定する。 $p_j^0(\xi^0, \mu) = 0$ が実多重根をもつような番号を j_k ($k=1, \dots, r_1$)、その根を μ_k とする (j_k は重複してよい)。そのとき

$$\dot{\Gamma}_{\xi^0} \times \mathbb{E} = \bigcap_{k=1}^{r_1} \Gamma(p_{j_k}(\xi^0, \mu_k), \mathcal{V})$$

によって、 $\dot{\Gamma}_{\xi^0}$ を定義する ($\dot{\Gamma}_{\xi^0} \cap \dot{\Gamma}$ が従う)。また、 ξ_{n+1}^0 を虚部が正である根に対応する実単純根としてもつ方程式 $p_j^0(\xi^0, \xi_{n+1}^0) = 0$ の番号を s_k ($k=1, \dots, r_0$) で表わし、

$$\tilde{\Gamma}_{(\xi^0, \xi_{n+1}^0)} = \bigcap_{k=1}^{r_0} \{ \xi \in \mathbb{E}^{n+1}; (\xi', \xi_{n+1}) \in \Gamma(p_{s_k}(\xi^0, \xi_{n+1}^0), \mathcal{V}) \}$$

とおく。 $R(\xi')$ の ξ^0 における localization が定義でき、それを $R_{\xi^0}(\xi')$ で表わし、その主部を $Q_0^0(\xi')$ とおく。 $\dot{\Sigma}_{\xi^0}(C\mathbb{E}^{n-1})$ によって $\{ \xi' \in \dot{\Gamma}_{\xi^0}; Q_0^0(-i\xi') \neq 0 \}$ の $\mathcal{V}'$ を含む連結成分を表わす。そのとき

補題 3.2. $\dot{\Sigma}_{\xi^0}$ は開凸錐であり、

$$R_{\xi^0'}(\xi') \neq 0 \quad \text{for } \xi' \in \Xi^{n-1} - i\gamma, \gamma' - i\dot{\Sigma}_{\xi^0'},$$

$$Q_0^0(\xi') \neq 0 \quad \text{for } \xi' \in \Xi^{n-1} - i\dot{\Sigma}_{\xi^0'}$$

が成立つ。

$\xi^0 \in \Xi^{n+1} \setminus \{0\}$ に対して

$$\Gamma_{\xi^0} = (\Gamma(P_{\xi^0}, \gamma) \times \Xi) \cap \tilde{\Gamma}_{(\xi^0', \xi_{n+1}^0)} \cap (\dot{\Sigma}_{\xi^0'} \times \Xi^2)$$

とおく。但し、 $\xi^0' = 0$ のとき

$$\dot{\Gamma}_0 = \dot{\Gamma}, \quad \dot{\Sigma}_0 = \dot{\Sigma}, \quad \tilde{\Gamma}_{(0,0)} = \{\tilde{\xi} \in \Xi^{n+1}; (\xi', \xi_{n+1}) \in \Gamma(P, \gamma)\}$$

と解釈する。

定理 3.2. $\xi^0 \in \Xi^{n+1}$ に対して

$$(3.2) \quad t^{N/L} \{ t^{p_0} e^{-it(x' \cdot \xi^0' - y_n \xi_n^0 + x_n \xi_{n+1}^0)} \tilde{F}(x', y_n, x_n) - \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{F}_{\xi^0, j}(x', y_n, x_n) t^{-j/L} \} \rightarrow \tilde{F}_{\xi^0, N}(x', y_n, x_n) \text{ as } t \rightarrow \infty, \text{ in } \mathcal{D}'(X), N=0, 1, \dots,$$

が成立つ。ここで、 p_0 は有理数、 L は正整数である。

さらに、 $\xi^0 \in \Xi^{n+1} \setminus \{0\}$ に対して

$$(3.3) \quad \bigcup_{j=0}^{\infty} \text{supp } \tilde{F}_{\xi^0, j}(x', y_n, x_n) \times \{(\xi^0', -\xi_n^0, \xi_{n+1}^0)\} \subset WF(\tilde{F}(x', y_n, x_n))$$

が成立ち、

$$(3.4) \quad \overline{\text{ch}} \left[\bigcup_{j=0}^{\infty} \text{supp } \tilde{F}_{\xi^0, j}(x', y_n, x_n) \right] \subset \tilde{K}_{\xi^0}$$

である。ここで、

$$\tilde{K}_{\xi^0} = \{(x', y_n, x_n) \in X; x' \cdot \gamma' - y_n \gamma_n + x_n \gamma_{n+1} \geq 0, \forall \tilde{\gamma} \in \Gamma_{\xi^0}\}$$

であり、(3.4)における閉包は X におけるものとする。

注意 1. (3.2) 及び (3.3) は、 $P(\xi), B_j(\xi)$ が斉次多項式のときには、Tsuji [7] においても証明されている。

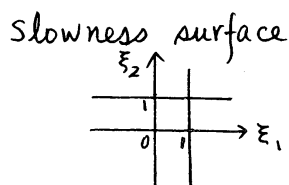
注意 2. (3.4) は、一般には等号でないが、大抵の場合等号が成立する。また、Lopatinski 行列式の localization の構造が簡単な場合は $(R_{\xi_0}(\xi'))$ の逆 Fourier 変換が空隙領域をもたない、大抵の場合

$$(3.5) \quad \bigcup_{j=0}^{\infty} \text{supp } \tilde{F}_{\xi_0, j}(x', y_n, x_n) = \tilde{K}_{\xi_0}$$

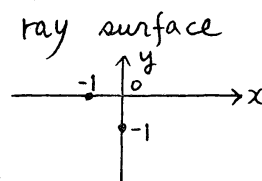
が成立つ。これに関連して、例を 2 つ与える。

例 1. (3.1) において右辺積分内の分子に、 $R_{j_k}(\xi') B_k(\xi) \xi_{n+1}^{j-1}$ があるために、(3.5) が成立しない可能性がある。このことは、例えば 1 階双曲系の Cauchy 問題においても同様である。

$$(3.6) \quad \begin{cases} u_t - u_x = 0 \\ v_t - v_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{基本解 } E = \begin{pmatrix} \delta(t+x)\delta(y) & 0 \\ 0 & \delta(x)\delta(t+y) \end{pmatrix}, t > 0,$$



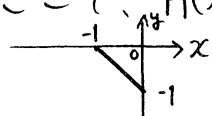
$(\xi_1, \xi_2) \xleftrightarrow{\text{dual}} (x, y)$



一方低階が加わると、例えば

$$(3.7) \quad \begin{cases} u_t - u_x - v = 0 \\ v_t - v_y = 0 \end{cases} \Rightarrow E = \begin{pmatrix} \delta(t+x)\delta(y), H(-x)H(-y)\delta(t+x+y) \\ 0 & \delta(x)\delta(t+y) \end{pmatrix}, t > 0,$$

ここで、 $H(x)$ は Heviside fun. を表わす。この ray surface は左図で、(3.6) は (3.7) より広い範囲で C^∞ になる。



例 2 (Shirota [6])

$$\begin{cases} P = (\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \Delta)(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - a^2 \Delta), \quad a > 1, \quad x \in \mathbb{R}_+^3 \\ B_1 = 1, \quad B_2 = \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \end{cases}$$

のとき、(3.1) の右辺を ξ_{n+1} で積分して $F(x, y)$ の表示で考えて、

$\exp[\dots]$ の係数がより広い範囲で正則となる(本来、 P に固有の branch pt.をもつが、この場合はそれが消えている)。このとき、branch pt.に対応して生じる側面波が現われず、(3.5)は成立しない。

§ 4. $WFA(\tilde{F}(x', y_n, x_n))$ について。

補題 4.1. $\forall M: \text{compact} \subset \dot{\Gamma}_{\xi^0}$ に対して、 ξ^0 の conic nbd. $\Delta_1(\subset \mathbb{E}^{n-1})$ 及び $C, t_0 > 0$ が存在して、 $P_+(\xi', \lambda)$ (したがって、 $R(\xi'), R_{jk}(\xi')$) は、 $\{\xi' = \xi' - i\epsilon |\xi'| \eta' - i\gamma_0 \nu'; \xi' \in \Delta_1, |\xi'| \geq C, \eta' \in M, 0 < \epsilon \leq t_0\}$ で正則である。

$R(\xi')$ の主部 $\tilde{R}_0(\xi')$ の ξ^0 における localization が定義でき、それを $\tilde{R}_{0\xi^0}(\xi')$ とおく。 $\dot{\Sigma}_{\xi^0}^0$ によって $\{\xi' \in \dot{\Gamma}_{\xi^0}; \tilde{R}_{0\xi^0}(-i\xi') \neq 0\}$ の ν' を含む連結成分を表わす。

補題 4.2. $\forall M: \text{compact} \subset \dot{\Sigma}_{\xi^0}^0$ に対して、 ξ^0 の conic nbd. $\Delta_1(\subset \mathbb{E}^{n-1})$ 及び $C, t_0 > 0$ が存在して、

$R(\xi' - i\epsilon |\xi'| \eta' - i\gamma_0 \nu') \neq 0$ when $\eta' \in M, \xi' \in \Delta_1, |\xi'| \geq C, 0 < \epsilon \leq t_0$, が成立つ。

$$\Gamma_{\xi^0}^0 = (\Gamma(P_{\xi^0}, \nu) \times \mathbb{E}) \cap \tilde{\Gamma}_{(\xi^0, \xi_{n+1}^0)} \cap (\dot{\Sigma}_{\xi^0}^0 \times \mathbb{E}^2)$$

$$\tilde{K}_{\xi^0}^0 = \{(x', y_n, x_n) \in X; x' \cdot \eta' - y_n \eta_n + x_n \eta_{n+1} \geq 0, \forall \eta' \in \Gamma_{\xi^0}^0\}$$

とおく。そのとき、上の2つの補題より、次の定理が証明される。

定理 4.3. ([10])

$$(WF(\tilde{F}) \subset) WFA(\tilde{F}(x', y_n, x_n)) \subset \bigcup_{\xi \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}} \tilde{K}_\xi^0 \times \{(\xi', -\xi_n, \xi_{n+1})\}$$

が成立つ。

注意

$$\begin{aligned} \bigcup_{\xi \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}} \bigcup_{j=0}^{\infty} \text{supp } \tilde{F}_{\xi, j}(x', y_n, x_n) &\subset \text{sing supp } \tilde{F}(x', y_n, x_n) \\ &\subset \text{anal sing supp } \tilde{F}(x', y_n, x_n) \subset \bigcup_{\xi \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}} \tilde{K}_\xi^0 \end{aligned}$$

但し、 $\xi' = 0$ のとき、 $\text{supp } \tilde{F}_{\xi, j} = \emptyset$ とおく ($\because \tilde{K}_\xi^0 = \emptyset$ となる)。

証明は、(3.1)において積分の鎖を変更することによってなされる。次の補題を述べておく。

補題 4.4. $(x^0, y_n^0, x_n^0) \notin \tilde{K}_{\xi^0}^0$ のとき、 $(\xi^0, -\xi_n^0, \xi_{n+1}^0)$ の open conic nbd. Δ_1 , $\tilde{\eta} \in \Gamma_{\xi^0}^0$, (x^0, y_n^0, x_n^0) の近傍 U , $\delta > 0$, 有理数 α , $C > 0$, $t_0 > 0$ が存在して、

- (i) $x' \cdot \eta' - y_n \eta_n + x_n \eta_{n+1} < 0$ when $(x', y_n, x_n) \in U$,
- (ii) $|R(\xi' - i(t|\tilde{\xi}| \eta' + \gamma_2 \eta'), \xi_{n+1} - i t |\tilde{\xi}| \eta_{n+1}) P(\xi' - i(t|\tilde{\xi}| \eta' + \gamma_2 \eta'), -\xi_n - i t |\tilde{\xi}| \eta_n)| \geq \delta |\tilde{\xi}|^\alpha$, when $\xi \in \Delta_1$, $|\tilde{\xi}| \geq C$, $0 \leq t \leq t_0$,

が成立つ。ここで、 $\gamma_2 = \gamma_1 + 1$ 。

定理 4.3 において、 $WFA(\tilde{F})$ を $\tilde{K}_\xi$ でなく集合としてより大きい $\tilde{K}_\xi^0$ を用いて上から評価した。これは混合問題においては、避けられないことのように思われる。次の例は、このことを暗示している。

$$|P(\xi) = (\xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2 + a\xi_2)(\xi_1 - \xi_2)^2 - \xi_3^2), \quad a > 0,$$

$$|B_1(\xi) = 1, \quad B_2(\xi) = (-\xi_1 + (1-i)\xi_2)\xi_3 - \xi_3^2.$$

なる場合を考える。そのとき、

$$R(\xi') = i\xi_2 + \sqrt{\xi_1^2 - \xi_2^2 + a\xi_2}, \quad \tilde{R}_0(\xi') = i\xi_2 + \sqrt{\xi_1^2 - \xi_2^2}$$

であり、 $\{P, B_j\}$ は仮定(A.1), (A.2)を満足する。 $\xi' = (0, -1)$

に対して、 $Q_0^0(\eta') = \frac{ia}{2}$, $\tilde{R}_{0\xi'0}(\eta') = -\frac{a}{2}\eta_1^2$ である。よって、

$\tilde{\xi}^0 = (0, -1, 1, -1)$ に対して、 $\tilde{K}_{\tilde{\xi}^0}^0 \neq \tilde{K}_{\xi^0}$ となる。

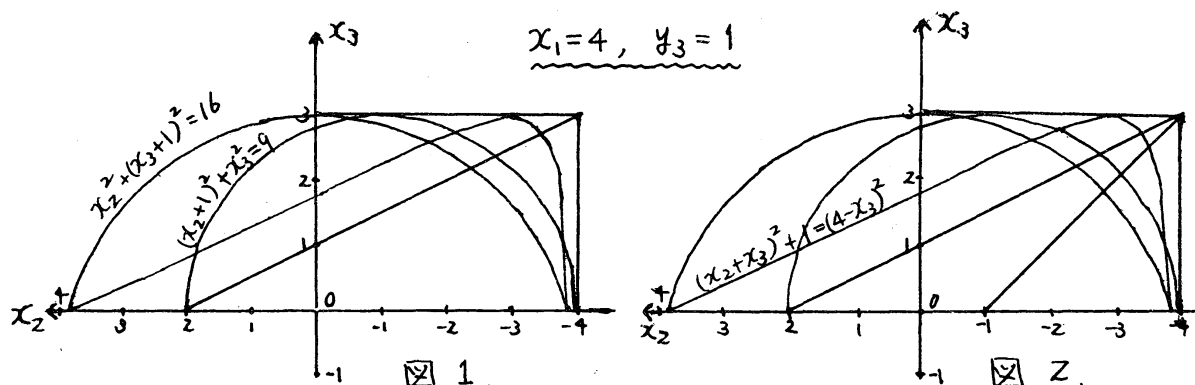


図1は、 $\bigcup_{\xi \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}} \tilde{K}_{\xi}$ と $x_1=4, y_3=1$ との切り口を表わし、図2は、 $\bigcup_{\xi \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}} \tilde{K}_{\xi}^0$ のそれを表わす。 $(x_2, x_3) = (-1, 0)$ と $(-4, 3)$ を結ぶ線分の集合だけ2つの間に差がある。一方、

$$\begin{cases} P^0(\xi) = (\xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2) \chi((\xi_1 - \xi_2)^2 - \xi_3^2) \\ B_1^0(\xi) = 1, \quad B_2^0(\xi) = (-\xi_1 + (1-i)\xi_2)\xi_3 - \xi_3^2 \end{cases}$$

に対して得られる集合 $\bigcup_{\xi \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}} \tilde{K}_{\xi} (= \bigcup_{\xi \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}} \tilde{K}_{\xi}^0)$ の $x_1=4, y_3=1$ との切り口は図2である。

- [1] Atiyah, M.F., Bott, R., and Gårding, L.: Lacunas for hyperbolic differential operators with constant coefficients I, Acta Math., 124, 109-189 (1970).
- [2] Deakin, A.S.: Uniform asymptotic expansions for a hyperbolic-boundary problem, Comm. Pure Appl. Math., 24, 227-252 (1971).
- [3] Duff, G.F.D.: On wave fronts, and boundary waves, Comm. Pure Appl. Math., 17, 189-225 (1964).
- [4] Matsumura, M.: Localization theorem in hyperbolic mixed problems, Proc. Japan Acad., 47, 115-119 (1971).
- [5] Sakamoto, R.: $\mathcal{E}$ -well posedness for hyperbolic mixed problems with constant coefficients, J. Math. Kyoto Univ., 14, 93-118 (1974).
- [6] Shirota, T.: 定係数双曲型混合問題の解の滑めらかさの伝播について. 堅田シンポジウム(1972).
- [7] Tsuji, M.: Fundamental solutions of hyperbolic mixed problems with constant coefficients.
- [8] Wakabayashi, S.: Singularities of the Riemann functions of hyperbolic mixed problems in a quarter-space, Proc. Japan Acad., 50, 821-825 (1974).
- [9] _____ : Singularities of the Riemann functions of hyperbolic mixed problems in a quarter-space, to appear.
- [10] _____ : Analytic wave front sets of the Riemann functions of hyperbolic mixed problems in a quarter-space, in preparation.