

平面上の曲線と複素数の指導における Mathematica の活用例

日本大学・理工学部 青柳美輝 (Miki Aoyagi)
平田典子 (Noriko Hirata-Kohno)
山本修一 (Shuichi Yamamoto)
College of Science and Technology,
Nihon University

1 はじめに

(1) 共同研究の経緯とその継続

数学科教育法 I の教材研究の中で，プログラム言語 Visual C++により以下のような画像処理（図 1）を施したオーム貝を用いて対数螺旋の方程式を導いた ([9])．

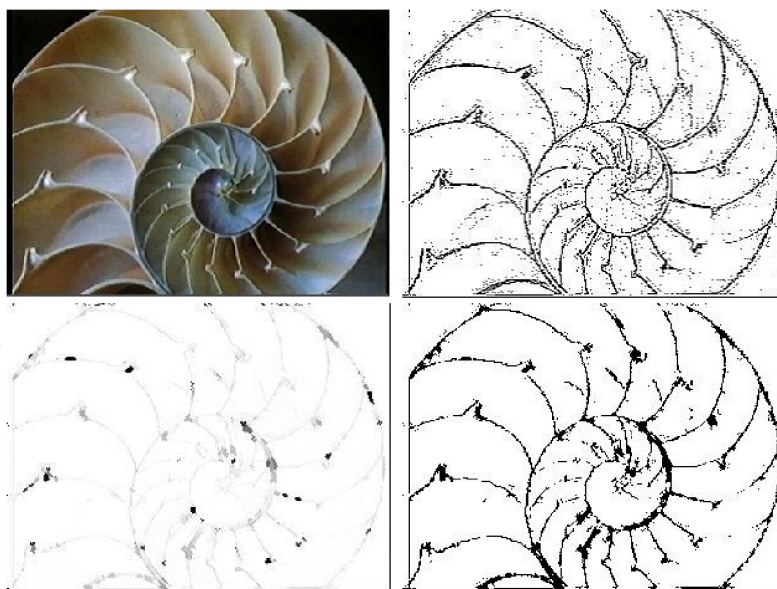


図 1 左上がオリジナル画像，右上がエッジ抽出，左下が雑音除去，右下が 2 値化

このとき，オーム貝から得られた対数螺旋の方程式は

$$x = e^{bt} \cos t, y = e^{bt} \sin t \quad \text{ただし, } b = \frac{1}{\tan 80^\circ} = 0.17 \dots$$

となる．

一方で，対数螺旋の「自己相似性」から生じる，回転しながら縮小していくように見える対数螺旋の動画（WikiPedia に掲載されている）を，オーム貝から得られた螺旋に適合させて Mathematica を用いて作成することができた（図 2）．このようなことが契

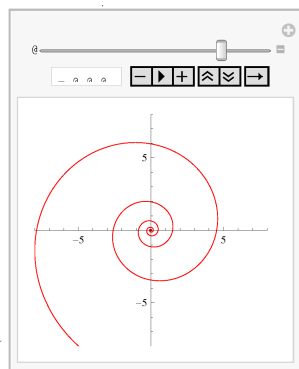


図2 対数螺旋の動画

機になり，以下の4つの教育的観点を目的に数学科教育法ⅠとⅢにおいて対数螺旋の授業を実施し，共同研究へと発展させて論文〔1〕を発表した．

a. 最新のコンピュータ技術に結び付けて数学を学ばせることで，数学が科学技術を支え相互にかかわっていることを教員を志望する学生に実感させる．

b. 万事にあまりにも感動がなさ過ぎる昨今の教育事情を危惧し，数学の学びに感動を取り入れる．純粋な感動は学ぶ楽しさを目覚めさせ，意欲を喚起し，数学のよさを実感させる原動力になる．

c. 動画を自ら作ることによって，数学科教育法の学習項目である教授法を，受講学生が主体的に身につけられるようにする．特に数式が秘める意味が明確になり，視覚的な関連付けも深まるため，当該教材を用いる意義がわかりやすい．

d. テクノロジーを活用する教育支援の有効性についても，多くの先行研究があるが，教員自身がその効果をより実感できるような教材構築とその実践に力点をおく．

この研究は，論文〔1〕にある学生アンケート調査の以下の問

問：平面上の曲線を扱うときは（学習指導要領解説・数学編・理数編でも推奨しているように）パソコンやソフトウェアなどを活用して学ぶまたは学ばせる方がわかりやすいと思いますか

に対する結果（表1）に見られるように，学生の平面上の曲線の学習に対するパソコン活用へ期待と，同論文の中で提起した課題「高校数学の新カリキュラムで扱われる複素数の指導における動画の意義」に基づく研究として継続している．

表1（平面上の曲線を学ぶときのパソコン活用の有効性）

問の回答の選択肢	回答数
非常にそう思う	26
そう思う	31
ふつう	10
あまり思わない	1
全く思わない	1
無回答	1

(2) 報告する研究の内容と意義

高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編 ([8]) の第3節、数学III の内容と内容の取扱いの中で平面曲線を指導するときに、描写においてコンピュータなどの積極的な活用が推奨されている。例えば、「媒介変数による表示は有用であり、そのよさの理解を深めるためにコンピュータなど活用して曲線をかき、それを観察する」。また、「コンピュータなどを用いて極方程式で表された曲線をかき、曲線と極方程式の関係を理解させる」とあり、我々の研究の意義を見出すことができる。

この論文では、上の学習指導要領解説 ([8]) の指導に準じて、数学ソフトウェア Mathematica の活用例について述べる。特に、曲線の描画に活用するだけでなく、最近の数学ソフトウェアの象徴ともいえる動画を活用する。

平成 25 年度、数学科教育法 II において、次の内容で動画を活用する授業を展開した。

- (1) 双曲線の漸近線 (漸近線を直観的に理解させるための動画)
- (2) 複素数の指導 (複素数の図的表象の定着化を促すために複素数の積の幾何学的意味を視覚的に理解させる動画)
- (3) 対数螺旋の性質と複素数の活用 (自己相似を観察する動画)

動画の活用によって、視覚的な関連付けによる学習効果だけでなく、動画作成を通して主体的な学びによる効果も期待できる ([1])。

上の事例と授業後に実施した学生アンケート調査の結果について述べ、平成 24 年度に実施した学生アンケート調査の結果 ([1]) と照合しながら、教員を目指す学生の観点から動画活用の有効性について論じる。

2 双曲線の漸近線

学習指導要領解説 ([8]) によれば、平面上の曲線は、「描写においてはコンピューターなど積極的に活用するものとする」と指導される单元である。また、具体的に、双曲線

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

の指導において、漸近線の存在やその方程式を導く際には、直感的に理解させるようにする。例えば、「双曲線がその中心から遠ざかるにつれて、次第に一定の直線に接近していく様子をコンピュータなどを用いて確認させることが考えられる」と記されている。

この趣旨に沿って、授業では、媒介変数表示や極方程式で表される曲線をコンピュータを積極的に活用する工夫を施した。媒介変数表示された楕円や双曲線を ParametricPlot 関数を用いて描かせ、PolarPlot 関数で円や螺旋を描かせた。

特に、Manipulate を用いて上の双曲線の式の値 a や b を変化させると、そのグラフの形状の変化が観察できるようにした動画 (図3) と漸近線の理解を促すために、 $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ のグラフは x の値が大きくなると次第に一定の直線 $y = \frac{b}{a}x$ のグラフに接近していく様子を直感的にわからせるような動画 (図4) を授業に取り入れた。

漸近線に関する動画は区間 $[0, m]$ に $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ と $y = \frac{b}{a}x$ の両方のグラフを描くようにしておき、動画画面のスライダーで、 a, b の値を任意に定めることができ、 m の

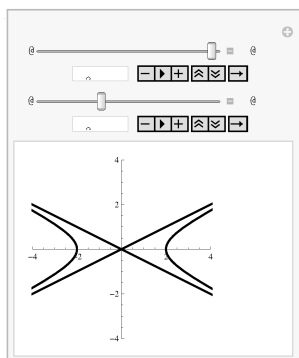


図3 双曲線の形状を示す動画

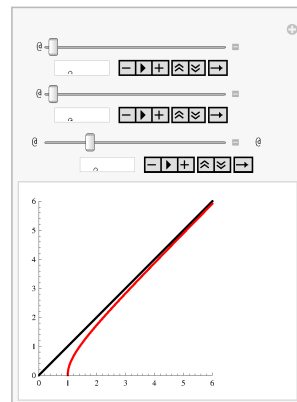


図4 漸近線の存在を確認させる動画

値を変化させて区間の幅を変えるようにした。この動画では、スライダーで m の値を大きくしていくと2つのグラフは次第に接近しながら伸びていく様子が確認される。

最初に授業を設計する段階で、「次第に接近していく様子をコンピュータなどを活用して確認させる」とあったので少し戸惑った。2つのグラフを描いてそれを示す図であれば教科書にも描かれている。最新の数学ソフトウェアの進歩に脱帽せざるを得ない。

3 複素数の指導

学習指導要領解説 ([8]) の第 III 節の複素数平面の複素数の図表示の部分に、「複素数の極形式を導き、二つの複素数の積、商が

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

で与えられることを、三角関数の加法定理を用いて導き、複素数の積、商の幾何学的な意味を理解させる。特に、 z に i をかけることは、点 z を原点のまわりに 90° 回転させることになることを理解させる」とあり、また、「ド・モアブルの定理

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

を導く。..... これらの扱いを通して、複素数の諸演算が平面上の図形の移動などと関連付けられることを認識させるとともに、極形式による表現のよさを理解させる」とある。このことは複素数の図的表象の定着化を意図していると考えられる。

しかし黒板とチョークを用いた授業において、これを教授するのは簡単とは言えない。実際に大学初年次の授業を担当していても、点の回転移動が数式によって導かれることを感得させるのは非常に難しい。そこで、回転移動に興味を持たせることから始めた。授業では、Mathematica を活用して点移動が数式で表現されることを実感させ、数学の有用性を喚起させるように設計した。そのために、円の媒介変数表示を利用して円を描かせるだけでなく、点が円周にそって反時計回りに動く動画 (図5) を作らせた。

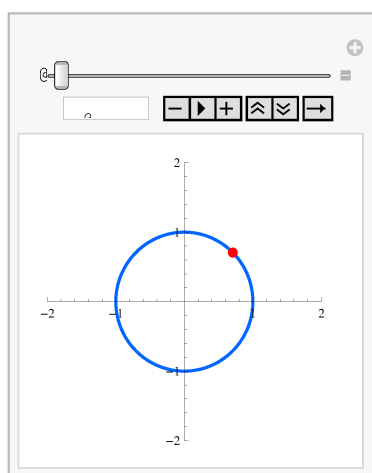


図5 円周上で点移動を示す動画

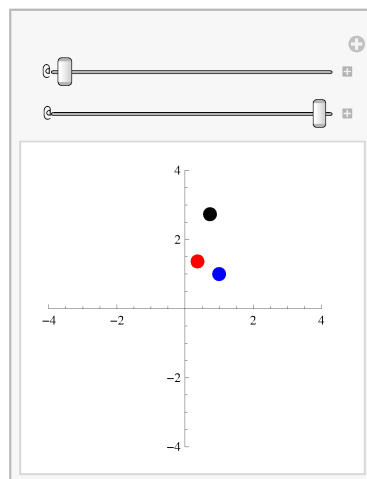


図6 複素数の積による移動の動画

媒介変数 t を用いた座標 $(\cos(\frac{\pi}{4}+t), \sin(\frac{\pi}{4}+t))$ に対して, t を 0 から 2π まで動かすような簡単な動画であるが, スライダーを移動させると点が円周上を回転する. このような動きも, 数式や媒介変数表示を活用して実現できることを実感させるためである.

また, 複素数の積と点移動を理解させるために動画(図6)を作成させた. 動画を作成する過程で, タイピングの操作を通して複素数の絶対値や偏角の役割を学ばせ, その後動画の動きを見てその役割を確認させるようにした. すなわち,

$z_1 = a + ib, z_2 = A + iB$ のとき, $z_1 z_2 = (aA - bB) + i(aB + bA)$ となるが, この事実を z_1 に対し z_1 を絶対値 $|z_2|$ (この値は Mathematica では `Abs[A+B*I]` で表される) 倍し, さらに, 偏角 $\arg(A + iB)$ (Mathematica では `Arg[A+B*I]` で表される) だけ半時計回りに回転させて積 $z_1 z_2$ が得られるような動画 `G[a,b,A,B]` を作成させた.

作成した動画では, z_1 を青色の点で, $z_1 z_2$ を黒色の点で表し, 赤色の点で複素数 $r(\cos t + i \sin t)$ を表し, 絶対値 r を $r: \text{Abs}[a+b*I] \rightarrow \text{Abs}[a+b*I] * \text{Abs}[A+B*I]$ だけ, 偏角 t を $t: \text{Arg}[a+b*I] \rightarrow \text{Arg}[a+b*I] + \text{Arg}[A+B*I]$ だけ変化させるようにした. 動画(図6)の上部にあるスライダーを動かせば, r の動きが, 下部にあるスライダーを動かせば t の動きが対応するようになっている. 授業では $z_1 = i, z_2 = 1 + i$ とする場合などいくつかイメージしやすい場合を観察させた. 図6は $z_1 = 1 + i, z_2 = \sqrt{3} + i$ の場合で, 偏角 t だけを $\frac{\pi}{6}$ だけ移動させたときの画面である.

複素数の図的表象の定着化を図るには動画を活用して視覚的に理解させることは有力な1つの方法であると考えている.

4 対数螺旋の性質と複素数の活用

縮小する対数螺旋が回転するように見える不思議さを解明し, 性質「自己相似」を理解することが授業の趣旨であるが, 対数螺旋を数学科教育法で扱う意義は論文([1])で述べられている. ここでは, 複素数を活用した対数螺旋の考察を通して, 高等学校で学ぶ複素数との関わりを明らかにし, 授業で作成させた動画について述べる.

対数螺旋は以下の媒介変数表示で定義される.

$$x = ae^{bt} \cos t, y = ae^{bt} \sin t (-\infty < t < \infty)$$

ただし, $a > 0$ で $b = \frac{1}{\tan \alpha}$ ($0 < \alpha < 90^\circ$). ここでは, 対数螺旋を複素平面上で考察し, 複素数を活用する意義を明らかにするために, オイラーの式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

を用いる. 高校数学ではオイラーの式を扱わないが, 複素数を活用する場合は非常に重要である. 授業の対象者は教員を目指す学生であることを考慮してその利便性についても認識させるようにした.

$a = e^m$ ($m = \log a$), $k = m/b$ ($b = 1/(\tan 80^\circ)$) とおくと, 対数螺旋は複素平面上で

$$x + iy = ae^{bt} \cos t + iae^{bt} \sin t = ae^{bt} e^{it} = e^{bk} e^{bt} e^{it}$$

と定義される. すなわち

$$x + iy = e^{bk} e^{bt} e^{it} (-2\pi \leq t \leq 2\pi) \quad (1)$$

のように表現して複素平面上で対数螺旋を考察する. ここで, $x + iy = e^{b(t+k)} e^{it}$ となるので, $s = t + k$ とおくと, 表示 (1) は $x + iy = e^{bs} e^{i(s-k)} (-2\pi + k \leq s \leq 2\pi + k)$ と表される. ここで媒介変数 s の範囲を $-2\pi \leq s \leq 2\pi$ に置き変えて,

$$x + iy = e^{bs} e^{i(s-k)} (-2\pi \leq s \leq 2\pi) \quad (2)$$

と表示される対数螺旋を考える. $k = 0$ のときは (1) と (2) は同じ曲線表現する.

(1) と (2) で表現される曲線に対して, k を 0 から -2π まで動かしたときの状況を考える. k ($k < 0$) の値をより小さくすると, $k = 0$ のとき表現される曲線 (螺旋の一部) は, 表現 (1) では値 e^{bk} は小さくなるのでこの曲線は縮小する.

一方, 表現 (2) での動きを調べるために, オイラーの式を用いた公式

$$e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = e^{i\theta_1} e^{i\theta_2}$$

を利用して考察する. この式は複素数の極形式で表現すれば三角関数の加法定理に対応するものでありかつまた指数法則を表現するものである. しかし, 高校ではオイラーの式を扱わないので, この公式は高校では扱わない.

この公式から $e^{i(s-k)} = e^{is} e^{i(-k)}$ と計算され, $e^{i(-k)}$ をかけることに帰着し, この曲線は時計回りに回転する. このように k ($k < 0$) の値を小さくすると表示 (1) と (2) に応じて 2 つの動きが生じる.

これを視覚的に理解させるために, 表現 (1) が表す螺旋を $G[k]$ (ここでは点線で表されるようにした) とし, 表現 (2) が表す螺旋を $L[k]$ (ここでは実線で表示するようにした) として作らせ, k を小さくするとき, この 2 つの螺旋の挙動が 1 つの画面で同時に見られる動画 (図 7) を自ら作成させて観察するように指導した.

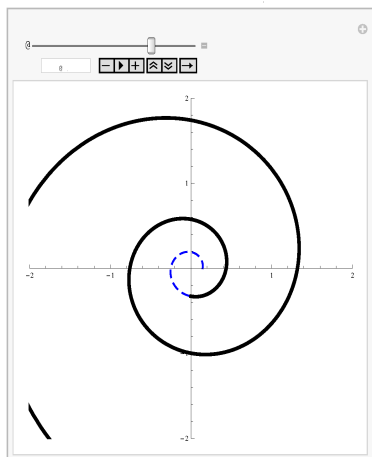


図7 2つの動きを同時に見る

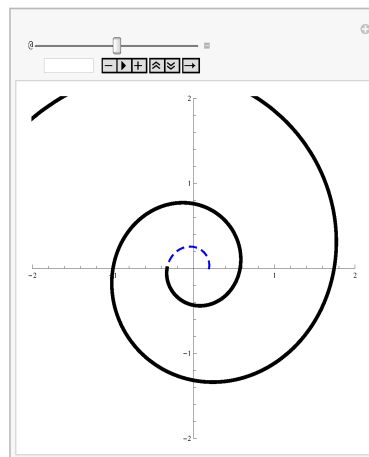


図8 自己相似を理解するための動画

動画（図7）の画面で k を 0 から -2π へ、プラスキーを用いて $-\frac{\pi}{2}$ ずつ小さくして観察する。このとき、 $a = e^{kb}$ も小さくなるので、 $G[k]$ で表される螺旋は縮小される。一方、 $L[k]$ で表される螺旋は $\frac{\pi}{2}$ ラジアンずつ反時計まわりに回転する。しかし縮小する螺旋（点線）と回転する螺旋（実線）はいつも重なり合って動き、はみ出すことがない。図7の表示画面は $k = -\frac{3\pi}{2}$ まで動かしたときの2つの螺旋の位置関係である。

次に、上の動画で $G[k]$ の k の値を $k = N$ ($-2\pi \leq N \leq 0$) と固定するようにして動画（図8）を観察する。すでに縮小した螺旋 $G[N]$ （点線）が表示されていて $L[k]$ で k の値を 0 から N まで小さくする、 $L[k]$ で表される螺旋（実線）が反時計回りに回転して、表示されている螺旋 $G[N]$ に重なることがわかる。図8は、 $N = -\pi$ のときで、 k の値が $k = -\pi$ まで小さくしたときの、螺旋の重なりを示したものである。

5 学生アンケートの結果と授業の検証

ここでは、数学科教育法 II の授業形態と実施したアンケート調査の項目を述べて、その結果に基づいて動画を活用した授業を検証する。

受講者は教員を志望する学生でほとんどが理工学部数学科の3年生である。

授業は普通の講義教室で行われ、学生は大学で貸与されているノートパソコンを持参する。そのパソコンに Mathematica がインストールされている。

パソコンを活用する授業なので、授業で活用する動画作成のプログラムが記載される資料（プリント）を授業ごとに配布している。そのプログラムや動画の作成の結果など、必要と思われる画面は教員のパソコンからプロジェクターによって教室の前面に設置できるスクリーンに投影させて指導している。また、動画作成だけに終始しないように、学習する要点を明瞭にするためにその内容を問の形式にし、出席とアンケート用紙として同時に配布し毎回回収している。その中に今回調査したアンケート項目も併記されている。

（1）アンケート結果1（受講者 61 名）

平面上の曲線について授業を行ったときの、双曲線の漸近線について動画（図4）を提示した場合の評価である。

問1 $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ のグラフは x の値を大きくすると次第に一定の直線（漸近線）に近づくことを理解させるのに、動画（図4）は効果があると思いますか

下の表2はパソコンを持参した60名に対する回答の結果である。

表2 漸近線に対するアニメーションの効果

問1の回答の選択肢	回答数
非常にそう思う	17
そう思う	34
ふつう	7
あまり思わない	2
全く思わない	0
無回答	0

表2をみる限り、ほとんどの学生が肯定的な効果を与えている。この動画を提供するときに、こんなことで本当に理解が進むのか議論があったが、昨今の学生にはインパクトを与えたようである。

アンケート結果2（受講者59名）

ここでは、複素数の指導における複素数の積と点移動に関する動画について調査した。

問2 配布プリントの3.の(3)にある動画（図6）はできましたか

問3 上の問2で、「できた」と回答した人は、複素数の積が表す図形的な意味の理解のために動画を自分で作成したことは役に立ったと思いますか

表3 動画の出来具合

問2の回答の選択肢	回答数
できた	50
途中まで	6
できなかった	3

表4 動画を作成した効果について

問3の回答の選択肢	回答数
非常に役に立った	15
かなり役に立った	17
ふつう	12
あまり役に立たなかった	3
全く役に立たなかった	0
無回答	3

表3、4によれば、複雑そうな動画であったが、6分の5の学生はその作成に成功し、「できた」と回答した学生50名の内32名は自ら動画を作成したことによる効果を感じている。この結果から、すぐに複素数の積に関する問題が解ける保証まではできないが、多くの学生に複素数の図的表象の定着化を促進させ、複素数に i をかけると複素数が 90° だけ反時計まわり回転させた位置にくることを感得させたと思っている。

アンケート結果3（受講者60名）

ここでのアンケート調査は対数螺旋の動画作成の授業のときの結果である。ただし、平成24年度の結果は、平成24年度の授業で実施したときの結果（[1]）である。

平成25年度の調査学生は、平成24年度に数学科教育法Iで対数螺旋に関する講義を受け（そのとき、教員のパソコンを通して図1や動画（図2）は見ている）、翌年に

数学科教育法 II で 2 節, 3 節にあるような平面上の曲線, 複素数の指導を受け, 続いて 4 節の内容を授業「対数螺旋とその性質」として受けた. 一方, 平成 24 年度の調査学生は, その年度に数学科教育法 III の授業「曲線の描き方」で 4 節で扱ったいくつかの動画を自ら作成した. このように調査学生の受講の仕方について違いがある.

問 4 配布プリントの 1 ページにある動画 (図 2) ができましたか

上の問 4 で「できた」と回答した学生は受講者 60 名の内 55 名 (昨年は受講者 70 名の内 54 名) であった. 平成 24 年度の学生と比べて, 平成 25 年度の学生の成功率は非常に高い. この結果を, 動画作成に対する「慣れ」もあるが, 前年度に対数螺旋のおもしろさを学びこの動画に対するモチベーションが高くなっていたためと分析したい.

問 5 上の問 4 で「できた」と回答した人は, 動画を見て「おもしろい」, 「すごい」など, 感動しましたか

表 5 感動のレベル (H25)

問 5 の回答の選択肢	回答数
非常に感動した	17
感動した	30
ふつう	8
感動しなかった	0
全く感動しなかった	0

表 6 感動のレベル (H24)

問 5 の回答の選択肢	回答数
非常に感動した	26
感動した	27
ふつう	1
感動しなかった	0
全く感動しなかった	0

表 5 と表 6 から, 平成 24 年度の調査学生の動画作成成功者のほぼ半数が「非常に感動した」と回答し, ほぼ全員が「感動」したことがわかる. しかし, 平成 25 年度調査学生の場合は少し状況が異なる.

この理由として, 平成 24 年度の調査学生は初めてこのような動画に接した新鮮さ, またそれを作り上げた達成感が表現されているのに対し, 平成 25 年度の調査学生は, 動画そのものよりも, 次の表 7 以下が示すように, 動画が表現する不思議さに高いモチベーションを感じたためではないだろうか. しかし, 年度を問わず, 動画を作成したことで, 多くの学生が「感動」したことに間違いはない.

以下は, 受講生 60 名 (平成 24 年度は 70 名) に対する問と結果である.

問 6 配布プリント 2 ページに記されている対数螺旋の性質『自己相似』についてわかりましたか

表 7 自己相似の理解 (H25)

問 6 の回答の選択肢	回答数
よくわかった	31
かなりよくわかった	12
ふつう	16
よくわからなかった	1
全くわからなかった	0
無回答	0

表 8 自己相似の理解 (H24)

問 6 の回答の選択肢	回答数
よくわかった	20
かなりよくわかった	9
ふつう	36
よくわからなかった	4
全くわからなかった	0
無回答	1

問7 最初に作成した動画（図2）は、対数螺旋の性質『自己相似』によるものであることが理解できましたか

表9 動画の理由（H25）

問7の回答の選択肢	回答数
よくわかった	27
かなりよくわかった	18
ふつう	14
よくわからなかった	1
全くわからなかった	0
無回答	0

表10 動画の理由（H24）

問7の回答の選択肢	回答数
よくわかった	22
かなりよくわかった	17
ふつう	25
よくわからなかった	5
全くわからなかった	0
無回答	1

表7, 8, 9, 10 から、平成25年度の調査学生の方が対数螺旋の自己相似や動画の理由について理解を深めたことがわかる。特に、表5, 7, 9 からは、動画の作成に感動した学生が対数螺旋の性質の理解を深めた傾向が読み取れる。

一方、平成24度の調査学生の場合は、「非常に感動した」学生だけに上のような傾向があると考えるべきかも知れない。しかし、論文〔1〕によると、「ふつう」以上の評価をした学生65名の内、43名が動画による視覚的な支援の効果を積極的に認めている。

いずれにせよ「よくわかった」、「かなりよくわかった」と回答した学生の割合はかなり高いし、上の考察は、動画を教育支援の一環と位置付けて活用すれば学習効果が上がることを示す。また、対数螺旋の「自己相似」を数式の展開だけで理解できる学生は限られるし、それにむけて取り組もうとしない学生もいる。しかし、動画を自ら作成するという効果によって、多くの学生にこのようなおもしろい性質を学ばせることができた。

6 まとめ

最新の数学ソフトウェアの進化は著しい。つい最近まではグラフが正確にきれいに描けることに感銘していたが、今は動画にとって変わろうとしている。数学教育におけるITC活用というと動画の活用という時代はそう遠くはないと考えている。

数学ソフトウェアの活用によって、少なくとも数式だけの考察では本来難しかったことが用意に理解できるようになる。例えば、ここで取り上げた対数螺旋の性質は、今回のアンケート調査の結果が示すように動画を活用すれば、より多くの人に理解させることができる。

また、今回実施したように、複素数の積を数学ソフトウェアがもたらす「動き」と関連付けることで、表4が示すように、従来の教育では達成できなかった新しいイメージ造りが可能になり複素数の図的表象の定着化に貢献した。

数学教育において、教育支援として動画をうまく使えば、一部の生徒、学生にしか理解されなかった数学が多くの生徒にも理解されることが期待できる。

さらに、スマートフォンやゲームに夢中になって育った生徒には、伝統的な教授法で育った自分たちには計り知れない能力が育成されていると思われる。動画の作成にモチ

ベーションを感じることも事態がその証拠ではないだろうか。

教員を目指す学生にも、このことをしっかり肝に銘じてもらい、「問題の解法」を重視する教授法から「数学のよさ」を教える新しい教授法へと少しずつ変貌してほしい。

また、伝統的な教育法の基礎を修得することはもちろんで重要であるが、新しい時代を生きようとする生徒に、時代の進化を見据えた教育も忘れてはならない。

我々が目的とした教育的観点からも、数学科教育法において、教員を目指す学生に、パソコンや数学ソフトウェアを活用することで、数学科で学ぶ「数学のよさ」とは異なる「数学のよさ」（例えば、数学が科学技術を支え相互にかかわっていることや、視覚的理解からわかる数学の有用性）を自ら実感してもらい、時代の進化を象徴する動画などに関わりを持たせて、自主的に学ぶ体験をさせることは重要であると考えている。

参考文献

- [1] 青柳美紀, 平田典子, 山本修一, 数学科教育法の授業における動的画像導入に関する考察～画像処理と Mathematica の活用による学習効果創出～, 日本大学理工学部一般教育教室彙報, 第 95 号, 21-30, 2013.
- [2] 太田 敏之, 数学的モデリングを取り入れた指導法とその教材:「渦巻」を題材にした教材の提案, 日本数学教育学会誌臨時増刊, 総会特集号, 86, 448, 2004-08-04.
- [3] 剣持 信幸, モデル化学習に期待する教育的効果, 2007 年度 数学教育学会誌臨時増刊, 数学教育学会秋季例会発表論文集, 136-138, 2007.
- [4] 佐伯昭彦, 磯田正美, 清水克彦: テクノロジーを活用した新しい数学教育, 明治図書, 1997.
- [5] 日本 Mathematica ユーザー会, 入門 Mathematica, 東京電機大学出版局, 2009.
- [6] 平野 葉一, 後藤 佳弘, 道具や実験を用いた授業に関する一考察, 数学教育学会誌臨時増刊, 2012 年度 数学教育学会秋季例会発表論文集, 28-30, 2012.
- [7] 文部科学省, 中学校学習指導要領解説 数学編 教育出版 (初版), 2008.
- [8] 文部科学省, 高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編, 実教出版 (第 2 版), 2010.
- [9] Visual C++ の勉強部屋, <http://homepage3.nifty.com/ishidate/vcpp.htm>