

An embedding of an integral lattice of rank n into a unimodular lattice of rank $n + 2$ and its applications to s -integrability

東北大学 情報科学研究科 吉野 聖人

Kiyoto Yoshino

Graduate School of Information Sciences,
Tohoku University

1 はじめに

本稿は、Qianqian Yang 氏（中国科学技術大学）との共同研究に基づく。

標準的な用語は 2 章でまとめて述べられており適宜参照されたい。また本稿を通して格子は全て整格子を意味する。

ひとつ定義を与えたのちウェアリングの問題との関係を述べ、我々の取り組む問題を明示する。正の整数 s に対して、格子 L が s -integrable であるとは、ある正の整数 n が存在して $\sqrt{s} \cdot L$ が $\mathbb{Z}^n$ の部分格子と同形になることである。ウェアリングの問題の特別な場合として次の問題があった：すべての自然数が k 個の非負整数の 2 乗和で表されるような k が存在するか。そのような k はちょうど 4 で十分であることがラグランジュの四平方定理として知られている。この問題の一般化として、Mordell 氏は二次形式版ウェアリングの問題を与えている。具体的には、正整数 n を固定するとき、 n 変数（正值）整数係数二次形式が k 個の整数係数一次形式の平方の和で表されるような k が存在するかという問題である。例えば、 $3x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 2x_1^2 + (x_1 + x_2)^2$ は 3 つの一次形式の平方の和である。ここで、 $n \geq 6$ の場合は正值整数係数二次形式が常に整数係数一次形式の平方の和に表せるとは限らない点に注意されたい。従って、そのような表示をもつ二次形式に限って二次形式版ウェアリングの問題を考える必要がある。一方で、任意の正值整数係数二次形式 f に対して十分大きい正整数 s を選ぶことで、二次形式 sf は整数係数一次形式の平方の和で表せることが知られている。そのため、二次形式 sf に対して二次形式版ウェアリングの問題を考えることが出来る。これ自体興味深い問題だが、我々は次の問題に着目した：正整数 s に対して、 s 倍しても整数係数二次形式の平方の和で表せないような正值整数係数二次形式のもつ変数の個数の最小値を求めよ、また最小値を与えるような二次形式を分類せよ。実は正值整数係数二次形式と整格子の対応から、正整数 s と整数係数二次形式 f を固定するとき、二次形式 f が整数係数一次形式の平方の和であることと f に対応する格子が s -integrable になることは同値である。そのため、non s -integrable 格子の（ $\mathbb{Z}$ -加群としての）階数の最小値を $\phi(s)$ とするとき、我々の扱う問題は次のように書き換えることができる： $\phi(s)$ を決定し、それを与えるような non s -integrable 格子を分類せよ。

つぎに、先行研究を紹介し主結果を簡単に述べる。Conway 氏と Sloane 氏によって、 $\phi(1) = 6$, $\phi(2) = 12$, $\phi(3) = 14$ [2, Theorem 1] などが示されている。しかし、一般には $\phi(s)$ を決定することは難しく、 $s \geq 4$ の時は決定されていない。彼らは $\phi(2) = 12$ を決定するために、階数 11 以下の格子は全て 2-integrable [2, Theorem 2] であることを示し、階数 12 の non 2-integrable 格子を 2 つ具体的に与えた。（実際の主張は定理 3.2 を参照。）彼らは、極小な階数 12 の non 2-integrable 格子

はその2つに限るのではないかと述べていた。しかし、我々は彼らの構成法にならい新たに二つ極小なものを見つけた。定理 3.3 では発見した格子を明示し、それらが non 2-integrable であると主張する、その証明は4章から6章で行われる。また定理 3.5 では、新たな格子が極小であることを主張する。この証明は、7章で格子の埋め込み理論を導入し、その応用として与えられる。その際、本稿で用いた手法によってさらなる極小な non 2-integrable 格子を得ることが難しいことも説明する。

2 格子に関連する用語の定義

まず n を正整数とする。このとき、格子 (lattice) とは $\mathbb{R}^n$ の部分集合 L であり、ある正整数 $k \leq n$ と一次独立な元 $u_1, \dots, u_k$ が存在して $L = \mathbb{Z}u_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}u_k$ を満たすものである。また整格子とは、2 元の内積が常に整数であるような格子である。格子 $L \subset \mathbb{R}^n$ に対して、その双対 L^* は任意の L の元との内積が整数になるような $\mathbb{Q}L$ の元全体である。さらに、格子 L の discriminant とは、有限群 L^*/L の位数であり、 $\text{disc } L$ と表される。もし $\text{disc } L = 1$ ならば、 L はユニモジュラーであるという。格子 L の最小ノルムとは、非零ベクトルのノルムの最小値であり、 $\min L$ で表される。格子 L の部分格子 M に対して、 M に直交する L の部分格子とは、 M の任意の元と直交する L の元全体であり、 $M^\perp$ と表される。

3 主結果

次の定義の下で、Conway 氏と Sloane 氏が $\phi(2) = 12$ を証明するために構成した格子と我々が新たに発見した格子を紹介する。

定義 3.1. 正整数 n に対して、 $A_n := \{x \in \mathbb{Z}^{n+1} \mid (x, e) = 0\}$ および $A_{15}^+ := \langle A_{15}, [4] \rangle$ とする。ただし、 e は成分が全て 1 のベクトルを表し、 $[4]$ は次のベクトルで定義される：

$$(4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, -12, -12, -12, -12)/16 \in \mathbb{R}^{16}.$$

埋め込み理論の応用として系 7.4 で述べられるように、階数 12 の non 2-integrable 格子は存在するならば A_{15}^+ の部分格子になる。Conway 氏と Sloane 氏による次の結果はその存在性を与える：

定理 3.2 (Theorem 14 [2]). 格子 A_{15}^+ 内で、(ある基底に対応する) グラム行列として

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

をもつ部分格子 M を任意にとる。この格子 M に直交する A_{15}^+ の部分格子 $M^\perp$ は階数 12, discriminant 7 かつ non 2-integrable である。

加えて、定理 3.2 における格子 M は $\text{Aut}(A_{15}^+)$ の作用を除いてちょうど 2 つであり、それぞれに直交する格子 L_{12} と L'_{12} は非同型であると述べられている。対応する我々の結果は、次のように述べられる：

定理 3.3. 自己同型群 $\text{Aut}(A_{15}^+)$ の作用を除いて,

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

をグラム行列にもつ A_{15}^+ の部分格子は $\langle a, b, c \rangle$ と $\langle a, b, c' \rangle$ のみである. ただし,

$$\begin{aligned} a &:= \frac{1}{4}(-3, -3, -3, -3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \in A_{15}^+, \\ b &:= \frac{1}{4}(-3, -3, -3, 1, -3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \in A_{15}^+, \\ c &:= \frac{1}{4}(-3, 1, 1, 1, 1, -3, -3, -3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \in A_{15}^+, \\ c' &:= \frac{1}{4}(1, 1, 1, -3, -3, -3, -3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \in A_{15}^+. \end{aligned}$$

さらに, 非同型な格子 $\langle a, b, c \rangle^\perp$ と $\langle a, b, c' \rangle^\perp$ は階数 12, discriminant 15 かつ non 2-integrable である.

正整数 s に対して, non s -integrable 格子は無限に存在する. そこで, 次で定められる極小な格子を考えることで分類を試みたい.

定義 3.4. 正整数 s を固定する. このとき, non s -integrable 格子 L が極小でないとは, ある正整数 m と格子 M が存在し, L が $M \perp \mathbb{Z}^m / \sqrt{s}$ に含まれる格子 L' と同型かつ $L' \not\subset M$ が成り立つことである.

先行研究として, Ko 氏は 8 次元までの極小 non 1-integrable 格子は E_6, E_7, E_8 であることを証明している [5, 6, 7]. また, Plesken 氏による埋め込み理論を用いた簡潔な証明が知られている [8]. 我々は極小性に関して次の結果を得た:

定理 3.5. 階数 12 の non 2-integrable 格子 L が極小であることの十分条件は次のいずれかが満たされることである:

- (1) $\text{disc } L = 7$;
- (2) $\min L^* \geq 16/15$ かつ $\text{disc } L = 15$.

特に, 定理 3.2 と定理 3.3 で与えられる 4 つの non 2-integrable 格子は全て極小である.

ここで紹介した以外の極小な階数 12 の non 2-integrable 格子が存在性は明らかにできていない.

4 格子 A_{15}^+ の性質と定理 3.3 の前半の主張の証明

定理 3.3 の前半の主張は, グラム行列として行列 (3.2) をもつ A_{15}^+ の部分格子の決定である. その方法を説明するために, 簡単な事実をいくつか紹介する. 16 次対称群 S_{16} は自然に A_{15}^+ に作用し, $\text{Aut}(A_{15}^+) = \langle -1, S_{16} \rangle$ である. また, 相異なる整数 $i_1, \dots, i_4 \in \{1, \dots, 16\}$ に対して,

$$e_{i_1, i_2, i_3, i_4} = e_{\{i_1, i_2, i_3, i_4\}} = \frac{1}{4} \mathbf{e} - e_{i_1} - e_{i_2} - e_{i_3} - e_{i_4}$$

と定める．ただし， e は成分が全て 1 のベクトル， e_j は j 番目の成分が 1 かつ他の成分が 0 のベクトルを表す．単純な計算で，

$$T := \{x \in A_{15}^+ \mid (x, x) = 3\} = \{\pm e_I \mid I \subset \{1, \dots, 16\}, |I| = 4\}$$

であることが分かる．さらに，濃度 4 の $I, J \subset \{1, \dots, 16\}$ に対して

$$(e_I, e_J) = -1 + |I \cap J|$$

が成り立つ．

実際に，定理 3.3 の前半の主張を確かめる．即ち，グラム行列として行列 (3.2) をもつ格子は $\text{Aut}(A_{15}^+)$ の作用を除いて， $\langle a, b, c \rangle$ と $\langle a, b, c' \rangle$ であることを示す．行列 (3.2) をグラム行列として与えるベクトル $x, y, z \in A_{15}^+$ を決定すればよい．まず， $\text{Aut}(A_{15}^+) \simeq \langle -1, S_{16} \rangle$ はノルム 3 ベクトル全体の集合 $T \subset A_{15}^+$ に推移的に作用する．従って， $x = e_{1,2,3,4} = a$ と仮定してよい．さらに $(x, y) = 2$ より， $y = e_{1,2,3,5} = b$ としてよい．最後に， $(x, z) = (y, z) = 0$ なる z のとり方は， $\text{Aut}(A_{15}^+)$ の作用を除いて

$$z = e_{1,6,7,8} = c \text{ と } z = e_{4,5,6,7} = c'$$

の 2 通りであり，所望の結果が得られる．

5 s -integrability の同値条件

格子の s -integrability を証明するため，或いは計算機で判定するために同値条件を述べる．

定義 5.1. 正整数 s を固定する．正整数 $n \leq m$ に対して， $\mathbb{R}^m$ からその n 次元部分空間への直交射影を p とおく．このとき， $p(\sqrt{s} \cdot e_1), \dots, p(\sqrt{s} \cdot e_m)$ からなる多重集合を (n 次元) スケール s の **eutactic star** という．

補題 5.2 (Theorem 3 [2]). 正整数 s を固定する．階数 n の格子 L が s -integrable であることの必要十分条件は，その双対 L^* が n 次元スケール s の eutactic star を含むことである．

与えられたベクトルが eutactic star であるかは次の補題によって判別できる．

補題 5.3 (pp. 215–216 [2]). ベクトル $s_1, \dots, s_m \in \mathbb{R}^n$ が n 次元スケール s の eutactic star を成すことの必要十分条件は，任意の $w \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\sum_{i=1}^m (w, s_i)^2 = s(w, w) \quad (5.1)$$

が成り立つことである．

注意 5.4. Conway 氏と Sloane 氏は定理 3.2 において格子の non 2-integrability を証明するために，補題 5.2 と補題 5.3 を用いた．まず，補題 5.2 によって，non 2-integrability をスケール 2 の eutactic star の非存在性に帰着した．その後，eutactic star が存在が存在すると仮定すると，それらは (5.1) を満たさないことを適当なテストベクトル w をとることで証明し，補題 5.3 により矛盾を得た．その際，テストベクトルのとり方は自然であったが，(5.1) が満たされないことは直ちには従わない．加えて，格子によって異なる議論が必要であった．本稿では，定理 3.3 における格子が non 2-integrable であることの証明の概略を与えるが，まったく同様の方法で Conway 氏らの格子が non 2-integrable であることも証明できる．特に，後に与える補題 6.2 によって，テストベクトルのとり方や方程式を満たすかどうかという議論は不要になる．また補題 6.2 は 3 つの仮定を要請するが，実際に確認が必要な 2 つの仮定は Conway 氏らの証明でも必要であり証明を複雑にしない．

次に述べる補題によって, s -integrable かどうか判定する問題は線形方程式系の非負整数解の有無に帰着される. 従って, 方程式系の変数が少ない場合はコンピュータで判別することが出来る. 実際に主定理が与える格子の non 2-integrability は, プログラミング言語 Magma [1] を用いて確かめた. 一般に線形方程式系の変数が多くなる場合は, 整数計画問題ソルバーの SCIP [4] を用いることで計算が可能になる場合がある. また次の補題の証明は補題 5.2, 補題 5.3 を組み合わせること直ちに得られる.

補題 5.5. 正整数 s を固定する. ベクトル $w_1, \dots, w_n$ を基底に持つ格子 L をとる. さらに, ベクトル $u_1, \dots, u_N$ はノルム s 以下の相異なる L^* の元全てを表す. このとき, L が s -integrable であることの必要十分条件は, 次の線形方程式系が非負整数解 $(x_1, \dots, x_N)$ を持つことである:

$$\sum_{k=1}^N (w_i + w_j, u_k)^2 x_k = s(w_i + w_j, w_i + w_j) \quad (i, j = 1, \dots, n). \quad (5.2)$$

6 定理 3.3 の後半の主張の証明

第 4 章で定理 3.3 の前半の主張は証明したため, 定理 3.3 の証明を完了するには次の命題を示せばよい:

命題 6.1. 格子 A_{15}^+ の部分格子 $\langle a, b, c \rangle^\perp$ と $\langle a, b, c' \rangle^\perp$ は non 2-integrable である.

定理 3.3 ではそれらが非同型であることも述べているが, kissing number を数えることで直ちに従う.

次の補題をその 2 つの格子に適用することで命題 6.1 が従う. またコンピュータを用いることで, 補題 5.5 によって 2-integrability が判別できると述べていたが, 新たな補題を用いることでより少ない計算量で判別可能である.

必要な記号を導入する. まず, 格子 A_{15}^+ のノルム 2 の元全体から成る集合を R で表す. また, ベクトル $u \in \mathbb{R}^n$ に対して, そのサポートを

$$\text{supp } u := \{i \in \{1, \dots, n\} \mid u_i \neq 0\}$$

で定める. このとき, 次が成立する:

補題 6.2. 集合 $\{1, \dots, 16\}$ の部分集合を X , A_{15}^+ の部分格子を N , A_{15}^+ から $\mathbb{Q}N$ への直交射影を p とする. 次の条件を仮定する:

- (1) N^* の非零元のノルムは 1 より大きい.
- (2) N^* のノルムが 2 以下の非零元は $p(R)$ に含まれる.
- (3) $|X| \geq 3$, かつ N はサポートが X に含まれる R の元を全て含む.

格子 N が 2-integrable ならば, ある一次独立な R の元 u と v が存在して, 以下を満たす:

- (4) $\text{supp } u \cap \text{supp } v \cap X \neq \emptyset$.
- (5) $p(u)$ と $p(v)$ に対応するグラム行列 G に対して, $2I - G$ は半正値行列である.

この補題の証明は, 補題 5.2 を用いることで得られるがいくつかの準備が必要になるため省略する.

命題 6.1 の証明の概略. まず

$$(N, X) = (\langle a, b, c \rangle^\perp, \{9, \dots, 16\}) \text{ or } (\langle a, b, c' \rangle^\perp, \{8, \dots, 16\})$$

とする. いずれの場合も補題 6.2 の 3 つの仮定を満たすことが以下のように確かめられる. まず, 条件 (3) は定義から直ちに従う. $N = \langle a, b, c \rangle^\perp$ の場合で, 残り 2 つの条件を確かめる. 格子 $\langle a, b, c \rangle$ を M とおく. このとき $\text{disc } M = 15$ は square-free であるから, M は primitive である. そのため,

$$N^* \perp M^* = (M^\perp)^* \perp M^* = A_{15}^+ + M^* = \bigoplus_{u+M \in M^*/M} (u + A_{15}^+).$$

が成立する. ここで, M^*/M の完全代表系をノルムが 0 か 1 未満になるように取れる. 格子 A_{15}^+ の最小ノルムは 2 であるから, $N = M^\perp$ の双対の最小ノルムは 1 より大きい. 即ち, 条件 (1) が満たされることが確かめられた. 同様の理由から, 条件 (2) も従い仮定は確かめられる. 残りの $N = \langle a, b, c' \rangle^\perp$ の場合も全く同じ議論で仮定が確かめられる. これにより, 補題 6.2 が (N, X) に適用できる.

格子 N が non 2-integrable であることを示すためには, 補題 6.2 の条件 (4), (5) を同時に満たす一次独立な $u, v \in R$ が存在しないことを証明すればよい. 即ち, 任意の一次独立な $u, v \in R$ が

$$\text{supp } u \cap \text{supp } v \cap X \neq \emptyset$$

を満たすとき,

$$2I - \begin{bmatrix} (p(u), p(u)) & (p(u), p(v)) \\ (p(v), p(u)) & (p(v), p(v)) \end{bmatrix}$$

が半正値でないことを証明すれば十分である. 候補となる u, v のペアは多数あるが, 対称性を加味することで数パターンを確かめればよいと分かり結果が従う. $\square$

7 埋め込み理論とその応用

素数 p に対して, $\mathbb{Z}_p$ は p 進整数環, $\mathbb{Q}_p$ は p 進体を表す. さらに, $(\cdot, \cdot)_p$ で $\mathbb{Q}_p$ 上のヒルベルト記号を表す. 素数 p をとるとき, 格子 L 上の内積は $L_p := L \otimes \mathbb{Z}_p$ や $L \otimes \mathbb{Q}_p$ 上に拡張される. $\mathbb{Z}_p$ 加群である L_p の基底に対するグラム行列の行列式を L_p の **discriminant** といい, $\text{disc } L_p$ と書く. また, $\mathbb{Q}_p$ -線形空間である $L \otimes \mathbb{Q}_p$ の直交基底 $u_1, \dots, u_n$ をとり

$$S_p(L) := \prod_{i < j} (u_i^2, u_j^2)$$

をハッセ記号と呼ぶ. これらの記号の下で次の定理が成り立つ:

定理 7.1. 正整数 m と階数 n の格子 L をとる. このとき, L が階数 m のユニモジュラー格子の部分格子と同型であることの必要十分条件は次のいずれかが成立することである:

- (1) $m = n$ かつ $\text{disc } L_p = 1$ が全ての素数 p に対して成立する.
- (2) $m = n + 1$ かつ $S_p(L)(\text{disc } L_p, \text{disc } L_p)_p = 1$ が全ての素数 p に対して成立する.

(3) $m = n + 2$ かつ

$$S_p(L) = \begin{cases} 1 & \text{if } \text{disc } L_p = -1 \text{ and } p > 2, \\ -1 & \text{if } \text{disc } L_p = -1 \text{ and } p = 2, \end{cases}$$

が全ての素数 p に対して成立する.

(4) $m \geq n + 3$.

7.1 埋め込み理論と non 2-integrability

埋め込み理論の応用の紹介と, 極小性に関する定理 3.5 を説明するための主張を与える. 階数 26 までのユニモジュラー格子は分類されており, それらと埋め込み定理を用いることで格子の性質を調べることが出来る. ユニモジュラー格子は分類に関しては [3, Chapter 16–18] 等を参照されたい. Conway 氏と Sloane 氏によって次が示されている:

定理 7.2 ([2, Proof of Theorem 12]). 階数が高々 14 のユニモジュラー格子は 2-integrable である.

定理 7.3 ([2, Theorem 13]). 格子 A_{15}^+ は non 2-integrable である.

まず, 定理 7.1 によって階数が 12 以下の格子 L は階数 15 のユニモジュラー格子の部分格子であることが従う. 階数 15 のユニモジュラーの中でノルム 1 の元を持たないものは, 格子 A_{15}^+ のみであるから上記の二つの定理から次が従う:

系 7.4. 階数 12 の non 2-integrable 格子はユニモジュラー格子 A_{15}^+ の部分格子である.

また, 奇素数 p に対して, 格子 L が $\det L_p \in \mathbb{Z}_p^\times$ を満たすならば, $S_p(L) = 1$ であることが簡単に確かめられ, 定理 7.1 の条件 (3) を用いることで次も従う:

系 7.5. 階数 12 の格子 L に対して $\text{disc } L \leq 27$ を仮定する. このとき, $\text{disc } L \in \{7, 15, 18, 23, 25\}$ が成立する.

さらに, 章 4 で見たように格子 A_{15}^+ 内のノルム 3 のベクトルは非常に扱いやすいため, この系から容易に次が従う:

系 7.6. 格子 A_{15}^+ の一次独立なノルム 3 のベクトル u_1, u_2, u_3 をとる. もし $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle^\perp$ が non 2-integrable ならば, $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ は基底のグラム行列として行列 (3.1) か行列 (3.2) をもつ.

詳細は省略するが, この系の類似として u_1, u_2, u_3 のノルムが 4 以下の場合も考察できる. その場合は, 極小な non 2-integrable 格子を与える u_1, u_2, u_3 に対して同じ結果が従う. しかし, 極小な non 2-integrable 格子を本稿で述べた方法で全て発見することは, u_1, u_2, u_3 としてノルムの大きいベクトルも考える必要があることから難しい.

7.2 埋め込み理論と極小性

ここでは Schur complement を用いた, 定理 3.5 の証明の概略を紹介する. (正方) ブロック行列

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

の部分行列 A_{11} が正則なとき, $A/A_{11} := A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ を **Schur complement** という. さらに, $\det A = \det A_{11} \cdot \det A/A_{11}$ となることが知られており次を得る:

補題 7.7. 正則対称行列 $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ と $C \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$, 行列 $B \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ に対して,

$$|A||C - B^\top A^{-1}B| = |A - BC^{-1}B^\top||C|$$

が成り立つ.

定理 3.5 を背理法によって証明する. 定理 3.5 の条件 (1) または条件 (2) を満たす階数 12 の non 2-integrable 格子 L が極小でないと仮定する. このとき, ある正整数 m と格子 M が存在して

$$L \subset M \perp \mathbb{Z}^m / \sqrt{2}$$

と $L \not\subset M$ が成り立つ. ここで, $M \perp \mathbb{Z}^m / \sqrt{2}$ から L への直交射影を p とする. このとき, M として改めて $p(L)$ をとることが出来る. 直和分解によって, L と M それぞれの基底に対するグラム行列 G_L と G_M , およびベクトル $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{Z}^{12}$ が存在して

$$G_L = G_M + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m a_i a_i^\top$$

が成立する. ここで, $m \geq 2$ かつ, $i = 1, \dots, m$ に対して $a_i \neq 0$ と仮定してよい. このとき, $A := G_L, B := a_m, C := [2]$ として補題 7.7 を適用すると次を得る:

$$|G_L| \cdot (2 - a_m^\top G_L^{-1} a_m) = |G_L - \frac{1}{2} a_m a_m^\top| \cdot 2.$$

これを整理すると

$$|G_L| \cdot \left(1 - \frac{a_m^\top G_L^{-1} a_m}{2}\right) = |G_M + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m-1} a_i a_i^\top|$$

となる. ここで, G_L^{-1} は双対 L^* のある基底に対するグラム行列となることから, ある $u \in L^*$ が存在して $(u, u) = a_m^\top G_L^{-1} a_m$ が成り立つ. 従って,

$$|G_M + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m-1} a_i a_i^\top| = |G_L| \cdot \left(1 - \frac{(u, u)}{2}\right) \leq \mathrm{disc} L \cdot \left(1 - \frac{\min L^*}{2}\right)$$

が成り立つ. 同様の議論を繰り返すことで,

$$\mathrm{disc} M < \mathrm{disc} L \cdot \left(1 - \frac{\min L^*}{2}\right)$$

をえる. 最後に, 定理 3.5 のそれぞれの条件を仮定して矛盾を導く. もし $\mathrm{disc} L = 7$ ならば $\mathrm{disc} M < 7$ であるが, 系 7.5 からそのようなことは起こりえず矛盾を得る. 次に, $\min L^* \geq 16/15$ かつ $\mathrm{disc} L = 15$ であるとする. このとき, 系 7.5 より $\det M = 7$ であるが, 先の不等式にこれらの条件を代入すると矛盾を得る. 以上により, 定理 3.5 は証明された.

参考文献

- [1] W. Bosma, J. Cannon and C. Playoust, The Magma algebra system. I. The user language, *J. Symbolic Comput.* **24** (1997), 235–265.

- [2] J. H. Conway, N. J. A. Sloane, Low-dimensional lattices V: Integral coordinates for integral lattices. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **426** (1989), no. 1871, 211–232.
- [3] J. H. Conway, N. J. A. Sloane, *Sphere packings, lattices and groups: 3rd Edition*, Springer-Verlag, New York (1999).
- [4] A. Gleixner, M. Bastubbe, L. Eifler, T. Gally, G. Gamrath, R. L. Gottwald, G. Hendel, C. Hojny, T. Koch, M. E. Lübbecke, S. J. Maher, M. Miltenberger, B. Müller, M. E. Pfetsch, C. Puchert, D. Rehfeldt, F. Schlösser, C. Schubert, F. Serrano, Y. Shinano, J. M. Viernickel, M. Walter, F. Wegscheider, J. T. Witt, and J. Witzig, *The SCIP Optimization Suite 6.0*. ZIB-Report 18-26, Zuse Institute Berlin (2018).
- [5] C. Ko, On the decomposition of quadratic forms in six variables, *Acta Arith.* **3** (1939), 64–78.
- [6] C. Ko, On the decomposition of quadratic forms in seven variables, *Acad. Sinica Sci. Rec.* (1942), 30–33.
- [7] C. Ko, On the decomposition of quadratic forms in eight variables, *Acad. Sinica Sci. Rec.* (1942), 33–36.
- [8] W. Plesken, Additively Indecomposable Positive Integral Quadratic Forms. *J. Number Theory* **47** (1994), 273–283.