

ワイエルシュトラッスの 関数の満たす関数方程式.

京大理 山口 昌哉

京大理 畑 政義

1875年にワイエルシュトラッスが発見した、列るとは
3微分が不可能な連続関数:

$$W(a, b; x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

について、簡単のために $b=2$ の場合を考えてみよう。一般
の a, b (實の定数) について $ab \geq 1$ の場合にはこの関
数は $[0, 1]$ で連続だと列るとは有限回微分可能をもたない
ことが $0 < a < 1$ の仮定のもとに G. H. Hardy によって
証明されている。 $b=2$ の場合には $\frac{1}{2} \leq a < 1$ であるような
 a についてこの条件は満たされている。

一方 $\varphi(x) = 2x$ ($0 \leq x \leq \frac{1}{2}$) , $\varphi(x) = 2(1-x)$ ($\frac{1}{2} \leq x \leq 1$)
として $[0, 1]$ 区間の連続関数を定義しておけば、上の関数は

次の (1) と同じものとなる。

$$(1) \quad F(a, x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(\pi \varphi^n(x))$$

ここで $\varphi^n(x) = \varphi(\varphi(\cdots))$ つまり φ の n 回繰返しし代入であり、 $n=0$ では、 $\varphi^0(x) = x$ としておこう。このように書いて見れば、この F は、次のような簡単な関数方程式をみたすことは見易い。

$$(2) \quad F(a, x) = a F(a, \varphi(x)) + \cos \pi x$$

$\varphi = \varphi^n$ の n を一般化して、

$$(3) \quad F(a, x) = a F(a, \varphi(x)) + g(x)$$

ただし $g(x)$ は有界な関数としておけば、この方程式の解は

$$(4) \quad F(a, x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n g(\varphi^n(x))$$

とかけ、少し一般的な関数を与えらる。 $g \equiv \cos(\pi x)$ とすれば、上のワイルトに一致するが、 $g(x) = x$ とし更に $F(a, x) - x = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \varphi^n(x)$ とおくと、 $a = \frac{1}{2}$ のとき、高木貞治が 1903 年に発見した簡単な一カシ。

ワイエルシュトラースの関数と同じ関数的性質をもつものとなる。非常に人工的ではあるが、(3)は次のような初期値問題といえる。

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} \{ a F(a, \varphi(x)) \} \\ F(0, x) = g(x). \end{cases} \quad 0 \leq a < 1.$$

初期関数 $g(x)$ と 1 2 滑らかな関数をもつとき、 a がある値 (上の例では $a = \frac{1}{2}$) をとるとき、解 $F(a, x)$ は x に関し連続で且つ微分可能となる。

$\varphi(x)$ の代わりに $\psi(x) = 2x$ ($0 \leq x \leq \frac{1}{2}$), $\psi(x) = (\frac{1}{2} \leq x \leq 1)$ を用いても同様である。今 (3) にあいて、 $a = \frac{1}{2}$ とおき $g(x) = \frac{\varphi(x)}{2}$ とおくと高木関数がこれになるが、De Rahm は 1957 年に次のような関数方程式の解を考えた。ただし α は $0 < \alpha < 1$ とする。

$$(6) \quad \begin{cases} F(x) = \alpha F(2x) & (0 \leq x \leq \frac{1}{2}) \\ F(x) = (1-\alpha) F(2x-1) + \alpha & (\frac{1}{2} \leq x \leq 1) \end{cases}$$

この書き方でかいたのは、高木関数の方程式は、 $T(x)$ とする

と、

$$(7) \quad \begin{cases} T(x) = \frac{1}{2} T(2x) + x \\ T(x) = \frac{1}{2} T(2(1-x)) + 1-x \end{cases}$$

(6) の解を $M_\alpha(x)$ と書くことにするが、これは有名なルベグの特異関数であって、ほとんど到る $x=3$. 導関数は、
 で且つ狭い意味の単調増加関数である。と $x=3$ が面白いのは
 この二つの関数 $M_\alpha(x)$ と $T(x)$ とがきつい関係が結ばれて
 いることである。その関係は次の (8) である：

$$(8) \quad \left. \frac{\partial M_\alpha(x)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\frac{1}{2}} = 2T(x)$$

この関係をみちびくためには、 $M_\alpha(x)$ は

$$(9) \quad M_\alpha\left(\frac{2^{i+1}}{2^{k+1}}\right) = (1-\alpha)M_\alpha\left(\frac{i}{2^k}\right) + \alpha M_\alpha\left(\frac{i+1}{2^k}\right) \\ 0 \leq i \leq 2^k - 1, \quad k=1, 2, \dots$$

$T(x)$ は

$$(10) \quad T\left(\frac{2^{i+1}}{2^{k+1}}\right) = \frac{1}{2}T\left(\frac{i}{2^k}\right) + \frac{1}{2}T\left(\frac{i+1}{2^k}\right) + \frac{1}{2^{k+1}} \\ 0 \leq i \leq 2^k - 1, \quad k=1, 2, \dots$$

という、それぞれ差分方程式の無限系列をみたす。この事実
 から上の (8) が示される。

以上