

Knots と immersed disks

佐賀大学 丸本嘉彦 (Yoshihiko Marumoto)

1次元結び目は clasp singularities を持つような 2次元 disk を "張る" ことは容易に示され, ribbon knot はいわゆる ribbon disk を張る。ここでは Seifert 多様体ではなく, どのような singularity を持つ disk と knot の関係について述べ, さらにこのことが Seifert 多様体とも関係があることについて述べる。以下 PL カテゴリーあるいは C^∞ カテゴリーで考える。

これから考える knot は次で定義されるものである:

定義 1 $S^{n+2} = \partial D^{n+3}$ と見なし, $1 \leq p \leq n$ に対して $K^n \subset S^{n+2}$ が次を満たすとき n -knot of type p と言う:

D^{n+3} 上の trivial $(n-p+2)$ -handles $\{h_i^{n-p+2}\}$ が存在して次を満たす

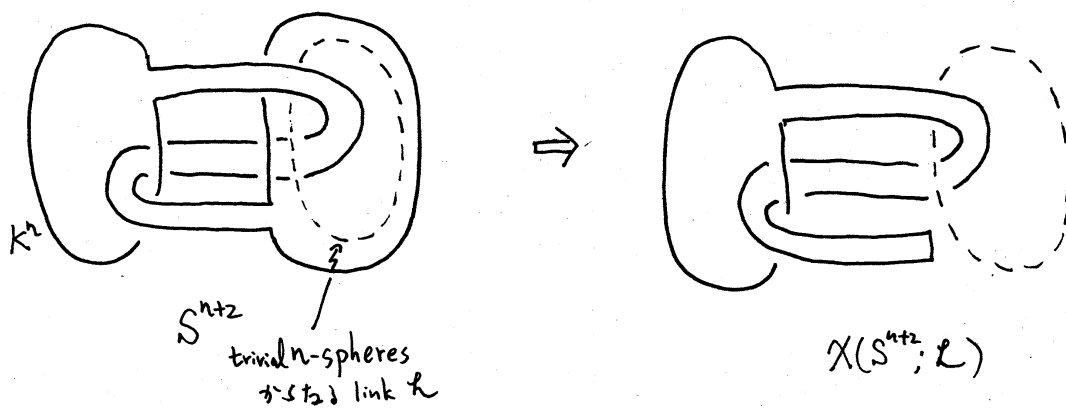
- $$\begin{cases} (1) & K^n \cap h_i^{n-p+2} = \emptyset \quad \text{for } \forall i \\ (2) & \partial(D^{n+3} \cup \bigcup_i h_i^{n-p+2}) \text{ 上で } K^n \text{ は } (n+1)\text{-disk を張る.} \end{cases}$$

ここで trivial handles $\{h_i^{n-p+2}\}$ とは attaching spheres $\{\alpha(h_i^{n-p+2})\}$ が trivial link をなし, attaching map がこの link の zero framing

を induce するもののことを言う。

つまり S^{n+2} 内に $(n-p+1)$ -spheres が 3 なる trivial link L で、 K^n が $X(S^{n+2}; L)$ 内で unknot になるとき K^n を type p と呼ぶ。(L は $S^{n+2}-K^n$ では trivial link とは限らない)

Proposition 2 ribbon n -knot は type 1 である。



さらに次が成り立つ：

Theorem 3 すべての 2-knot は type 2 である。

<証明> $K^2 \subset S^4$ に対して

$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_m$: simple closed curves in $S^4 - K^2$

s.t. $\begin{cases} (1) \text{ } lh(K^2, \alpha_i) = 0 \text{ for } \forall i \text{ (} lh() : \text{linking number) } \\ (2) \text{ } M = X(S^4; \{\alpha_i\}) \text{ と } 1 \leq i \leq m, \pi_1(M - K^2) \cong \mathbb{Z} \end{cases}$

は容易である。するに T. Matumoto [1] より K^2 は $M \# (\#_{\mu} S^2 \times S^2)$

は Σ 3-disk を bound する。これより明か。

Proposition 4 $K^n \subset S^{n+2}$: n -knot of type p に対し Σ 次分解

と：

$$(*) \quad D^{n+3} \text{ の trivial handle decomposition } D^{n+3} = D_0^{n+3} \cup \bigcup_i h_i^p \cup \bigcup_i h_i^{p+1}$$

及び $(n+1)$ -disk $\Delta^{n+1} \subset \partial D_0^{n+3}$ が存在して次を満たす

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \Delta \cap h_i^p = \emptyset \quad \text{for } \forall i \\ (2) \quad \partial \Delta \cap h_i^{p+1} = \emptyset \quad \text{for } \forall i \\ (3) \quad (S^{n+2}, K^n) = (\partial D^{n+3}, \partial \Delta) \end{array} \right.$$

(Σ に対し trivial handle decomposition とは $\{h_i^p\}$ が trivial handles とあり, h_i^p, h_i^{p+1} が complementary handles とあることを言う。)

<証明>

$$K^n \subset S^{n+2}, \quad S^{n+2} = \partial D_1^{n+3}, \quad \{h_i^{n-p+2}\} : \text{trivial handles on } D_1^{n+3}$$

$$\text{s.t. } \left\{ \begin{array}{l} (i) \quad K^n \cap h_i^{n-p+2} = \emptyset \quad \text{for } \forall i \\ (ii) \quad K^n \text{ は } \partial(D_1^{n+3} \cup \bigcup_i h_i^{n-p+2}) \text{ 上 } (n+1)\text{-disk } \Delta^{n+1} \text{ を bound する} \end{array} \right.$$

としておく。 $\{h_i^{n-p+2}\}$ の triviality 及び上記 (ii) より

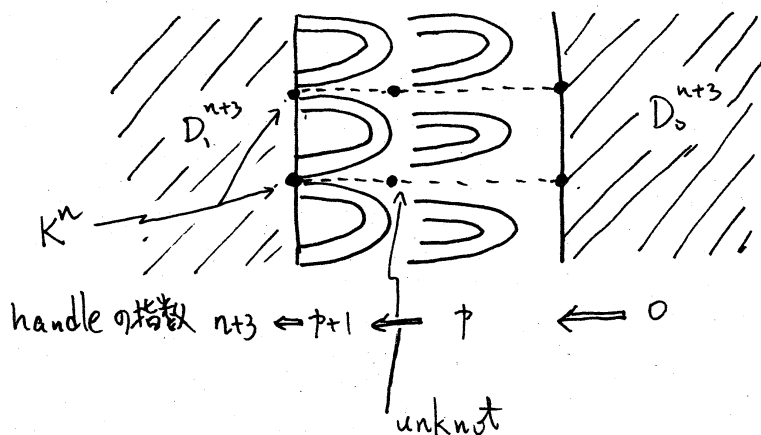
$$\exists \{h_i^{n-p+3}\} : (n-p+3)\text{-handles on } D_1^{n+3} \cup \bigcup_i h_i^{n-p+2}$$

$$\text{s.t. } \left\{ \begin{array}{l} (iii) \quad h_i^{n-p+2}, h_i^{n-p+3} \text{ は complementary handles} \\ (iv) \quad h_i^{n-p+3} \cap \Delta^{n+1} = \emptyset \quad \text{for } \forall i \end{array} \right.$$

となる。このとき $D_1^{n+3} \cup \bigcup_i h_i^{n-p+2} \cup \bigcup_i h_i^{n-p+3}$ は $(n+3)$ -handle D_0^{n+3} を 1 個つけることにより S^{n+3} の handle decomposition が得

られる。この handle 分解を逆から見ることにより求めるものが得られる。

handle の指数 $0 \Rightarrow n-p+2 \Rightarrow n-p+3 \Rightarrow n+3$



以下 2-knot の 4 つについて話を限定することにする。

定義 5 W : 3次元多様体 $\subset S^4$

$\varphi: S^2 \times D^{3-g} \rightarrow \text{int } W$: embedding ($g \geq 0$)

$\tilde{W} = W \cup_{\varphi} B^{g+1} \times D^{3-g}$, $f: \tilde{W} \rightarrow S^4$: a map

以上のとき $f(W \cup B^{g+1} \times \partial D^{3-g})$ を $f(W)$ から

$f(B^{g+1} \times D^{3-g})$ (あるいは $f(B^{g+1} \times *)$ $*$ $\in \text{int } D^{3-g}$) に

沿って surgery を得られることをい、 $W \cup_{\varphi} B^{g+1} \times \partial D^{3-g}$ を

$f(W \cup_{\varphi} B^{g+1} \times \partial D^{3-g})$ の support と呼び、 $f(B^{g+1} \times *)$ をこの

surgery の core と呼ぶ。

定義 6 $W^3 \subset S^4$ を orientable 3次元多様体で、 $\partial W^3 \approx S^2$ とする。

次をみたすとき W を semi-unknotted of type 2 と呼ぶ:

$\exists \{d_i^2\}$: disjoint 2-disks in S^4

- s.t. $\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad d_i^2 \text{ は } W \text{ と transversal に交わり,} \\ \quad \quad \quad \partial d_i \subset \text{int } W \\ (2) \quad \{d_i\} \text{ を core として surgery にすると} \\ \quad \quad \quad W \text{ から } W' \text{ が得られ、} W' \text{ の support は 3-disk} \\ \quad \quad \quad (\{d_i^2\} \text{ を } W \text{ の trivial system と呼ぶ。}) \end{array} \right.$

Theorem 7 $K^2 \subset S^4$ が 条件 $(*)$ in Prop. 4 (ただし $n=2, p=2$)

をみたしているとする。このとき

$\exists W^3 \subset S^4$: semi-unknotted of type 2 s.t. $\partial W = K^2$

(証明は後で行う)

定義 8

(I) $\rho : D^3 \rightarrow S^4$ が次をみたすとき pseudo-ribbon map と呼ぶ

(1) $\rho|_{\partial D^3}$: embedding

(2) $\forall x \in D^3, \# \rho^{-1} \rho(x) \leq 2$

(3) $\# \rho^{-1} \rho(x) = 2$ ($x \in D^3$) のとき $\exists N_1, N_2$: nbd of x in D^3

s.t. $\left\{ \begin{array}{l} \rho|_{N_1}, \rho|_{N_2} : \text{embedding} \\ \rho(N_1), \rho(N_2) \text{ は transversal に交わる} \end{array} \right.$

(II) pseudo-ribbon map $\rho : D^3 \rightarrow S^4$ が次をみたすとき, type 2

と呼ばれる:

(4) $\{x \in D^3 \mid \# \rho^{-1} \rho(x) = 2\}$ の components を $T_1^+, \dots, T_1^-, \dots$

としたいを次にする:

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \quad T_i^{\pm} \approx S' \times D', \quad T_i^+ \subset D^3: \text{proper}, \quad T_i^- \subset \text{int } D^3 \\ (ii) \quad \rho|_{T_i^{\pm}}: \text{embedding}, \quad \rho^* \rho(T_i^+) = T_i^+ \cup T_i^- \\ (iii) \quad \bigcup_i T_i^+: \text{trivial in } D^3 - \bigcup_i T_i^- \end{array} \right.$$

ただし (iii) は次を意味する:

$$T_i^+ = S_i^1 \times D_i^1 \quad \text{と書くこと}$$

$$= \{ B_i^2 \times D_i^1 \} : \text{disjoint in } D^3 - \bigcup_i T_i^-$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \partial B_i^2 \times D_i^1 = T_i^+ \\ B_i^2 \times D_i^1 \cap \partial D^3 = B_i^2 \times \partial D_i^1 \end{cases}$$

以上の定義のもとで次が成り立つ:

Theorem 9 $W^3 \subset S^4$: semi-unknotted of type 2

ならば $\exists \rho: D^3 \rightarrow S^4$: pseudo-ribbon map of type 2

$$\text{s.t.} \quad \partial W^3 = \rho(\partial D^3)$$

Prop. 4, Th. 7, Th. 9 はいずれも逆が成り立つことは容易に確かめられる。

Corollary 10 2-knot K^2 に対し, $\rho(\partial D^3) = K^2$ とする

pseudo-ribbon map ρ が存在する。

< Theorem 7 の証明 >

Prop. 4 の条件 (*1) に $n=2$, $p=2$ とした記号を使用する。

$\alpha(h^r)$ で r -handle h^r の attaching sphere を表すとする。

今 $\alpha(h_1^3)$ と Δ^3 は transversal に交っているとしてよい。すると $\Delta^3 \cap \alpha(h_1^3) = \text{int } \Delta^3 \cap \alpha(h_1^3)$ は有限個の simple closed curves からなり、

$$\Delta^3 \cap \alpha(h_1^3) = \{C_1, \dots, C_\mu\} \quad C_j: \text{simple closed curve}$$

とおく。 $\alpha(h_1^3) \approx S^2$ であり各 C_j が $\alpha(h_1^3)$ に含まれていると見なし、 $\delta_j = 2\text{-disk in } \alpha(h_1^3)$ s.t. $\partial \delta_j = C_j$

を選んで、さきに

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\mu$$

の順序で innermost に並んでいるとしてよい、

$$\text{i.e., } \forall j \ (1 \leq j \leq \mu), \quad C_j \cap \delta_k = \emptyset \quad \text{if } k < j.$$

すると Δ^3 に対し δ_1 を core とする surgery を行うことにより W_1 が得られ、 δ_2 を core とする surgery を行い W_2 が得られ、以下このことをくり返すことにより

$$W_\mu \cap \alpha(h_1^3) = \emptyset, \quad \partial W_\mu = \partial \Delta^{n+1}$$

となる orientable 3-mfd が得られる。ここで W_μ を W と書くことにする。話を簡単にするため 2- 及び 3-handle は 1 個ずつである場合について議論する (一般の場合も全く同様である)。今までの話を正確に書くと次のようになる:

$$\exists f_i : \delta_i \times D^2 \longrightarrow \partial(D_0^5 \cup h_i^2) : \text{embedding}$$

$$\text{s.t.} \quad (1) \quad f_i(\delta_i \times *) = \delta_i \quad (* \in \text{int } D^2)$$

$$f_i(\delta_i \times D^2) \cap \alpha(h_i^3) = \delta_i$$

$$(2) \quad W_0 = \Delta^3$$

$$W_{i-1} \cap f_i(\delta_i \times D^2) = f_i(\partial \delta_i \times D^2)$$

W_i は W_{i-1} かつ δ_i を core とする surgery を加える

と仮定している。

2-handle h_i^2 は embedding $h_i^2 : B^2 \times D^3 \longrightarrow D_0^5 \cup h_i^2$ と見なし

てよい。 h_i^2, h_i^3 は complementary handles なの2次ガージ

$$\text{立つ:} \quad \exists g : D_0^5 \cup h_i^2 \longrightarrow D_0^5 \cup h_i^2 : \text{homeomorphism}$$

$$\exists D_0^2 \subset \partial D^3$$

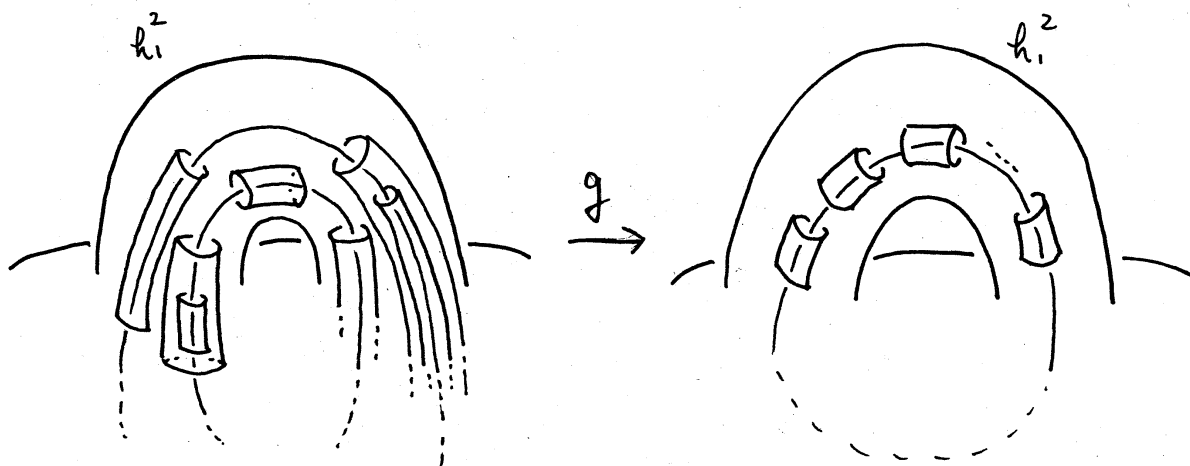
$$\exists B_1^2, \dots, B_m^2 \subset \text{int } B^2 : \text{disjoint}$$

such that

$$(1) \quad g f_i|_{\delta_i \times \partial D^2} = h_i^2|_{B_i^2 \times \partial D_0^2}$$

ただし $\delta_i \times \partial D^2$ と $B_i^2 \times \partial D_0^2$ を同一視する

$$(2) \quad h_i^2(B^2 \times *) \subset g\alpha(h_i^3) \quad (* \in \text{int } D_0^2)$$



$$\tilde{D}_0^2 = d(\partial D^3 - D_0^2),$$

$$\tilde{f}_i = g^{-1} \circ (h_i^2 | B_i^2 \times \tilde{D}_0^2)$$

$$\text{c} \text{ お } \text{c} \quad \tilde{f}_i : B_i^2 \times \tilde{D}_0^2 \rightarrow \partial(D_0^5 \cup h_i^2) - \alpha(h_i^3) : \text{embedding}$$

$$\text{s.t.} \quad \tilde{f}_i | B_i^2 \times \partial \tilde{D}_0^2 = f_i | \delta_i \times \partial D^2$$

$$\text{c} \text{ なる } = \text{ の } \text{c} \text{ かつ } W \text{ は } \{ \tilde{f}_i(z_i \times \partial \tilde{D}_0^2) \} \quad (z_i \in \text{int } B_i^2) \text{ を}$$

$$\text{trivial system} \text{ c} \text{ c} \text{ semi-unknotted of type 2} \text{ c} \text{ ある } = \text{ c} \text{ を}$$

示している。

< Theorem 9 の証明 >

$W^3 \subset S^4$ is semi-unknotted of type 2 c l t c , 定義より

次は容易:

Lemma 11

$$\exists \varphi_i : \partial B^2 \times D^2 \longrightarrow \text{int } D^3 : \text{disjoint embeddings}$$

$$\left(\tilde{W} = (D^3 - \bigcup_i \varphi_i(\partial B^2 \times D^2)) \bigcup_{\{\varphi_i\}} \bigcup_i (B^2 \times \partial D^2)_i \text{ c} \text{ お } \text{c} \right)$$

$$\exists f : \tilde{W} \longrightarrow S^4 : \text{embedding with } f(\tilde{W}) = W$$

$$\exists \bar{\varphi}_i : B^2 \times D^2 \longrightarrow S^4 : \text{disjoint embedding}$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} (1) \quad \bar{\varphi}_i(B^2 \times \partial D^2) = f((B^2 \times \partial D^2)_i) \\ \bar{\varphi}_i | \partial B^2 \times \partial D^2 = f \circ \varphi_i | \partial B^2 \times \partial D^2 \end{cases}$$

$$(2) \quad \bar{\varphi}_i(* \times D^2) \text{ is } W \text{ c transversal i.e. 交わる } (* \in \text{int } B)$$

$$= \text{c} \text{ } W \text{ の trivial system is } \{ \bar{\varphi}_i(* \times \partial D^2) \} \text{ c} \text{ ある。}$$

する $\sim$ pseudo-ribbon map $p: D^3 \rightarrow S^4$ で次を満たすものが自然に得られる:

$$p(D^3) = f(D^3 - \bigcup_i \varphi_i(\partial B^2 \times D^2)) \cup \bigcup_i \bar{\varphi}_i(\partial B^2 \times D^2).$$

== で p の self-intersection の部分を調べて見る。そのために次が必要となる (明らかなので証明は省略する):

Lemma 12 $D^3 - \bigcup_i \varphi_i(\partial B^2 \times D^2)$ は次の handle 分解をもつ:

$$\partial(\bigcup_i \varphi_i(\partial B^2 \times D^2)) \times I \cup (1\text{-handles}) \cup (2\text{-handles})$$

$$\begin{aligned} \text{仮定より} \quad & \partial(\bigcup_i \varphi_i(\partial B^2 \times D^2)) \times I \cap \bigcup_i \bar{\varphi}_i(\partial B^2 \times D^2) \\ &= (\partial(\bigcup_i \varphi_i(\partial B^2 \times D^2)) \cap \bigcup_i \bar{\varphi}_i(\partial B^2 \times D^2)) \times I \end{aligned}$$

と考える。すると general position の議論から

$$(\text{cores of 1-handles}) \cap \bigcup_i \bar{\varphi}_i(* \times D^2) = \emptyset \quad (* \in \text{int } B^2)$$

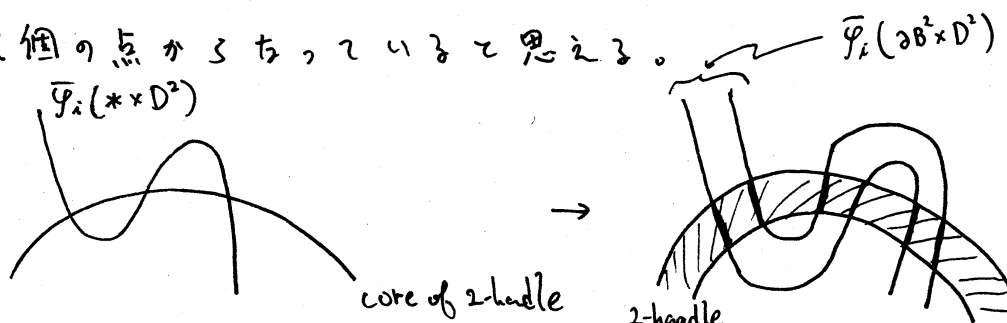
とわかる, つまり

$$(1\text{-handles}) \cap \bigcup_i \bar{\varphi}_i(\partial B^2 \times D^2) = \emptyset$$

としてもよい。一方

$$(\text{cores of 2-handle}) \cap \bigcup_i \bar{\varphi}_i(* \times D^2)$$

は有限個の点からなっていると思える。



以上のことから self-intersection

$$f(D^3 - \bigcup_i \varphi_i(\partial B^2 \times D^2)) \cap \bigcup_i \bar{\varphi}_i(\partial B^2 \times D^2)$$

をよく見ると定義 8-ii) を満たしていることは容易に確かめられる。

[Remark]

Prop. 4, Th. 7, Th. 9 は先に述べたように逆が成り立つことも証明でき、さらにもっと一般次元に拡張した形で述べることも可能である。

References

- [1] T. Matumoto: On a weakly unknotted 2-sphere in a simply-connected 4-manifold, Osaka J. Math. 21(1984) 489-492