

TANGRAM について

京大・数理研 一松 信

1. TANGRAM

TANGRAM とは, 正方形の紙片を図のように切った 7 片 (大きい直角二等辺三角形 2, 中位の直角二等辺三角形 1, 小さい直角二等辺三角形 2, 正方形 1, 平行四辺形 1) の "Tan"

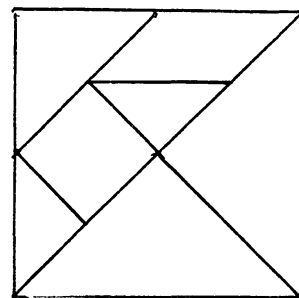


図 0. TAN

とよばれる片を並べて図形を作るパズルである。この語源には教説あるが, Sam Loyd が彼の「Tan の 第八之書」でのべた伝説 (4000 年以上前の中国人の発明) は, 今日では彼の創作であることがわかっており, 古代英語の *Trangram* (がらくた物の意味) の書き誤り説もでている ([1])。

Tangram はジグソーパズルと違って, 片の数がごく少なく, しかも規則的な形をしているために, 人間にはかえって難しいが, 計算機にはやろせやすい。じつせい与えられた図形を Tan の組合せで求めるプログラムも開発されている ([2])。

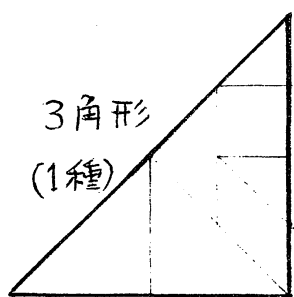
人間にとっておもしろいのは, Tan によっていろいろなシルエットを作りだすことであろうが, これは計算機には困難

であろう。それはこの図形が何に見えるか、どうしておもしろく（あるいは美しく）感ずるのか、といった、単なるパターン認識以上の審美的ないし価値の判断が必要だからである。

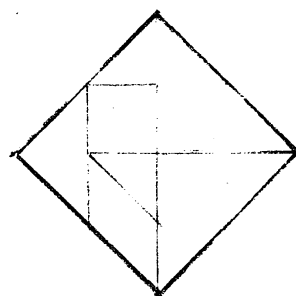
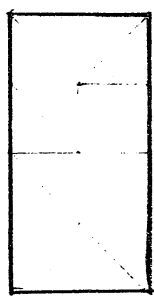
むしろ計算機によるパズルとして興味深いのは、組合せ問題で、以下「第1種の問題」の研究課題として紹介する。

2. TANGRAMの組合せ問題(1) 凸多角形

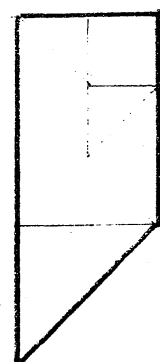
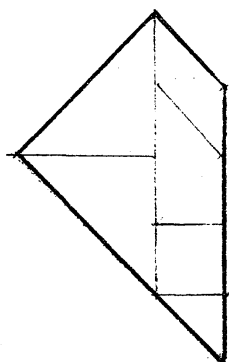
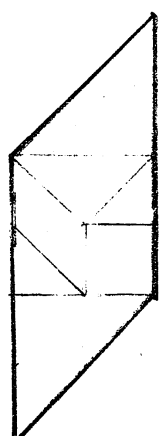
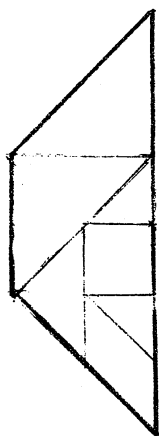
Tangram として作られる (= Tan の) 組合せてできる) 凸多角形が13種であることが確認されたのは1940年代である([3])。内角は 45° の倍数、 $45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$ だから、8角形より上はできない。面積と辺の関係をしらべると7角形、8角形は不可能で、図1の13種の外形しかできないことがたしかめられる。(内部の並べ方には自由度がある) 図1ではとくに唯一の非対称形である平行四辺形状のTANを一定の向きに保って構成したが、全部それを裏返した向きでも可能である。(それはすでにについて、それが三角形の片と左右対称図形を作るか、または小三角形との合成か、正方形と小三角形の合成と合同の台形を作り、おきかえ可能になっていることからわかる)。なおこの図では正方形の1辺を1、全面積を8とし、整数長の辺は水平、垂直に、 $\sqrt{2}$ の整数倍長の辺は 45° の方向に記したが、これが標準的な記述である。



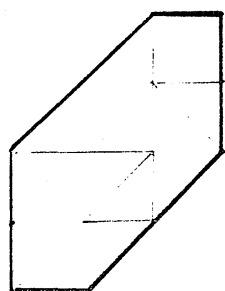
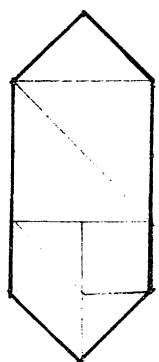
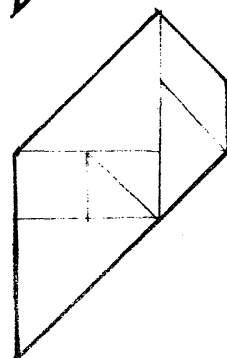
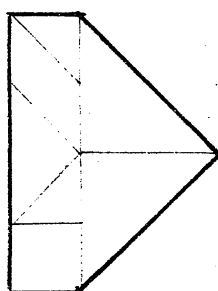
3 角 形
(1 種)



4 角 形 (6 種)



5 角 形
(2 種)



6 角 形 (4 種)

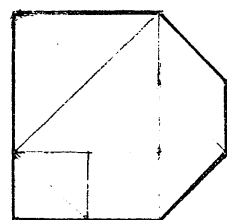
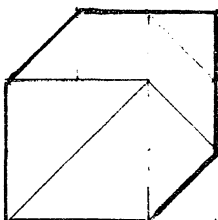


図 1 凸 多 角 形 TANGRAM (全 13 種)

3. ピンハネ・パラドックス

紙を切って並べかえ、 $64=65$ (または $64=63$) というパラドックスがある。僅かな重なりやすき間が一見してわからないことから生ずる。Sam Loyde は、この種のパラドックスの手のこんだものとして、重ね方をかえると人数が変化して見える「消える妖精」「ライオンと狩人」など傑作を考案した。特定の1人が消えるのではなく、何人かが全体として少しずつすきまになり、それがたまって1人分の差が生ずる。いわば「ピンハネ」の応用によるパラドックスである。

Loyde は Tangram でもこの種のパラドックスを3例考えている。どちらも同じような形で、一方は1個所穴があるように見えるが、どちらも Tan 7 片全部で作られているのである。穴の分だけ他が少しずつ大きくなっているのだが、見ただけでは区別できないせいである。

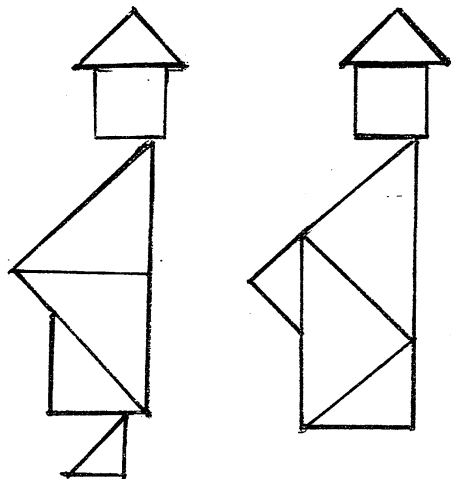


図 2

しかしこの種の傑作は、Dendony による「2人のマンダリン」(図2) だろう。りんかくだけだと、足の有無の差としか思われぬ。(斜の線の長さが $2\sqrt{2}:3$, 高さが $4:3\sqrt{2}$ で、5% 以上も違うの!!)

4. TANGRAM の組合せ問題 (2) 5 角形

TANGRAM として作られる 3 角形は 1 種, 4 角形は 6 種 (すべて凸) である. 一方 6 角形以上で制限をつけなければ無限 (連続体の濃度) にできる. 直角二等辺三角形を 2 組作って, これをずらせばよい. その意味で 5 角形の可能な個数は興味深い問題である.

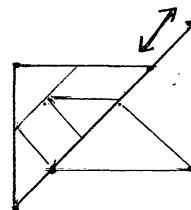


図 3

この場合 快 (snug) なものと, そうでないものとを区別したほうがよい. 快 TANGRAM とは, 各 TAN を構成する小直角二等辺三角形がすべて 辺同志・頂点同志 ぴったり含めたり 辺の途中に別の片の頂点がきたりしないものである. (図 1 はすべて快)

Read はかつてこの数え上げをやリ, snug な 5 角形が 16 種, non-snug な 5 角形が 2 種と発表したか (図), これには多数の見落としがあった. 前看では, りんかくを定めると, 面積の関係から寸法がきまるが, そのうち TANGRAM としてできないとして捨てたもののうちに, じつは組立てられるものがあり, 計 22 種 のようである. このほうは根拠よくしらべてゆくことではしかめられそうである. Non-snug なものについて, Read は「全体が 2 つの 3 角形からなる」としたが, これは早合点で, 4 角形と 3 角形の組合せも可能であった. したがってこれを完全に求めるためには, TAN を 2 組に分

け、一方で3角形、他方で4角形を作り、その上でそれを含成して（一頂点が平角になつて）全体が5角形になるようにできる場合をさがすことになる。これは手でも計算機でも、ちょっとした仕事であろう。現在のところ（3角形+3角形のときもこめて）計31種類らしいといわれているが、それ以外にないことは確認されていらない。これは興味ある未解決の問題である。

5. TANGRAM の組合せ問題(3) その他

(i) 快TANGRAM として可能なものの総数はいくつか？

もちろん有限個で最大18角形である（快というとき、全体が連結、かつ単一連結という制限をも加える）。しかしそれは相当に大きな数で、計算機で求めることも容易ではなそうである。Readは大きい3角形2個を除いた5個の“ミニ・タングラム”について、ミニコンで30分ほどの計算で、951個と求めている。

(ii) 農場の問題 (Farm Problem) TAN でかこんで作ることのできる周囲に接しない最大の穴の面積（厳密に言えば、その上限）はいくつか？ また単一連結で周囲に接しない穴は最大何辺か（13らしい）？ これらは上記とは別の未解決の問題である。

参考文献

- [1] R.C. Read, TANGRAM: 330 Puzzles,
Dover Publisher, 1965
- [2] E.S. Deutsch - K.C. Hayes, Jr., A Heuristic
Solution to Tangram Puzzle.
Machine Intelligence, vol. 7 (1972), 205—240.
- [3] F.T. Wang - C.C. Hsiung, A Theorem on
Tangram, The Amer. Math. Monthly 49 (1942), 596—9.
- [4] M. Gardner, Mathematical Games;
TANGRAM; Scientific American 1974 Aug., Sept.,
(日本語訳: サイエンス, 同10月号, 11月号).