

氏 名	わた なべ ただ ゆき 渡 邊 忠 之
学位(専攻分野)	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	理 博 第 3106 号
学位授与の日付	平 成 19 年 3 月 23 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研 究 科 ・ 専 攻	理 学 研 究 科 数 学 ・ 数 理 解 析 専 攻
学 位 論 文 題 目	Configuration space integral for long n -knots and the Alexander polynomial (長 n 次元結び目の配置空間積分とアレクサンダー多項式)
論文調査委員	(主 査) 助教授 大 槻 知 忠 教 授 藤 重 悟 教 授 齋 藤 恭 司

論 文 内 容 の 要 旨

1 次元結び目 (3 次元ユークリッド空間に埋め込まれた円周) の量子不変量は Chern-Simons 経路積分で表示され、これを摂動展開したときの各項は配置空間積分で表示される。ここで、配置空間とは、結び目上のいくつかの点と結び目が埋め込まれている空間のいくつかの点 (互いに異なる点を考える) の配置の全体からなる空間である。配置の 2 点を指定するごとにその 2 点が定める単位方向ベクトルを対応させる Gauss 写像 (配置空間から球面への写像) が定まり、Gauss 写像で球面の体積形式を引き戻したものを適切な方法でいくつか選んで外積をとって積分したものが配置空間積分である。このような配置空間積分による不変量は 1 次元結び目の有限型不変量であることが知られている。

配置空間積分による不変量の構成は、Bott, Cattaneo-Rossi により、 n 次元結び目の不変量 (BCR 不変量) に最近拡張された。ここで、 n 次元結び目とは $(n+2)$ 次元球面に埋め込まれた n 次元球面のことで、とくに配置空間積分を定式化するときには基点付きのものを考える。すなわち、基点を無限遠にとると、これは、 $(n+2)$ 次元ユークリッド空間に埋め込まれた n 次元ユークリッド空間で無限遠の近傍では自明な埋め込みになっているようなものを意味し、これを n 次元長結び目という。BCR 不変量は n 次元長結び目のイソトピー不変量である。また、有限型不変量の概念は、Habiro-Kanenobu-Shima により、高次元のリボン結び目に対する概念に拡張されている。ここで、 n 次元リボン結び目とは、適切にイソトピーで変形したときに $(n+1)$ 次元ユークリッド空間に射影したときの特異点が横断的 2 重点のみになるような結び目である。

申請者渡邊忠之氏の学位論文の主定理は、次数 d の BCR 不変量のリボン結び目への制限が次数 d の有限型不変量であることを示し、その有限型不変量の主要項を具体的に表示するものである。Habiro-Shima により、リボン結び目の有限型不変量は Alexander 多項式をもちいて表示されることが知られているので、主定理の系として、BCR 不変量のリボン結び目への制限は Alexander 多項式をもちいて表示されることが示される。また、主要項の非自明性より、BCR 不変量が非自明であることも、主定理より示される。

主定理の証明は、BCR 不変量が有限型不変量の定義をみたすことを示すことによりなされる。すなわち、 n 次元リボン結び目を $(n+1)$ 次元ユークリッド空間に射影したときに現れる特異点集合のうち互いに分離している $(d+1)$ 個の部分集合にそっていずれかの成分を $(n+2)$ 次元ユークリッド空間におしこむことにより 2^{d+1} 個のリボン結び目をつくり、これらのリボン結び目に対する BCR 不変量の値の交代和が 0 に等しいことを示せばよい。結び目をイソトピーで変形して交代和をとる特異点集合を $(d+1)$ 個の ε 球体の中に入れてから配置空間積分を実行すると、配置の点が高々 1 個しかはいらない ε 球体があるような配置からなる部分空間での配置空間積分は ε のオーダーであることがわかる。このことより、交代和が 0 ではない値をとるためには各 ε 球体に配置の点の少なくとも 2 点以上がはいるような配置がなければならないことがわかり、このとき、配置の点は $2d$ 個以上ある、すなわち、BCR 不変量の次数が d より大きいことがわかる。そのようにして申請者は主定理を証明している。

論文審査の結果の要旨

1次元結び目の不変量について、Chern-Simons 経路積分を摂動展開した全項は Kontsevich 不変量を表し、その各係数が配置空間積分による不変量で表示される。すなわち、すべての有限型不変量は配置空間積分による不変量で表示することが可能で、また、配置空間積分による不変量をすべて集めてできる不変量はすべての結び目を分類することが期待されるくらいに強力な不変量である。一方、2次元以上の結び目の不変量について、「古典的」な不変量以外の不変量はあまり知られていない。ここで、古典的な不変量とは、結び目補空間の基本群や、結び目補空間の被覆空間のホモロジー群や、それらに由来する Alexander 多項式である。また、一般の次元のリボン結び目の有限型不変量は定式化されているが、それらは Alexander 多項式をもちいて表示されることが知られている。また、2次元結び目については、カンドルコサイクル不変量が近年定義されて研究されつつあるが、この不変量は「結び目補空間の基本群から有限群への表現の個数」を精密化したもので、ある種の分類空間をもちいて記述が可能であり、その意味では古典的な不変量に近い。

申請者の学位論文の研究の動機は、配置空間積分によって2次元以上の結び目の新しいタイプの不変量（いわゆる「量子トポロジー」を背景にもつような不変量）を構成したい、ということであった。実際、申請者は独力で1次元結び目の場合の配置空間積分による構成法を高次元化して配置空間積分による高次元結び目の不変量を得たのであるが、Cattaneo-Rossi がその1、2年前にすでにこの結果を得ていたことが後になってわかった（とくに、次数が2の場合は Bott による）。ただ、Cattaneo-Rossi の研究は主に数理物理的観点からなされていて、構成した不変量が不変量としてどのようなものであるのかといったこと（たとえば、非自明性）は考察されておらず、一方、申請者はリボン結び目についてこの不変量がどういう値を与えるのかといったところまで調べており、その部分が「申請者の結果」となることになった。申請者の学位論文では、本文で主定理とその証明について述べられている他、appendix で一般の次数の BCR 不変量の構成法とそのイソトピー不変性の証明が完全な形で述べられている（Cattaneo-Rossi の論文では主に次数が2、3の場合について記述されている）。申請者が appendix で述べている構成法では、申請者独自の技術的な工夫もされており、appendix も含めた形で論文はジャーナルに受理されている。

学位論文の研究の発展として、申請者は n 次元ユークリッド空間から m 次元ユークリッド空間への埋め込み（無限遠の近傍で自明な埋め込みになっているようなもの）の全体の空間のコホモロジー類を配置空間積分をもちいて構成しており、申請者はこれについて論文を執筆中である。また、前述のように2次元以上の結び目の不変量は「古典的」な不変量以外はあまり知られておらず、申請者の研究はこのトピックの将来の発展に新しい方向性を与えることが期待される。また、申請者は国内外の研究集会や国際会議に活発に参加して講演をしており、自立した研究者としての能力は高い。

よって本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。また、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。