

シンプレクティック・ベクトル空間上の確率分布の発展について ーラクダを飼ってみませんか？ー

野田 知宣 (明治薬科大学 薬学教育研究センター 数理科学部門)
GENERAL EDUCATION AND RESEARCH CENTER,
MEIJI PHARMACEUTICAL UNIVERSITY

ABSTRACT. シンプレクティック多様体のシンプレクティック同相は測度を保つが、それ以外にも非自明な制約が課される。シンプレクティック多様体上の確率分布をシンプレクティック同相で変換する場合に、これらの制約から得られる事と情報幾何学との関わりについて考える。

1. 序

有限次元の (開) 集合でパラメータ付けられた確率分布の集合

$$S = \{p_\xi = p(x; \xi) ; \xi = (\xi^1, \dots, \xi^n) \in \Xi\}$$

を統計モデルと呼ぶが、この分布の空間を多様体 ($\xi \in \Xi$ を局所座標) と思う事で、多様体論の手法が使える事になる。分布の空間である事を考慮して、 S 上には Fisher 情報行列 $[g]$ から定まる Riemann 計量と、アフィン接続の族 $\nabla^{(\alpha)}$ が定まり、微分幾何学 (特にアフィン微分幾何学) 的考察が可能となる。より一般に、多様体とその上の Riemann 計量、アフィン接続の 3 つ組 (S, g, ∇) で適当な条件を満たすものを統計多様体と呼ぶ (g を擬 Riemann とする場合も多い)。統計モデルまたは統計多様体を微分幾何学的手法であれやこれやと使用して研究していく分野を個人的には情報幾何学だと思っている (正しくは [1], [2], [17] など参照)。

微分幾何学に限らず、多様体論または幾何学において強力な道具は多く知られているが、その中でも特にコホモロジーと関わる結果は非常に深く興味深いものである。一般にはホモロジーやコホモロジーは高度に抽象化されているが、複素幾何学における Hodge-Kodaira-de Rham の定理 (調和積分論) のように、代数と幾何と解析を繋ぐ事が可能となる。これを超関数として考えると (カレントの意)、コホモロジーが安心して使えるためには一つの条件がある。多様体上での積分を考える場合、多様体がコンパクトであれば積分値は存在する。なので、コホモロジーはコンパクトな多様体に対して特に威力を発揮する。しかし、情報幾何学に現れる空間はコンパクトではない (場合が多い。更に非有界である場合も少なくない)。なので、安心して積分を行えない可能性がある。それを安易に回避するには積分値が有限となるものを積分すれば良い。例えば、多様体上の確率分布に限定して積分をすれば、その積分値は常に 1 である。… ①

情報幾何学で使用される言語はアフィン微分幾何学であるが、シンプレクティック幾何学を使用しても情報幾何学へ何かしらの近接が可能である ([3], [9], [18], [20], [21] など)。本論文の目的はシンプレクティック幾何学による情報幾何学への近接の営業活動を行う事である。シンプレクティック幾何学とは、非退化で可積分な構造 (微分 2 形式) を備えた多様体の幾何学であり、古典力学を無駄と思える程に抽象化した解析力学を更に抽象化したものである。情報幾何学へ、このシンプレクティック幾何学を適用する場合、安易に考えて 2 つの方法が考えられる。一般に、シンプレクティック構造はどのような多様体上にも存在する訳ではない。定義から直ぐに判る条件として、多様体は偶数次元である必要がある。なので、情報幾何学への適用を考えた場合、偶数次元の統計モデルに限定するという方法が一つ。では、Poisson 分布のような 1 次元の統計モデルは全く無視するのかといえば、他の方法も考えられる。これも一般にであるが、多様体の余接束上には常にシンプレクティック構造が存在する (更に、この構造は canonical と呼ばれる程に自然なものである)。これには多様体の次元に制約はなく、どのような多様体に対しても可能である。このように、シンプレクティック幾何学を情報幾何学へ使用する事を考えた場合、統計モデル S 上のシンプレクティック構造を考えるのか、 S の余接束 T^*S 上の構造を考えるのかで 2 通りの近接が考えられる。本論文では S 上にシンプレクティック構造が入る場合に限定して考える。… ②

さて、ここまで話してきた ① と ② を合わせてみる。すると『統計モデル S 上にシンプレクティック構造がある場合を考える。』 S はシンプレクティック多様体であり、その上での確率分布を考える』となる。最初と最後だけを見ると『 S 上の分布を考える』となるので、これはまさに Bayes 統計である。本論文では情報幾何学へのシンプレクティック幾何学を使用する事で、Bayes 統計学とどのような事に関わるのか、関わりそうか、という事について考えたい。先にも述べたが、本論文はシンプレクティック幾何学のプロパガンダが目的なので、特に新しい結果を報告するものではなく、情報幾何学へのシンプレクティック幾何学の使用の面白味を宣伝・普及させ、新規顧客を開拓する事が目的である。その為のキーワードが副題の『ラクダを飼ってみませんか?』である。

本論文の構成は以下の通り。先ず次節で Bayes 統計の用語を準備する (殆ど必要なかったが)。次に第 3 節でシンプレクティック幾何学の簡単な復習と、多様体上にシンプレクティック構造と統計構造が円満に同居する為の条件を考える。ここで得られる構造は正則統計構造または特殊 Kähler 構造であり、条件としては強いものである。第 4 節では $\mathbb{R}^{2n}$ 上の正準構造の下での多変量正規分布の線型 Hamilton 流での発展を考える。一般に Hamilton 流は正準変換よりなるので体積を保存するが、 $n > 1$ の場合にはそれ以上の制約が課される。それを表した Gromov の非圧縮性定理の定量化としてシンプレクティック容量の概念が導入される。多変量正規分布の発展には制約が課され、共分散の行列式の下限の存在が導かれる。この下限にシンプレクティック容量が登場する事を紹介する。また、第 5 節でこれらの結果の一般化についてコメントする。

2. BAYES 統計の初歩の外観

本論文で登場する可能性のある Bayes 統計の用語としては事前分布、事後分布、無記憶（無情報）事前分布、Jeffreys 事前分布程度である。これらの用語を簡単に復習しておく。まずは Bayes の定理から。

2つの事象 A, B に対して、

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

を Bayes の定理と呼ぶ。ここで $P(B)$ は B の起こる確率、 $P(B|A)$ は A が起こった条件下での B の起こる確率を表す（他は略）。証明自体は条件付き確率の定義

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B)$$

から直ちに得られる。一つ簡単な例を見ておく。

例 2.1. Z さん（50 歳）は体調不良で病院に行った。医者は Z さんの症状と年齢などから癌の確率は 5% と判断したが、念のためにある検査をうけた。その検査では癌患者の 85% が陽性となり、癌でない人の 5% が陽性となる事が判っている¹。Z さんが検査で陽性のとき癌の確率は何%かを求める。

事象 A を『Z さんは癌』、 B を『検査で陽性』とする。このとき

$$P(A) = \frac{5}{100}, \quad P(B|A) = \frac{85}{100}, \quad P(B|\bar{A}) = \frac{5}{100}$$

である。『検査が陽性となったとき Z さんが癌』の確率 $P(A|B)$ は Bayes の定理により

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})} = \frac{\frac{5}{100} \times \frac{85}{100}}{\frac{5}{100} \times \frac{85}{100} + \frac{95}{100} \times \frac{5}{100}} = \frac{425}{900} = 0.47$$

と求まる。医者の見立て（医師の診断確信度）では 5% であった癌の確率が、検査で陽性であったために 47% と高まった。

Bayes 統計が頻度主義である従来の統計学（Fisher, Neyman-Pearson 流）と大きく異なるところは母数を確率変数と考えるところである。母数が確率変数という事は、母数の従う確率分布があるという事になる。即ち、統計モデル S 上の確率分布である。その分布は一種類ではなく、事前分布と事後分布と 2 種類存在する。知りたい母数の従うと（予想）される分布があり、測定なり観測なりを行ったデータを利用して、その分布の見直しを行う。見直す前の分布が事前分布であり、見直した後の分布が事後分布である。事前分布から事後分布を導く際に使用するのが先の Bayes の定理という事になる。統計モデルを

$$S = \{p(x|\theta); \int_X p(x|\theta)dx = 1, p(x|\theta) \geq 0, \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^n\},$$

¹即ち、感度 0.85, 特異度 0.95 の検査。

事前分布を $\pi(\theta)$ とする。即ち

$$\pi(\theta) \geq 0, \int_{\Theta} \pi(\theta) d\theta = 1$$

である。このとき、事後分布 $\pi(\theta|x)$ は

$$\pi(\theta|x) = \frac{p(x|\theta)\pi(\theta)}{p(x)} = \frac{p(x|\theta)\pi(\theta)}{\int_{\Theta} p(x|\theta)\pi(\theta) d\theta}$$

となる。この事後分布を使用し、 θ の推定を行う。例えば事後分布についての平均

$$\int_{\Theta} \theta \pi(\theta|x) d\theta$$

など。

このように、『事前分布 + データ $\rightarrow$ 事後分布』という流れであるが、全くデータがない場合に事前分布をどのように定めればよいだろうか。何が尤もらしいか分からない場合、無記憶（無情報）事前分布というものが使用される。その名の通り、情報が無い場合の事前分布である。これには幾つもの候補があり、有名なものを挙げてみると Fisher 計量の定める自然な体積要素 $\sqrt{|g|} dv$ に比例する Jeffreys 無記憶分布、 ∇^e で平行な MLE、 ∇^α で平行な α 平行事前分布、優調和函数 ($\Delta h(\theta) \leq 0, h(\theta) > 0$)、Haar 測度など沢山ある。詳しくは Bayes 統計関連の文献を参照とする。

3. シンプレクティック幾何学と無記憶事前分布

本節ではシンプレクティック幾何学の必要最小限の定義と結果を復習し、無記憶事前分布についての簡単に判る結果を紹介する。証明は直接計算のみなので略する（詳しくは [18] を参照の事）。まずはシンプレクティック構造の定義から。

定義 3.1. M を可微分多様体とする。

(0) $\omega \in \Lambda^2$, 即ち ω は微分 2 形式 ;

(1) $d\omega = 0$, 即ち ω は閉形式 ;

(2) $\omega^b : T_p M \rightarrow T_p M^*$ は任意の $p \in M$ において同型

を満たすとき、 ω をシンプレクティック構造、シンプレクティック形式と呼び、 (M, ω) をシンプレクティック多様体と呼ぶ。

統計モデルには Fisher 情報行列により Riemann 計量が定まるが、Riemann 計量は非退化対称 $(0, 2)$ テンソル場である。一方、シンプレクティック構造は非退化歪対称 $(0, 2)$ テンソル場（+可積分性）である。このように云うと似ているように思うが、これらは結構異なる。例えば、シンプレクティック構造は偶数次元の多様体にしか存在しない²。以下、特に断らない限りシンプレクティック多様体の次元は $2n$ とする。シンプレクティック構造の定義の (1) を可積分性または閉性、(2) を非退化性とも呼ぶ。また、(2) は $\omega^n \neq 0$

²全ての偶数次元多様体がシンプレクティック構造を許容する訳でもない。

と表記される場合も多い。これは、 ω^n が M 上の体積要素を定める事を意味する。因みに、シンプレクティックのスペルは symplectic であるが³、これはラテン語の com/plex をギリシア語にしたもの：sym/plectic であり、Weyl による (1939)。

シンプレクティック多様体の簡単な例を一つ述べよう。

例 3.2. $M = \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ とし、 M の点を $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n)$ とする。このとき

$$\omega_0 = -d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q} = -d(\mathbf{p}d\mathbf{q}) := dq_1 \wedge dp_1 + \dots + dq_n \wedge dp_n$$

はシンプレクティック構造。この ω_0 を **正準 2 形式**、**正準 (シンプレクティック) 構造** などと呼ぶ。

この ω_0 は座標系を使用しない形で定義する事も可能である。 $p = (x, \xi) \in T^*\mathbb{R}^n$, $X \in T_p(T^*\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\theta_0 := p(\pi_* X)$$

と定める。これを **正準 1 形式** と呼ぶ。この θ_0 の外微分に対して $\omega_0 = -d\theta_0$ が成立する。

$$\begin{array}{ccc} X \in T_p(T^*\mathbb{R}^n) & \rightarrow & T_x^*\mathbb{R}^n \ni \xi \\ \pi_* \downarrow & & \downarrow \pi \\ \pi_* X \in T_x\mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R}^n \end{array}$$

非常に簡単な例を一つ挙げたが、任意のシンプレクティック多様体を局所的に見ると、常にこの例のようになっている。実際、次が成立する。

定理 3.3 (Darboux の定理). 任意のシンプレクティック多様体 (M, ω) の任意の点 p に対し、 p の局所座標近傍系 $(U; \mathbf{q}, \mathbf{p})$ で

$$\omega|_U = d\mathbf{q} \wedge d\mathbf{p} = dq_1 \wedge dp_1 + \dots + dq_n \wedge dp_n$$

となるものが存在する。このような座標系を **Darboux 座標系** と呼ぶ。

この定理の内容を雑に云えば『局所的に見れば、全てのシンプレクティック多様体は同じに見える』となる。Riemann 多様体ではこのような定理は一般には成立しない⁴。

本節で必要なシンプレクティック幾何学の用語はこの程度である (これら以外は次節で述べる)。では、次に統計構造を考えていく。

定義 3.4. M を可微分多様体、 g を Riemann 計量、 ∇ をアフィン接続とする。 $T^\nabla = 0$ であり ∇g が対称であるとき、 (M, g, ∇) を **統計多様体** と呼ぶ⁵。ここで T^∇ は ∇ の捩れ。 ∇^* を g に関する ∇ の双対接続、即ち任意の $X, Y, Z \in \mathcal{T}(M)$ に対し $Zg(X, Y) =$

³symplectic の日本語訳は斜交である。

⁴Riemann 多様体での正規座標系が類似物と思われるが、こちらは一点のみでの話である。

⁵ g を不定値とする場合もある。

$g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z^* Y)$ で定められるアフィン接続としたとき、 (M, g, ∇) が統計多様体である事と $T^\nabla = 0 = T^{\nabla^*}$ は同値。

いま、多様体 M 上にシンプレクティック構造 ω と統計構造 (g, ∇) が同居する場合を考えたい。その為に次のように定義する。

定義 3.5. 多様体 M の各点 p の接空間上の線型変換 $J_p : T_p M \rightarrow T_p M$ で $J_p^2 = -I$ を満たすものを**概複素構造**と呼ぶ。

概複素構造は $(1, 1)$ テンソル場である： $J : \mathcal{T}^* \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ 。概複素構造を許容する多様体は偶数次元に限るが、任意の偶数次元の多様体が概複素構造を許容する訳ではない。概複素構造 J が存在するとき、各接空間において $\sqrt{-1}X := JX$ とすれば複素ベクトル空間となる。

Riemann 多様体 (M, g) 上の概複素構造を J とし、接続の場合と同様に

$$g(JX, Y) = -g(X, J^*Y)$$

によって双対概複素構造 J^* を定義する。このとき、次が成立する。本節で必要なのは (iii) のみであるが、一応纏めておく。

補題 3.6. 任意の $X, Y, Z \in \mathcal{T}$ に対し、次が成立する。

- (i) $(J^*)^2 = -I, (J^*)^* = J$.
- (ii) $g(JX, J^*Y) = g(X, Y)$.
- (iii) $J = J^* \Leftrightarrow g(JX, JY) = g(X, Y) \Leftrightarrow g(JX, Y) = g(X, -JY)$.
- (iv) (M, g, ∇) が統計多様体なら $g((\nabla_Z J)X, Y) = -g(X, (\nabla_Z^* J^*)Y)$.

シンプレクティック構造、Riemann 計量、概複素構造のあいだの関係を円満にするための定義をしよう。

定義 3.7. シンプレクティック多様体 (M, ω) 上の概複素構造 J に対して

- (i) 任意の X, Y に対し $\omega(JX, JY) = \omega(X, Y)$,
- (ii) $X \neq 0$ なら $\omega(JX, X) > 0$

が成立するとき、 J は ω と**両立する**という。

シンプレクティック構造と両立する概複素構造が存在すると、

$$g(X, Y) := \omega(JX, Y)$$

によって Riemann 計量が定まる。一般に、 g, ω, J のうち2つを決めると残り一つは自動的に定まる。

これでシンプレクティック構造と Riemann 計量とを繋ぐ事が可能となったので、次に統計構造との両立を述べる。まず、統計多様体上にシンプレクティック構造が定まる為の条件から。

命題 3.8. (M, g, ∇) を統計多様体、 J を複素構造で任意の X, Y に対し $g(JX, JY) = g(X, Y)$ を満たすものとする。 $\nabla^* = \nabla - J(\nabla J)$ かつ任意の X, Y に対し $(\nabla_X J)Y = (\nabla_Y J)X$ であるなら、 $\omega(X, Y) := g(X, JY)$ で定められる 2 形式に対して $d\omega = 0$ と $\nabla\omega = 0$ が成立する。即ち、 ω はシンプレクティック構造で ∇ はシンプレクティック接続。

シンプレクティック多様体 (M, ω) 上のアフィン接続 ∇ で ω を保ち捩れ無しのもの ($\nabla\omega = 0, T^\nabla = 0$) をシンプレクティック接続と呼ぶ。任意のシンプレクティック多様体上にシンプレクティック接続は (沢山) 存在する。

次に、この命題の逆、即ちシンプレクティック多様体が統計構造を許容する為の条件は次のようになる。

命題 3.9. (M, ω) をシンプレクティック多様体、 ∇ をシンプレクティック接続、 J を ω と両立する複素構造とする。このとき次が成立：

(i) $\nabla^* = \nabla - J(\nabla J)$.

(ii) 任意の X, Y に対し $(\nabla_X J)Y = (\nabla_Y J)X$ である事と (M, g, ∇) が統計多様体である事は同値⁶。

注意 3.10. (1) $\nabla\omega = 0$ かつ $\nabla J = 0$ なら ∇ は Levi-Civita 接続になる。

(2) $d^\nabla J(X, Y) := (\nabla_X J)Y - (\nabla_Y J)X$ と定めると $T^{\nabla^*}(X, Y) = J^{-1}d^\nabla J(X, Y)$ が成立。

これで統計構造とシンプレクティック構造が同居するための条件が判った。登場人物を全て列挙して組すると $(M, g, J, \omega, \nabla, \nabla^*)$ となる。このとき (g, J, ω) は概 Kähler 構造、 (g, ∇, ∇^*) は統計構造、 ∇ はシンプレクティック接続である。このような 6 つ組を symplectic と statistical の 2 つの S を使用して本論文では SS 多様体と呼ぶことにする⁷。これらの条件下で次が成立する。

補題 3.11. $\nabla\omega = 0$ かつ $\nabla^* = \nabla - J(\nabla J)$ なら次が成立。

(1) $\nabla^*\omega = 0$ 。即ち ∇^* もシンプレクティック接続。

(2) $\nabla^0 := \frac{1}{2}(\nabla + \nabla^*)$ とおくと $T^{\nabla^0} = 0$ かつ $\nabla^0 g = 0$ 。従って ∇^0 は g の Levi-Civita 接続である。更に J は可積分。特に (g, J, ω) は Kähler 構造。

統計多様体に登場するアフィン接続に関して平坦性を考えると、一方に関して平坦なら自動的に他方も平坦になる。そこで、SS 多様体でも平坦であるものを考えると次が成立する。

⁶これが ∇^* が捩れ無しとなる為の条件。

⁷本名は [11] の正則統計多様体 (holomorphic statistical) であるが、Seisoku Statistical でも SS だ。

命題 3.12. SS 多様体 $(M, g, J, \omega, \nabla, \nabla^*)$ に対し $R^\nabla = 0$ とする⁸。このとき ∇ アフィン座標系 $(\theta^1, \dots, \theta^{2n})$, ∇^* アフィン座標系 $(\eta_1, \dots, \eta_{2n})$ は Darboux 座標系と取れる。即ち

$$\begin{aligned}\omega &= d\eta_1 \wedge d\eta_{n+1} + \dots + d\eta_n \wedge d\eta_{2n}, \\ \omega &= d\theta^1 \wedge d\theta^{n+1} + \dots + d\theta^n \wedge d\theta^{2n}\end{aligned}$$

となるアフィン座標系が存在する。

要約すると『統計多様体として良い座標系はシンプレクティック多様体としても良い座標』となる。

一般に、シンプレクティック多様体 (M, ω) に対し、 ω^n は至る所ゼロとはならないので M 上の体積要素を定める (Riemann 多様体の場合の $\sqrt{|g|}dv$ に相当)。これを Darboux 座標系で記述してみると

$$\frac{\omega^n}{n!} = dq_1 \wedge dp_1 \wedge \dots \wedge dq_n \wedge dp_n$$

となる (但し $n!$ で割ってある)。これより、Darboux (アフィン) 座標系では一様分布を定める事が可能である事が判る (座標変換にはシンプレクティック同相 ($\text{Sp}(2n)$ の要素) のみを使用する必要がある)。このとき、Fisher 計量に対して $|g| = 1$ が成立する。即ち、双対平坦空間が統計構造と両立するシンプレクティック構造を許容するのは一様分布を定義出来る事であると云える。従って、事前分布として一様分布が取れ、それが Jeffreys 事前分布である状況が平坦 SS 構造 (特殊 Kähler 構造) である。講演では「 ω^n は Jeffreys 事前分布と異なる」と述べたが、それが誤りであった事をここにお詫び致します。

4. シンプレクティック・ベクトル空間上の分布の発展

統計モデル (一般に統計多様体) は Riemann 多様体であるので、その上の確率分布を変形させる方法を考えた場合、安易に思い付くのが等長変換であるが、これは平行移動と回転程度しか出来ないので堅すぎる。では、体積保存で変形させる事を考えると、これは少々自由すぎる。そこで、中間に位置するものとして正準変換を考えたい。正準変換 (Hamilton 流) は体積保存である (Liouville の定理⁹) が、等長変換ほどカチカチではなく、多様体上の函数によって定められるので、必要条件を函数に対するそれと出来、解析に適すると思われる。本節では、正準変換によって確率分布を発展させたときにどのような事が課されるのかを述べる。具体的には例 3.2 のシンプレクティック多様体 $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ 上の多変量正規分布の線型 Hamilton 流による発展の下での共分散の発展と、行列式の下限が与えられる事を概説する。この方法の鍵は

⁸この場合は特殊 Kähler 多様体になる。

⁹ $n = 1$ の場合、体積保存変換と正準変換に違いはないので、正準変換でも原型を留めないものも沢山考えられる。その場合によく使用されるのはネコである。量子力学の重ね合わせでもネコ (所謂シュレネコ) が使用されていた事を考えると、ネコ好きは物理をしない方がよいのではないかと思えてくる。

- (i) 線型 Hamilton 系での共分散の発展は計算が楽；
- (ii) 多変量正規分布の sublevel 集合は楕円体；
- (iii) 楕円体のシンプレクティック容量は計算が可（楽？）

である。

本節で紹介したい結果は次である。

定理 4.1 ([15]). $\Sigma = \Sigma(0)$ を $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ 上の平均が 0 である多変量正規分布の共分散行列とする。状態遷移行列 Φ_t の線型 Hamilton 系での発展に対して t での共分散は $\Sigma(t) = \Phi_t \Sigma \Phi_t^T$ であり、全ての $1 \leq j \leq n$ に対して

$$\det(\Sigma_{jj}(t)) \geq \left(\frac{c(E_{\Sigma^{-1}})}{\pi} \right)^2, \quad 1 \leq j \leq n,$$

が成立する。ここで $E_{\Sigma^{-1}} = \{\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{2n}; \mathbf{x}^T \Sigma^{-1} \mathbf{x} \leq 1\}$ であり、 c は $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ 上のシンプレクティック容量、また $\Sigma_{jk} = \begin{bmatrix} \text{cov}(q_j, q_k) & \text{cov}(q_j, p_k) \\ \text{cov}(p_j, q_k) & \text{cov}(p_j, p_k) \end{bmatrix}$ 。

以下でこの定理の概説と、注意点などを述べていく。この結果は不確定性原理をシンプレクティック幾何学を用いて記述する内容として与えられた。不確定性原理には共役変数の同時測定に関する不確定性としての Robertson-Schrödinger 不確定性原理（特に Heisenberg 不確定性原理）や、波動函数とその Fourier 変換（位置表示と運動量表示）のあいだの不確定性など色々な形のものが知られているが、これらをシンプレクティック容量を使用する事で統一的に定式化する目的のものである。後述の注意 4.12, 詳しくは [15], [5], [4], [6] などを参照¹⁰。

定理 4.1 の内容を説明する為に必要なシンプレクティック幾何学の用語などを定義する。ここで導入するものは前節のような多様体の局所的な性質のみに関わるものではなく、大域的性質と関わるものである。

$\mathbb{R}^{2n}$ の点を $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n)$ などと表すが、これは列ベクトルとみなす。 $\mathbb{R}^{2n}$ 上の標準シンプレクティック構造 ω_0 に対応する行列を J とする。即ち $J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$ 。これは $\omega_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T J \mathbf{y}$ を満たす行列である¹¹。 $2n$ 次行列 S で $S^T J S = J$ を満たすものの全体を $\text{Sp}(2n)$ と表す。これは任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{2n}$ に対し $\omega_0(S\mathbf{x}, S\mathbf{y}) = \omega_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ と同値。このとき $\text{Sp}(2n)$ は Lie 群になり、これをシンプレクティック群と呼ぶ。 $\text{Sp}(2n)$ に属する行列をシンプレクティック行列と呼ぶ。任意の $S \in \text{Sp}(2n)$ に対して $\det(S) = 1$ が成立する（ $\text{Sp}(2n)$ は $\text{SL}(2n)$ の連結部分群）。またユニタリ群は $U(n) \subset \text{Sp}(2n)$ と見なせる。実際、 $A + iB \in U(n)$ に対し $\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} \in \text{Sp}(2n)$ とすれば良い。 $2n$ 次行

¹⁰個人的にであるが、[6] はミスプリが多すぎて、解説・修正を諦めた。

¹¹ ω_0 の定義が転置な気もするが、ここではこのように定める事にする。

列 S を n 次のブロックによって $S = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ と表すとき、 $S \in \text{Sp}(2n)$ である為の必要充分条件は $A^T C, B^T D$ は対称で $A^T D - C^T B = I$ である。このとき、 S の逆行列は $S^{-1} = \begin{bmatrix} D^T & -B^T \\ -C^T & A^T \end{bmatrix}$ となる。

定義 4.2. シンプレクティック多様体 (M, ω) 上の関数 $H \in \mathcal{F}(M)$ に対して

$$\omega^\flat(X_H) = dH$$

で定まるベクトル場 $X_H \in \mathcal{T}(M)$ を H の **Hamilton ベクトル場**、 H を **ハミルトン関数** (ハミルトニアン) と呼ぶ。

H は物理学的には系のエネルギーであるが、数学的には任意の関数で良い。 $c(t)$ を Hamilton ベクトル場 X_H の積分曲線、 $\{\varphi_t\}$ を X_H の 1 パラメータ変換群としたとき、

- (i) エネルギー保存則 : $\frac{dH(c(t))}{dt} = 0$;
- (ii) 体積保存¹² (Liouville の定理) : $\varphi_t^* \omega^n = \omega^n$

が成立する。

例 4.3. 例 3.2 の $M = \mathbb{R}^{2n}$, ω_0 の場合を考える。 $H \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^{2n})$ に対して $dH = \frac{\partial H}{\partial q} dq + \frac{\partial H}{\partial p} dp$ から

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p}.$$

特に $\mathbb{R}^{2n}$ 内の曲線 $(q(t), p(t))$ に対して

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

と、Hamilton 方程式が得られる。特に H が 2 次式である場合を線型 Hamilton 系と呼ぶ。即ち、 $\mathcal{H}$ を $2n$ 次の実対称行列として $H = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathcal{H} \mathbf{x}$ と表される場合が線型 Hamilton 系である。

$$H = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (a_j p_j^2 + b_j q_j^2 + 2c_j p_j q_j)$$

とおくと

$$J \text{grad}(H) = \begin{bmatrix} C & A \\ -B & -C \end{bmatrix}$$

となる。但し grad は $\mathbb{R}^{2n}$ の標準内積に関する勾配であり、 A, B, C は

$$A = \text{diag}[a_1, \dots, a_n], \quad B = \text{diag}[b_1, \dots, b_n], \quad C = \text{diag}[c_1, \dots, c_n].$$

¹²より詳しく、 $\varphi_t^* \omega = \omega$ が成立する。そして、この $\varphi_t^* \omega = \omega$ がラグダに繋がる。

このとき、Hamilton 方程式は

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = J \text{grad}(H) \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}$$

と表せる。いま

$$\Phi_t = e^{t(J \text{grad}(H))} = \exp \left(t \begin{bmatrix} C & A \\ -B & -C \end{bmatrix} \right)$$

と定めると、Hamilton 方程式の解 $\mathbf{x}(t) = (\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$ は

$$\mathbf{x}(t) = \Phi_t \mathbf{x}(0)$$

で与えられる。 Φ_t を状態遷移行列と呼ぶ。任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $\Phi_t \in \text{Sp}(2n)$ が成立する。

一般に、微分同相 $\varphi: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ は ω_0 を保つとき、即ち $\varphi^* \omega_0 = \omega_0$ のとき φ を**正準変換**、**シンプレクティック微分同相**と呼ぶ。これは φ の Jacobi 行列 $\text{Jac}(\varphi)$ が各点でシンプレクティック行列、即ち $\text{Jac}(\varphi) \in \text{Sp}(2n)$ と同値である。 $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ の正準変換全体のなす群を $\text{Symp}(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ で表す。Hamilton 系の 1 パラメータ変換は全て正準変換であり、また平行移動も正準変換である。

これらの準備の下、定理 4.1 の前半部である t での共分散が $\Sigma(t) = \Phi_t \Sigma \Phi_t^T$ である事を示す。 $\mathbb{R}^{2n}$ 上の平均 0, 共分散 Σ の正規分布の密度関数は

$$\rho_0(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^n (\det(\Sigma))^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \Sigma^{-1} \mathbf{x} \right]$$

である。これを遷移行列 Φ_t の線型 Hamilton 系で発展させる。このとき t での確率密度関数 $\rho_t(\mathbf{x})$ は $\rho_t(\mathbf{x}) = \rho_0(\Phi_{-t} \mathbf{x})$ で与えられる。即ち

$$\rho_t(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^n (\det(\Sigma))^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \Phi_{-t}^T \Sigma^{-1} \Phi_{-t} \mathbf{x} \right]$$

である。ここで $\Phi_{-t} = \Phi_t^{-1}$ と $\det(\Phi_t) = 1$ から

$$\Phi_{-t}^T \Sigma \Phi_{-t} = (\Phi_t \Sigma \Phi_t^T)^{-1}, \quad \det(\Phi_t \Sigma \Phi_t^T) = \det(\Sigma)$$

となるので、

$$\rho_t(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^n (\det(\Phi_t \Sigma \Phi_t^T))^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T (\Phi_t \Sigma^{-1} \Phi_t^T) \mathbf{x} \right]$$

となり、 ρ_t は平均 0, 共分散 $\Phi_t \Sigma \Phi_t^T$ の多変量正規分布である事が判る。

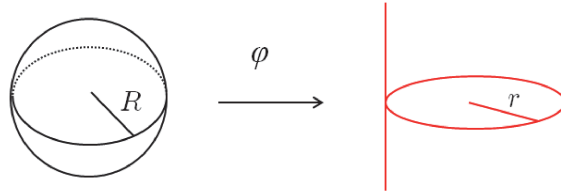
次に、定理 4.1 の後半部を説明したいが、それにはここまで以上に準備が必要となる。先ず、 $\mathbb{R}^{2n}$ 上の半径 r の開球 $B^{2n}(r)$ を考え、それを (線型) Hamilton 流で発展させていく事を考える。このとき、球 $B^{2n}(r)$ は引き伸ばされたり縮めたりされるのであるが、Hamilton 流は正準変換よりなる事から、変形の仕方に制約が付く。それを述べたのが次の定理である。

定理 4.4 (Gromov 非圧縮性定理¹³ [13]). $n > 1$ とする。 $\mathbb{R}^{2n}$ において

$$B^{2n}(r) = \{\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p}) ; |\mathbf{x}| < r\}, \quad Z_1^{2n}(r) = \{\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p}) ; q_1^2 + p_1^2 < r^2\} \cong B_1^2(r) \times \mathbb{R}^{2n-2}$$

と定める。正準変換 $\varphi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ が $\varphi(B^{2n}(R)) \subset Z_1^{2n}(r)$ を満たせば $R \leq r$.

散文的には $\mathbb{R}^{2n}$ 内の半径 R の球 $B^{2n}(R)$ を底面の半径が r の円柱 $Z_1^{2n}(r)$ の中に正準変換で写せたとすると、半径のあいだで $R \leq r$ の関係式が成立している必要がある事を述べている。



この定理 4.4 で大切な事は円柱 $Z_1^{2n}(r)$ の底面が共役変数のなす平面にあるという事である。共役変数の組の入れ替え $(q_j, p_j) \leftrightarrow (q_k, p_k)$ は正準変換なので、 $Z_1^{2n}(r)$ は任意の j に対する $Z_j^{2n}(r)$ でよい。より一般に、 ω_0 を制限して非退化な平面内に円柱の底面があれば良い。この定理はまた、 $n > 1$ なら $\mathbb{R}^{2n}$ の任意の体積保存微分同相は正準変換で近似が出来ない事を示している (Eliashberg [8], 参考: Gromov 二者択一定理)。体積を保存する写像でよいのであれば、定理にある $R \leq r$ のような制約は課されない。球 $B^{2n}(R)$ を充分細長くすれば円柱 $Z_1^{2n}(r)$ の中に写す事は可能である。具体的には、例えば $\varepsilon \geq R/r$ に対し

$$\phi(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \left(\varepsilon q_1, \frac{q_2}{\varepsilon}, q_3, \dots, q_n; \varepsilon p_1, \frac{p_2}{\varepsilon}, p_3, \dots, p_n \right)$$

とすれば良い。しかしながら、この写像が正準変換である為の必要充分条件は $\varepsilon = 1$ である。この定理 4.4 の証明は非常に大変であるが、日本語で読める [10] を参照とする (線型正準変換 $\text{Sp}(2n)$ に限定すれば容易。[14] 参照)。また、この定理は後述のシンプレクティック容量の存在性と同値である。

定理 4.4 により、正準変換には体積保存だけではない拘束が課される事が判った。次に、この拘束の定量化であるシンプレクティック容量を導入する。シンプレクティック容量は (境界を持つ) シンプレクティック多様体 (M, ω) に対して定められるが、ここでは $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ の (開) 部分集合に対して定めれば充分なので、次の定義を採用しておく。一般の場合については後述の注意 4.11 または [14] を参照とする。

定義 4.5. 開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$ に対し、非負の実数または $+\infty$ を指定する函数で、以下の 4 条件を満たす c をシンプレクティック容量と呼ぶ。

- (i) 任意の正準変換 $\varphi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ に対して不変: $c(\varphi(\Omega)) = c(\Omega)$.
- (ii) 包含関係について単調: $\Omega_1 \subset \Omega_2$ なら $c(\Omega_1) \leq c(\Omega_2)$.

¹³[10] では『圧縮不能性定理』。また、『非』を略し『圧縮性定理』と呼ばれる場合もある。

(iii) 相似変換に関して、2 次元的 : $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して $c(\lambda\Omega) = \lambda^2 c(\Omega)$.

(iv) 正規化条件を満たす : $R > 0$ に対して $c(B^{2n}(R)) = \pi R^2 = c(Z_1^{2n}(R))$.

シンプレクティック容量はその名の通り領域の『容量』を表すのであるが、体積ではなくある種の面積を表す量である。例えば

$$\left| \int_{\Omega} \frac{\omega^n}{n!} \right|^{1/n}$$

は (iv) 以外は満たすが、これは $n > 1$ においてはシンプレクティック容量ではない ($n = 1$ ならシンプレクティック容量であり、逆に $n = 1$ の場合はこれしかない。)。 (iv) より $c(\mathbb{R}^{2n}) = +\infty$ である事が判る。また、任意の $1 \leq j \leq n$ に対し $c(Z_j^{2n}(R)) = \pi R^2$ が成立するが、 $Z_{12}^{2n}(R) := \{q_1^2 + p_2^2 < R^2\}$ とすると $c(Z_{12}^{2n}(R)) = +\infty$ となる。

一般に、シンプレクティック容量は沢山存在する。それらの中で最小に当たるものが存在する。

例 4.6. $c_{\min}$ を

$$c_{\min}(\Omega) := \sup_{\varphi \in \text{Symp}(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)} \{ \pi R^2 ; \varphi(B^{2n}(R)) \subset \Omega \}$$

で定める。但し、任意の $R > 0$ に対し $\varphi(B^{2n}(R)) \subset \Omega$ を満たす正準変換 φ が存在しないなら、 $c_{\min}(\Omega) = 0$ と定める。この $c_{\min}$ は Gromov 容量、シンプレクティック半径、Gromov 半径などと呼ばれる場合もある。

この $c_{\min}$ はシンプレクティック容量の最小を与える。実際、任意のシンプレクティック容量 c と $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$ に対して $c_{\min}(\Omega) \leq c(\Omega)$ が成立する。一般に、2つのシンプレクティック容量 c_1, c_2 と $0 < \lambda < 1$ に対して $c := (1 - \lambda)c_1 + \lambda c_2$ とすると c もシンプレクティック容量になる。

定理 4.1 における下限にシンプレクティック容量 c が登場しているが、これは具体的に計算の出来るものなのだろうか。一般の領域では難しいが、今は楕円体であるので、次の2つの事実により（一般論的には）計算が可能である。

命題 4.7. Σ を実対称正定値 $2n$ 次行列とし、 $E_{\Sigma^{-1}} := \{x \in \mathbb{R}^{2n}; x^T \Sigma^{-1} x \leq 1\}$ で $\mathbb{R}^{2n}$ 内の楕円体を定める。

(1) $c(E_{\Sigma^{-1}}) = \min_j \{\text{Area}(\pi_j(E_{\Sigma^{-1}}))\}$. 但し $\pi_j : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^2$ は $(q_1, p_1, \dots, q_n, p_n) \mapsto (q_j, p_j)$ で定められる射影。

(2) $c(E_{\Sigma^{-1}}) = \pi / \lambda_{\max}$. 但し $\lambda_{\max}$ は Σ^{-1} のシンプレクティック固有値の最大。

この (2) にシンプレクティック固有値というものが出てきたが、これについて説明をしておく。その前によく知られた事実を復習しておく。実対称 m 次行列 M はある直交行列 $P \in O(m)$ によって対角化できる : $PMP^T = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$. これは線型代数学でよく知られた結果であるが、これのシンプレクティック版が存在する。

定理 4.8 (Williamson [23]). M を正定値対称 $2n$ 次行列とする。 JM の固有値は全て純虚数であり、これを $\pm\sqrt{-1}\lambda_j$, $\lambda_j > 0$ とする。このとき $S \in \mathrm{Sp}(2n)$ で

$$S^T M S = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

となるものが存在する。 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ は S の取り方には依らず、 S は up to $U(n)$ で一意的。

この結果を総受けて、次のように定義する。

定義 4.9. 正定値対称 $2n$ 次行列 M に対し JM の固有値を $\pm\sqrt{-1}\lambda_j$ ($1 \leq j \leq n$), 但し $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > 0$ とする¹⁴。このとき各 λ_j を M のシンプレクティック固有値と呼び、 M のシンプレクティック固有値の集合を $\mathrm{Spec}_{\omega_0}(M) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ と表し M のシンプレクティック・スペクトルと呼ぶ。

シンプレクティック固有値の性質を纏めておく。

命題 4.10. 正定値対称 $2n$ 次行列 M のシンプレクティック固有値の集合を $\mathrm{Spec}_{\omega_0}(M) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ とする。このとき次が成立する。

- (1) 任意の $S \in \mathrm{Sp}(2n)$ に対し $\mathrm{Spec}_{\omega_0}(S^T M S) = \mathrm{Spec}_{\omega_0}(M)$.
- (2) $\mathrm{Spec}_{\omega_0}(M^{-1}) = (\mathrm{Spec}_{\omega_0}(M))^{-1} = (\lambda_n^{-1}, \lambda_{n-1}^{-1}, \dots, \lambda_1^{-1})$.
- (3) $M \leq M'$ ならば $\mathrm{Spec}_{\omega_0}(M) \leq \mathrm{Spec}_{\omega_0}(M')$. i.e., 任意の j に対し $\lambda_j \leq \lambda'_j$.

これらの準備の下、定理 4.1 の後半を証明しよう。先ずは命題 4.7 を示す。これは楕円体の任意のシンプレクティック容量は等しい事から従う。 M を正定値実対称 $2n$ 次行列とし、 M のシンプレクティック固有値の集合を $\mathrm{Spec}_{\omega_0}(M) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ とする。シンプレクティック容量は正準変換の下で不変なので、正準変換によって M をシンプレクティック対角化しておく事で、 M の定める $\mathbb{R}^{2n}$ 内の楕円体 $E_M = \{\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p}); \mathbf{x}^T M \mathbf{x} \leq 1\}$ は

$$E_M = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}); \sum_{j=1}^n \lambda_j (q_j^2 + p_j^2) \leq 1\}$$

として良い。 $R_j := 1/\sqrt{\lambda_j}$ と置く事により $R_1 \leq R_2 \leq \dots \leq R_n$ であり、 E_M は

$$E_M = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}); \sum_{j=1}^n \frac{1}{R_j^2} (q_j^2 + p_j^2) \leq 1\}$$

と表される。明らかに $B^{2n}(R_1) \subset E_M \subset Z_1^{2n}(R_1)$ より $c(B^{2n}(R_1)) \leq c(E_M) \leq c(Z_1^{2n}(R_1))$ であり、 $c(B^{2n}(R_1)) = \pi R_1^2 = c(Z_1^{2n}(R_1))$ より $c(E_M) = \pi R_1^2$. 即ち、楕円体 E_M の任意のシンプレクティック容量 c の値は全て等しく $c(E_M) = \pi R_1^2 = \pi \lambda_1^{-1}$ である。

¹⁴大小を逆順にする流儀あり。

ここで $M = \Sigma^{-1}$ と取ると $c(E_{\Sigma^{-1}}) = \pi R_1^2$. これで命題 4.7 (1) が示された。また $c(E_{\Sigma^{-1}}) = \pi \lambda_1^{-1}$ より

$$\frac{1}{\lambda_1} = \frac{C(E_{\Sigma^{-1}})}{\pi}$$

を得る。これで命題 4.7 (2) も示せた。一方、

$$\det(\Sigma_{jj}) = \frac{1}{\det(\Sigma_{jj}^{-1})} = \frac{1}{\lambda_j^2} \geq \frac{1}{\lambda_1^2}$$

から、

$$\det(\Sigma_{jj}) \geq \left(\frac{c(E_{\Sigma^{-1}})}{\pi} \right)^2$$

を得る。これで定理 4.1 の後半も示せた。

注意 4.11. 一般のシンプレクティック容量は次のように定義される： (M, ω) をシンプレクティック多様体とする。 M は境界を持っても良い。シンプレクティック多様体に対して非負実数または $+\infty$ を定める函数 c で

(i) **単調性**：シンプレクティック埋め込み（正準変換である埋め込み） $\varphi : (M_1, \omega_1) \rightarrow (M_2, \omega_2)$ が存在すれば $c(M_1, \omega_1) \leq c(M_2, \omega_2)$;

(ii) **共形性**：任意の実数 $\lambda \neq 0$ に対し $c(M, \lambda\omega) = |\lambda|c(M, \omega)$;

(iii) **正規性**： $c(B^{2n}(1), \omega_0) = \pi = c(Z_1^{2n}(1), \omega_0)$

を満たすものをシンプレクティック容量と呼ぶ。特に、 M として $\mathbb{R}^{2n}$ の開集合、 ω として ω_0 とした (M, ω_0) に対し、(i) を $\mathrm{Sp}(2n)$ の要素に制限したものを線型シンプレクティック容量と呼ぶ。

本節で考えた楕円体に対しては全てのシンプレクティック容量の値は一致し、その値は命題 4.7 で与えた。 $E_{\Sigma^{-1}} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}; \mathbf{x}^T \Sigma^{-1} \mathbf{x} \leq 1\}$ としたとき、

$$c(E_{\Sigma^{-1}}) = \min_j \{\mathrm{Area}(\pi_j(E_{\Sigma^{-1}}))\} = \pi r_1^2 = \pi / \lambda_{\max}$$

であるが、これらは力学的に解釈出来る。これらは Hamilton 方程式の ∂E 上の周期軌道の作用の最小値であり、ある特別な周期軌道の作用と一致する。詳しくは [14], [19] を見よ。

シンプレクティック容量はまた、シンプレクティック位相同型（位相同型で『正準変換』であるもの）を定義する事にも使用される。一般に $\mathbb{R}^{2n}$ の向きを保つ微分同相 $\varphi \in \mathrm{Diff}^+(\mathbb{R}^{2n})$ に対し、 $\varphi \in \mathrm{Symp}(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ である事と φ が任意の開集合 $U \subset \mathbb{R}^{2n}$ に対し（任意の）シンプレクティック容量を保つ事は同値 ([7])。この性質を用いる事で位相同型に対して正準性を定義出来る ([19])。

注意 4.12. 本節で紹介した定理 4.1 は不確定性原理をシンプレクティック幾何学を使って定式化するものである。これを簡単に説明しておく。定理 4.1 の不等式

$$(4.1) \quad \det(\Sigma_{jj}(t)) \geq \left(\frac{c(E_{\Sigma^{-1}})}{\pi} \right)^2$$

において、初期状態 $t = 0$ のときを考える。いま、 $(\Delta X_j)^2 := \text{cov}(q_j, q_j)$, $(\Delta P_j)^2 := \text{cov}(p_j, p_j)$, $\Delta(X_j, P_j) := \text{cov}(q_j, p_j)$ と置いて左辺を書き換えてみると

$$\det(\Sigma_{jj}) = \begin{bmatrix} \text{cov}(q_j, q_j) & \text{cov}(q_j, p_j) \\ \text{cov}(p_j, q_j) & \text{cov}(p_j, p_j) \end{bmatrix} = (\Delta X_j)^2 (\Delta P_j)^2 - \Delta(X_j, P_j)^2$$

となる。一方、右辺に登場する楕円体 $E_{\Sigma^{-1}}$ として $B^{2n}(\sqrt{\hbar/2})$ と取ると、 $c_L(B^{2n}(\sqrt{\hbar/2})) = \pi\hbar/2$ だから、右辺は

$$\left(\frac{c_L(E_{\Sigma^{-1}})}{\pi} \right)^2 = \left(\frac{\hbar}{2} \right)^2$$

となる。但し $\hbar = h/2\pi$ であり、 h は Planck 定数。従って

$$(\Delta X_j)^2 (\Delta P_j)^2 - \Delta(X_j, P_j)^2 \geq \frac{1}{4} \hbar^2$$

となり、Robertson-Schrödinger 不確定性原理を得る。共分散 $\Delta(X_j, P_j)$ を無視する事で Heisenberg 不確定性原理

$$(\Delta X_j)(\Delta P_j) \geq \frac{1}{2} \hbar$$

が得られる。この関係が初期時刻 $t = 0$ で成立すれば、(4.1) により、全ての時間に対しても不確定性が保たれる事が判る。いま、右辺に取った楕円体（球体） $B^{2n}(\sqrt{\hbar/2})$ を（量子力学における）空間の『最小単位』と考える事が出来る（即ち、粗視化）。

5. 補遺

第 3 節で見たように、統計構造とシンプレクティック構造が同居し、平坦であるとするとはこれは 特殊 Kähler 構造であり、かなりの制約である。例えば、1 次元正規分布全体のモデルはこの条件を満たさないの、双対平坦構造（Fisher 計量）と両立するシンプレクティック構造は存在しない。また、第 4 節で考えた $\mathbb{R}^{2n}$ 上の分布の発展では、多変量正規分布の線型 Hamilton 系での発展というこれまたかなりの制約のある場合を考えた。本節では、これらの条件を緩める事について簡単にコメントしておく。

先ずは簡単なものから。定理 4.1 において多変量正規分布の平均を 0 と仮定しているが、 $\mathbb{R}^{2n}$ の平行移動は正準変換なので、この仮定は重要ではない。発展を線型とは限らない Hamilton 系で考えるとすると、発展後の分布の共分散が $\Phi_t \Sigma \Phi_t^T$ のような簡単な形で与えられない。しかし、Hamilton 系を線型化する事は可能（例えば [16]）なので、線型化したものと元のものとで数値的に差を解析する事が出来る（[4] を見よ）。また、[5] では分布の発展に多変量解析における最小体積楕円問題の手法（例えば [12]）を使用している。定理 4.1 には実は $\mathbb{R}^{2n}$ 上の統計構造は一切使用していない事に注意しておく。即

ち、モデル空間が $\mathbb{R}^{2n}$ であれば、分布を Hamilton 流で発展させる事が可能である。当然であるが、モデル上に定められる統計構造は ω_0 と両立するとは限らない。

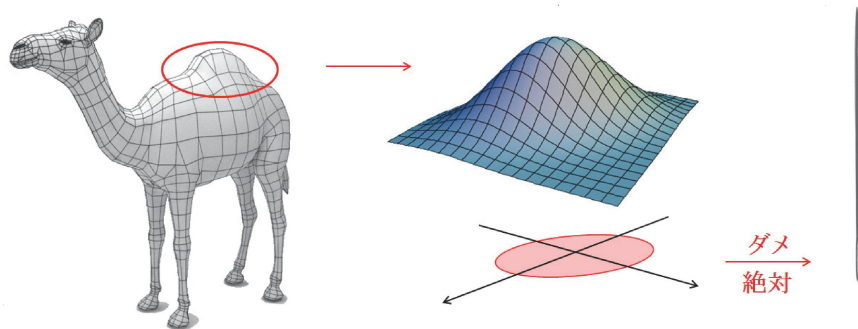
また、第 3 節ではシンプレクティック構造と統計構造が同居する場合 (SS 多様体) で考えてきたが、これを緩める事も可能である。多様体の余接束は必ずシンプレクティック構造を許容するから、統計モデルの余接束の正準構造を考える事も考えられる。特にモデルが双対平坦であるなら、余接束上のシンプレクティック構造は canonical divergence から導かれる ([3], [18] 参照)。

6. 結局、ラクダって何？

イエスの言葉として聖書に次のような記述がある：

金持ちが神の国へ入るより、ラクダが針の目を通り抜ける方が簡単である。

この文章を雑に解釈すると『ラクダを針の目に通すのは難しいが、金持ちが神の国へ入る事はもっと難しい』となる。4 節で考えたのは $\mathbb{R}^{2n}$ 上の多変量正規分布の発展であるが、ラクダのこぶは 2 変量正規分布の密度関数のグラフに似ている気がする。この (sub) level 集合である楕円体を小さい穴に通すことは出来ない事を Gromov の定理は主張している¹⁵。



[5] では定理 4.4 (Gromov の非圧縮性定理) またはその亜種 (同値な言い換え) を比喩的に『シンプレクティック・ラクダの原理』と呼んでいる。この語を使用している文献 [5], [4], [6] などでは、シンプレクティック容量を使って不確定性原理の定式化が与えられており、シンプレクティック・ラクダの原理から不確定性原理が導かれる流れとなっている。

REFERENCES

- [1] 甘利俊一, 長岡浩司, 情報幾何の方法, 岩波講座応用数学, 東京:岩波書店, 1993.
- [2] S. AMARI AND H. NAGAOKA, Methods of information geometry, Translated from the 1993 Japanese original by Daishi Harada. Translations of Mathematical Monographs, 191. American Mathematical Society, Providence, RI; Oxford University Press, Oxford, 2000.

¹⁵実は、この場合は $n = 1$ なので、楕円体を正準変換によって幾らでも細い穴に通せる (ラクダにとっては残念な通り方だろうが)。針の穴もラクダも 3 次元の対象である事には目を瞑ろう。

- [3] O.E. BARNDORFF-NIELSEN AND P.E. JUPP, Statistics, yokes and symplectic geometry, *Annales de la faculté des sciences de Toulouse Sér. 6*, 6 no. 3 (1997), p. 389-427.
- [4] A. CENSI, Symplectic camels and uncertainty analysis, preprint (?).
- [5] M. DE GOSSON, The symplectic camel and the uncertainty principle, The tip of an iceberg?, *Foundations of Physics* 99 (2009) 194–214.
- [6] M. DE GOSSON AND F. LUEF, Symplectic capacities and the geometry of uncertainty: The irruption of symplectic topology in classical and quantum mechanics, *Physics Reports* 484 (2009) 131–179.
- [7] I. EKELAND AND H. HOFER, Symplectic Topology and Hamiltonian Dynamics, *Math. Z.* 200 (1989), no. 3, 355–378.
- [8] Y. ELIASBERG, A theorem on the structure of wave fronts and its applications in symplectic topology, *Funkts. Anal. Prilozh.*, 21:3 (1987), 65-72.
- [9] T. FRIEDRICH, Die Fisher-Information und symplektische Strukturen, *Math. Nachr.* 153 (1991), 273–296.
- [10] 深谷賢治, シンプレクティック幾何学, 岩波書店, 2008.
- [11] H. FURUHATA, Hypersurfaces in statistical manifolds, *Differential Geom. Appl.* 27(2009), 420–429.
- [12] 後藤順哉, 武田朗子条件付き最小楕円と多クラス判別への応用, *数理解析研究所講究録* 1526 (2006), 129-136.
- [13] M. GROMOV, Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds, *Invent. Math.* 82 (1985) 307–347.
- [14] H. HOFER, E. ZEHNDER, Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics. Birkhäuser Advanced Texts (Basler Lehrbücher). Birkhäuser, Basel (1994).
- [15] F.-Y. HSIAO, D.J. SCHEERES, Fundamental constraints on uncertainty relations in Hamiltonian systems, *IEEE Transactions In Automatic Control* 52 (4) (2007) 686–691.
- [16] J. E. MARSDEN, T. RATIUT AND G. RANGEL, Symplectic connections and the linearisation of Hamiltonian systems, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 117A, 329-380, 1991.
- [17] 長岡 浩司, 情報幾何の基礎概念, 大阪市立大学数学研究所ミニスクール「情報幾何への入門と応用」, 2006, http://www.sci.osaka-cu.ac.jp/~ohnita/2006/inf_geom/minis.html
- [18] T. NODA, Symplectic structures on Statistical manifolds, *J. Aust. Math. Soc.* 90 (2011), 371–384.
- [19] O. RADKO, The Hofer-Zehnder capacity (talk at the summer schoold on Hamiltonian Mechaics and Integrable Systems, 2004), pp. 39-56 in the Proceedings of the summer school.
- [20] Y. SHISHIDO, Strong symplectic structures on spaces of probability measures with poisitive density function, *Proc. Japan Acad.*, 81, Ser. A (2005), 134–136.
- [21] J. ZHANG, From divergence function to information geometry: Metric, equiaffine, and symplectic structures, 第58回幾何学シンポジウム予稿集, 47–62, 2011.
- [22] <http://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%82%89%E3%81%8F%E3%81%A0>
- [23] J. WILLIAMSON, On the algebraic problem concerning the normal forms of linear dynamical systems. *Am. J. Math.* 58, 141-163 (1936)