

The Lorenz Dynamical System

北大 工学部 長島 知正

理学部 島田 一平

§1. 序論

最近, (熱)統計力学の分野において, 従来の研究の枠をこえて, 熱平衡状態から非常に隔った非線型領域での非平衡状態の研究が意識的に行われつゝある。特に, 外部からエネルギー (又は, 粒子) の補給を受けた巨視的体系の定常状態の類別, その (不)安定性及び巨視的状态のまわりの“ゆらぎ”の性質 etc をめぐる議論がなされ, 非平衡開放系に特徴的な“散逸構造” (熱平衡状態での構造に対比して) の概念を通し, 非平衡状態での巨視的状态の統一的理解をはかる努力が続けられてい¹⁾る。この様な立場からは, 流体力学系は, もっとも典型的な問題を提示しており, いわゆる“乱流”と呼ばれる現象は, 非平衡状態に於ける巨視的な“相”の一つと見取される。⁴⁾

Ruelle - Takens による散逸力学系の“generic”な性質としての“strange attractor”の存在に関する命題は,

この意味で物理学者の注目をひく理由があった。更に、その様な "strange attractor" (Axiom-A attractor) 上での不変測度の存在と変分原理による不変測度の特徴付けを与えた Bowen, Ruelle の仕事は、何よりも "乱流の統計力学" の基盤を考える上で、極めて有方向を指唆していると考えられる。

然しながら、Hamilton 系の flow のエルゴード問題の例に見られる如く、物理的に意味のある具体的モデルから、数学的に厳密な結果が得られることは稀であり、この小論では、多少とも、物理的に興味のある、Lorenz 力学系に関して、我々の数値実験の結果を中心に報告する。

§2. Lorenz 力学系

Lorenz 力学系の物理的背景 etc. について、詳しく述べる余裕はないが、若干の説明を加える。(詳しくは、文献 2 を参照)

Lorenz 系は、重力場のもとに、下から熱せられた流体の不安定性 (熱対流発生) の問題 (普通 Benard 問題と呼ばれている) を基盤に持つ。

浮力も考慮した粘性流体の方程式 (Navier-Stokes eq.) ^{の解を} (適当な境界条件と系の対称性を考えて) 空間的に Fourier 分解

して、次の3つのモードで decouple した方程式を Lorenz 力学系と呼ぶ。

$$\begin{aligned}\dot{X} &= -\sigma X + \sigma Y \\ \dot{Y} &= -XZ + \gamma X - Y \\ \dot{Z} &= XY - \beta Z\end{aligned}\tag{1}$$

変数 (パラメータ) は、上の (偏微分) 方程式で、次の内容を持っている。 X は、流れ関数の基本モード、 Y 及び Z は、温度場の基本及び第一高調波モードである。 σ, σ, β は夫々、Rayleigh 数、Prandtl 数 及び 容器の幾何学的形状で決まる定数である。又 (σ, β, γ) は 総て非負の実数。

§2-1. 線型解析など。

方程式(1)の右辺で定義されるベクトル場 $\underline{X}$ で定めらる力学系 $(R^3, \underline{X})$ は 不動点 ($\underline{X}=0$) として (i) $0 < \gamma < 1$ で、 $x_0 = (0, 0, 0)$ 又 (ii) $\gamma > 1$ で、 $x_{\pm} = (\pm c, \pm c, \gamma - 1)$ 但し、 $c = \sqrt{\beta(\gamma - 1)}$ をもち、線型安定性より 「a) $0 < \gamma < 1$ …… x_0 は安定 b) $1 < \gamma < \gamma_T \equiv \sigma(\sigma + \beta + 3) / (\sigma - \beta - 1)$ …… $x_{\pm}$ がみ安定 c) $\gamma > \gamma_T$ …… $x_0, x_{\pm}$ 共不安定」 であることが分る。ここで、特に $\gamma > \gamma_T$ が興味ある。

又更にこの力学系が 次の性質を持つことは容易に認められる。

i) 系の総ての解は、有界な領域に bound される。

ii) 系の時間発展に伴い、体積要素は一定の割合で減少する。

iii) カ学系(1) は、 $(X, Y, Z) \rightarrow (-X, -Y, Z)$ の変換に不変。

§2-2. 大域的性質 …… 双曲的アトラクター

Lorenz は、パラメータとして、 $(\sigma, \rho, \beta) = (28, 10, 8/3)$ を選び、非周期的解が得られることを数値的に示した。ここでは、 $\mathbb{R}^3$ での軌道の大域的振舞いを ($Z = \sigma - 1$ の断面で) 図1-a) に示した。又この断面上での dynamics を表わす Poincaré map を 図1-b) に示した。(この P-map は、Y 軸で軌道をパラメトライズして得た。) 図1-a) に示した構造は初期条件を(この構造内、或は、)この構造から離れた点に変えた場合にも、(数回のステップの後には)この構造に吸い込まれるので、attractor の概形(断面上の)を示めしていると考えられる。(この attractor を以後 original Lorenz attractor と呼ぶ) 図1-b) に示めた P-map よりこのカ学系が一つの膨張的次元を持っていること、又、周期的性質を持つことが分る。attractor の概形は断面上では線分に見えるが、このカ学系が式(1)で定義された微分方程式であることより、線分ではなく、概形を

表やす線分と局所的に直交する方向に杯の構造をつくらせ
 いると考えられるが、これを数値的に示すのは、必ずしも
 簡単ではない。図1-(b)のP-Mapに見られる膨張長的次元
 の存在と §2-1の(ii) で述べた性質を共存させる状況を考
 えれば、Lorenz attractor が双曲型の構造を持っている
 ことが了解さやう。尚、Lorenz力学系の大域的性質
 に関して、原点 $(0,0,0)$ にある(不安定)不動点 x_0 の安定多杯体
 (2次元)は、この系の特徴的性質である2つの(不安定)不動点 $x_{\pm}$
 のまわりのspiral状の運動を特徴付ける基本的役割
 (図1-(b)のP-mapのsingular pointに注目されたい)を果
 しているが、この多杯体の位相幾何学的構造は極めて“奇妙”
 なものになっていると予想され、式(1)で定義される本来の
 Lorenz力学系の位相的性質はほとんど分っていないことを付
 け加えておきたい。

§2-3. アトラクターの分岐

このoriginal Lorenz attractorの構造安定性は、
 Guckenheimer etc.³⁾により、互いにhomeomorphicでな
 いattractorの存在が示され、構造不安定であるとされている。
 (但し、彼等の議論は、式(1)で定義される本来のLorenz系自
 身を調べたものではない。式(1)で定義される系を数値的に、
 (σ, ρ) を固定)パラメータ γ を $\gamma \rightarrow \gamma_+$ の近傍で変化

させた場合, attractor の構造の大きな変化は見られぬ。))

さて, パラメータ γ ($\sigma, b: \text{fix}$) を変化させた時, $\gamma = \gamma_c$ で subcritical bifurcation をすることは, 良く知られている。
 今, $(\sigma, b: \text{fix})$ $\gamma \rightarrow$ 大 なるとき, Lorenz attractor は, どんな構造を採り, 又, その bifurcation はどんなタイプであるのか? 簡単に述べる。ここでは, $\gamma \approx 220$ の近傍に $(\sigma = 16.0, b = 4.0)$ 限ることにする。

$\gamma \approx 228$ では, Lorenz 系の attractor は 図 2 に示した様な periodic attractor である。

図 - 2

ここで, $\gamma \rightarrow$ 小 の方向にパラメータを変えれば, 周期数が 2^n ($n = 1, 2, \dots$) の periodic attractor が逐次分岐してくる。^(*) 又, 逆に $\gamma \rightarrow$ 大 の方向に変化させるとある γ の値で突然, periodic attractor から "strange attractor" に分岐する。ここであげた 2 つのタイプの periodic orbit の bifurcation は, Lorenz 力学系のみならず $\mathbb{R}^3$ で定義される力学系の chaotic な attractor の存在へ導く, 一つの一般的な bifurcation の scheme になる可能性がある。^{5), 6), 7)} (ここで述べた 2 つのタイプの bifurcation 自身は Brunovsky によって調べられたものと考えられるが, この分岐が逐次おこる現象の解析は, 未だ一次元注(*) §4-2 でこの立場から, パワー・スペクトルの例が示される。

差分系を除いて^{えん} ばさやていない)

§3. Lyapunov 特性数⁸⁹⁾

§2-2. この Lorenz attractor には双曲性が認められることを述べたが、ここでは、その双曲性を定量的に特徴付けるため、Lyapunov 特性数に関する定理とその数値的解法について説明する。ここで述べる Lyapunov 数の理論は、Sinai による古典力学系のエントロピーの理論との関連に於いて、比較的最近になって注目されている。

附録1で、数値計算の基礎となる部分の Lyapunov 数に関する定理をまとめておいた。記号 etc の詳細は附録に従うことにして、Lyapunov 特性数は次の様に定義される：今、 $\{T^t\}$ を flow, 多相体 M 上、 $x \in M$ での接空間 E_x から T_x^t での接空間 ^{$(E_{T_x^t})$} への導写像を dT_x^t とする。

i) (一次元) Lyapunov 特性数; $\chi(e, x)$

$$\chi_{\pm}(e, x) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{|t|} \ln \|dT_x^t \cdot e\|$$

(但し、 e は一つのベクトル $\in E_x$ である)

ii) (k 次元) Lyapunov 特性数; $\chi(e^k, x)$

$$\chi_{\pm}(e^k, x) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{|t|} \ln \lambda(e^k, dT_x^t)$$

ここで、 $\lambda(e^k, dT_x^t)$ は E_x の基底 $(e_1, e_2, \dots, e_k)$

によって生成される線型空間 e^k に関し, $(dT_x^t e_1, dT_x^t e_2, \dots, dT_x^t e_k)$ によって決まる平行体 (parallelepiped) の体積要素であり, e^k 方向の膨張係数と呼ばれる。 $k=1$ の場合の膨張係数は $\lambda(e^1, x) = \|dT_x^t \cdot e_1\|$ である。又, $k=1$ の場合 あるベクトル $e \in E_x$ を "任意に" 選べば, 一次元 $Ljapunov$ 数の内 $(\lambda_+(e_i, x), i=1, 2, \dots, k)$ 最大の $Ljapunov$ 数を与える。

この最大 $Ljapunov$ 数は, 図3 で示す方法によって数値的に評価できる。

図3

図中に示された量を用いて, 次の量 k_n を計算できる。

$$k_n(\tau, x, d) = (n\tau)^{-1} \sum_{i=1}^n \ln(|d_i|/|d|)$$

この k_n は, $n \rightarrow \infty$ の極限で最大 $Ljapunov$ 数を近似することになる。⁹⁾

今, あるベクトル e をとり, 図3 の中の $(y_0 - x_0)$ をとる。

即ち, $e = y_0 - x_0$ とする。充分微小な $|d|$ に対し, $(\tau:fx)$

$$|d_i|/|d| \cong \|dT_x^{\tau} \cdot e\| / \|e\| \quad \text{が成立つ。}$$

導写像に対する鎖法則: $dT_x^{t+s} = dT_{T_x^s}^t \circ dT_x^s$ より,

$$|d_i|/|d| = \|dT_x^{i\tau} \cdot e\| / \|dT_x^{(i-1)\tau} \cdot e\| \quad i=1, 2, \dots$$

が成立つ。

このことより,

$$\begin{aligned}
k_n(\tau, x, A) &= (n\tau)^{-1} \sum_{i=1}^n \ln(|d_i|/|A|) \\
&\cong (n\tau)^{-1} \sum_{i=1}^n \ln(\|dT_x^{i\tau} \cdot e\| / \|dT_x^{(i-1)\tau} \cdot e\|) \\
&= (n\tau)^{-1} \ln(\|dT_x^{n\tau} \cdot e\| / \|e\|)
\end{aligned}$$

が成立する。

この k_n を Lorenz 力学系に適用した結果，初期条件には依存しない漸近的に一定な正定数 が与えられる。このことは，最大 Lyapunov 数が正定数を意味することより，Lorenz 力学系がエルゴード的 であることの強い保証になる。¹¹⁾

§ 4. 統計的性質

この節では，attractor 上に制限した力学系の統計的性質に関する数値実験の結果を簡単に述べる。

最大 Lyapunov 数が正定数であり，かつ又，初期条件に依存しないという事実は Lorenz 系が attractor 上で "ergodic" であると同時に，この attractor 上に不変測度 が存在すれば，その不変測度に関する Kolmogorov entropy に結びつくことにより，混合的でもあることを示唆する。

4-1. 不変測度

Lorenz 系 が不変測度をもつことを示すため，^⑧座標上に

射影した不変測度を図4に示した。

図4

4-2. パワースペクトル

a) original Lorenz attractor に関するパワースペクトルは、文献10で与えられている。

b) ここでは、 $\gamma \gg 1$ なるパラメータの領域で見付けだされた periodic な attractor からの逐次分岐によって power spectrum^{*} の例を図5に示した。^(*) (座標に注意)

図5-(a) ~ (d)

[尚(a)は周期解、
(a)以外は chaotic branch の解

power spectrum は次の式で計算した。

$$\langle \tilde{f}(\omega) \rangle = 1/n \sum_{j=1}^n 1/T \left| \int_{t_j}^{T+t_j} f(t) \exp(i\omega t) dt \right|^2$$

ここで、 $n=60$ 、1つの time series には 1024 個のサンプリング点を含む。(但し、後述の計算には、window をかきこいた為、スペクトルの微細構造はあまり信用できないが、global なスペクトルの形状は変らないものと考えられる)

ここに示した、brunovsky type の periodic attractor の逐次(転移)分岐の延長上にある chaotic branch のスペクトル(特に図5-(f))と original Lorenz attractor 上のパワースペクトルは、かなり異なっている。

§ 5. 終りに

以上, 数値計算に基づいて, Lorenz 系が, 具体的な系として, 散逸系におけるエルゴード的な力学系になっていること
の状況証拠を明らかにしてきた。以上述べてきた結果を,
より厳密なものにそろえる一つの方法として記号力学の方法は有
効と思われる。

最後に, ここで扱ったタイプの力学系は, 従来, 物理での
エルゴード性の問題の対象がミクロレベルでの粒子の構成
する力学系 (Hamilton 系) であつたのに対し, ここでは, マク
ロレベルでの (流体力学的階層での) 散逸的力学系であり,
(熱力学極限 ($N \rightarrow \infty$) の問題もふれずに) 力学系のエルゴード
性が直接, 物理的観測量と結びつき得るものであり, この種
のエルゴード問題の物理的位置付けは, 極めて異なることを
指摘して終りたい。

附録: ここでは, 本文中で述べた最大 Lyapunov 数に座
落ついて, Oseledec による Lyapunov 数に関する定理を文
献 9 にそゝてまとめておく。

記号:

M ; 微分可能 (C^2) な n 次元 コンパクト 多様体

E_x ; $x \in M$ での 接空間

$\|\cdot\|$; M 上の リーマン 計量

$\{T^t\}$; flow, $T^t x = x(t)$ ($x(0) = x$)

dT_x^t ; x での ^(M の) 接空間 E_x から T_x^t での 接空間 $E_{T_x^t}$ への 導写像

μ ; M 上の (normalized) 測度 ($\{T^t\}$ 不変)

定理. $M_1 \subset M$, $\mu(M_1) = 1$ とし, $x \in M_1$ に対し

1). 上記の $e \in E_x$ ($e \neq 0$) に対して, 次の極値が存在し
かつ有限である。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|dT_x^t \cdot e\| = \chi(e, x)$$

2). E_x の基底の中で次の極値を持つものが存在する。

$\pi = \{(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_n) : E_x \text{ の基底} \}$ とし,

$$\sum_{i=1}^n \chi(e_i, x) = \inf_{\pi} \sum_{i=1}^n \chi(\tilde{e}_i, x)$$

3). $\chi_i(x) \equiv \chi(e_i, x)$, $1 \leq i \leq n$ とし, $\{\nu_j(x)\}_{1 \leq j \leq S(x)}$

を $\{\chi_i(x)\}_{1 \leq i \leq n}$ の中で異なる Lyapunov 数とし, $k_j(x)$

を $\nu_j(x)$ の重複度とする。又, $\nu_i < \nu_j$ ならば $i < j$ とする。

このとき, 上記の $x \in M_1$ に対し, 次の性質を有する E_x

の線形部分空間 $\{H_\ell\}$, ($\ell = 1, 2, \dots, S$) が存在する

$$i) E_x = H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_s$$

$$ii) \dim H_\ell = k_\ell(x), \quad 1 \leq \ell \leq s$$

iii) if $e \in H_\ell$ ($e \neq 0$), then

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} 1/t \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \| dT_x^t \cdot e \| = \pm \nu_\ell(x), \quad 1 \leq \ell \leq s$$

iv) if $e \in H_1 \oplus \cdots \oplus H_\ell$, but $e \notin H_1 \oplus \cdots \oplus H_{\ell-1}$, then

$$\chi(e, x) = \nu_\ell(x), \quad 1 \leq \ell \leq s \quad //$$

文南大' (極めて不完全であるが, 直接関係するものを挙げる)

- 1) P. Glansdorff and I. Prigogine: Thermodynamic Theory of Structure, Stability and Fluctuations (Wiley, 1971)
- 2) 長島知正, 島田一平: 日本物理学会誌 33 (1978) 増6号 P.505
 , 及びこの文南大'を参照した。
- 3) J. Guckenheimer: The Hopf bifurcation and its Application
 (Springer 1976) P.368
- 4) 富田和久: 数理科学 4 (1978) 18.
- 5) I. Shimada and T. Nagashima: Prog. theor. phys 59 (1978)
 1033.
- 6) K. Tomita and T. Kai: Phys. Letters 66A (1978) 91.
- 7) T. Nagashima: Ôji seminar (1978, Kyoto) の講演.

- 8) V. I. Oseledec : Trans. Moscow Math. Soc. 19 (1968) 197.
- 9) G. Benettin, L. Galgani, and J. Strelcyn : Phys. Rev
A 14 (1976) 2338.
- 10) Y. Aizawa and J. Shimada : Prog. theor. Phys. 57 (1977),
2147.
- 11) T. Nagashima and J. Shimada : prog. theor. phys. 58
(1977) 1318.

Fig. 1-(a)

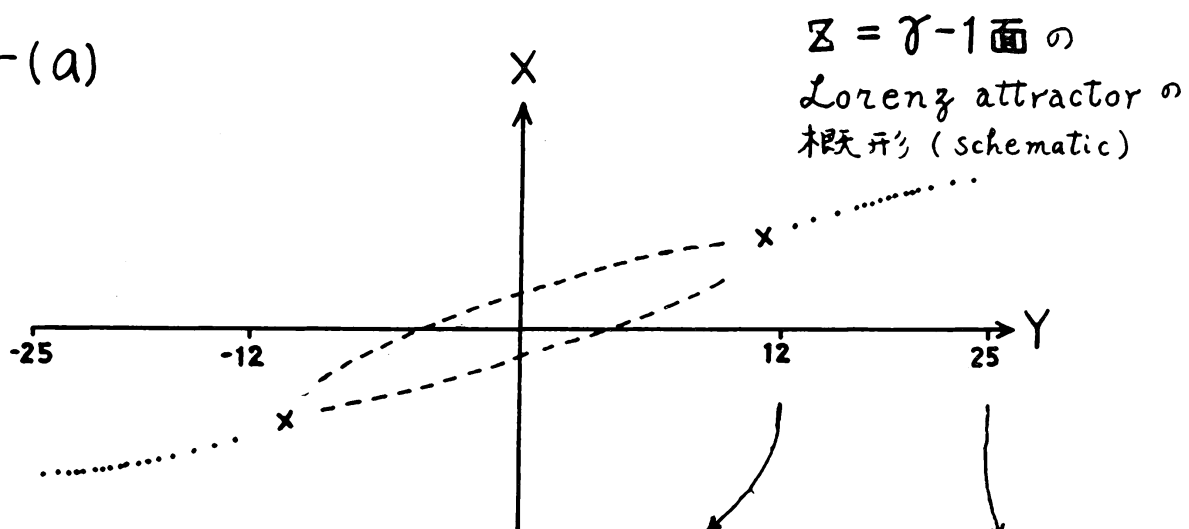


Fig. 1-(b)

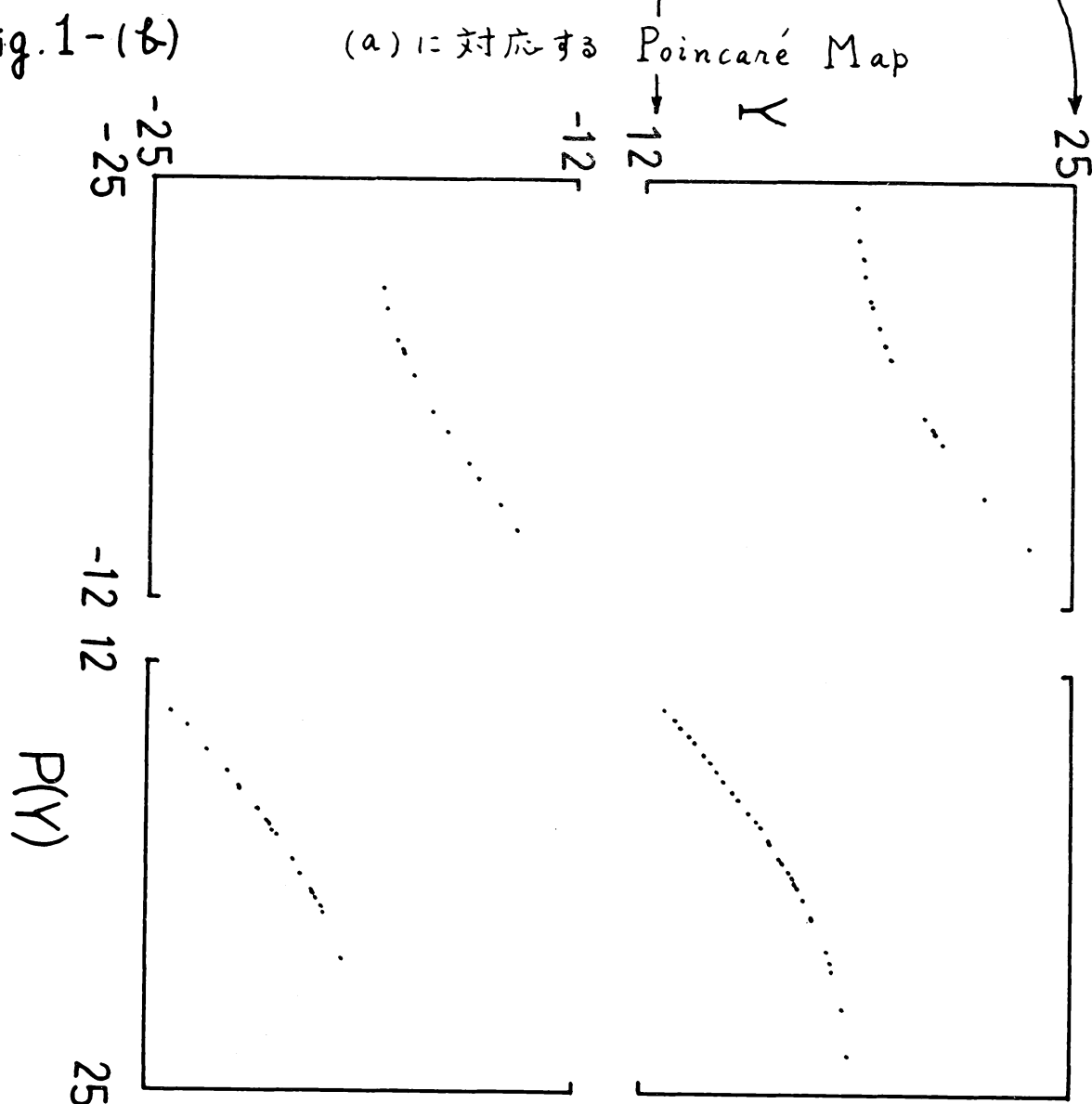


Fig. 2

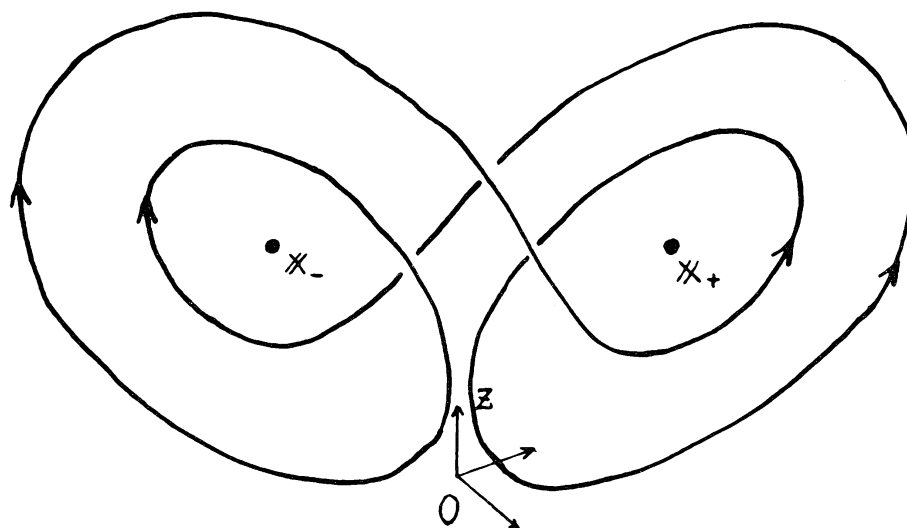


Fig. 3

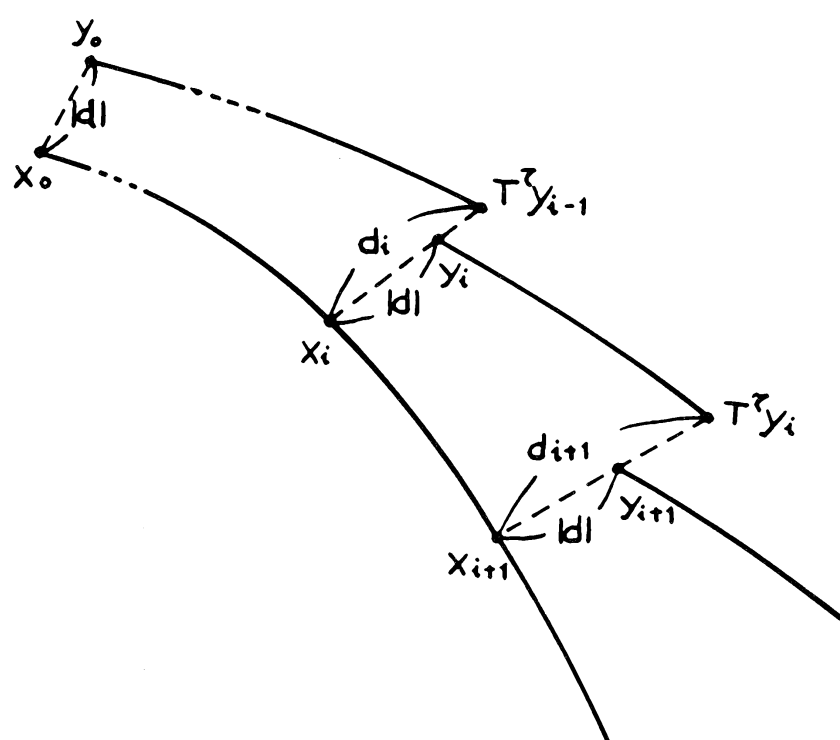


Fig. 4

$$f_{\vec{x}_0}(\vec{x}) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int^T \delta(\vec{x} - \vec{f}(\vec{x}_0)) dt$$

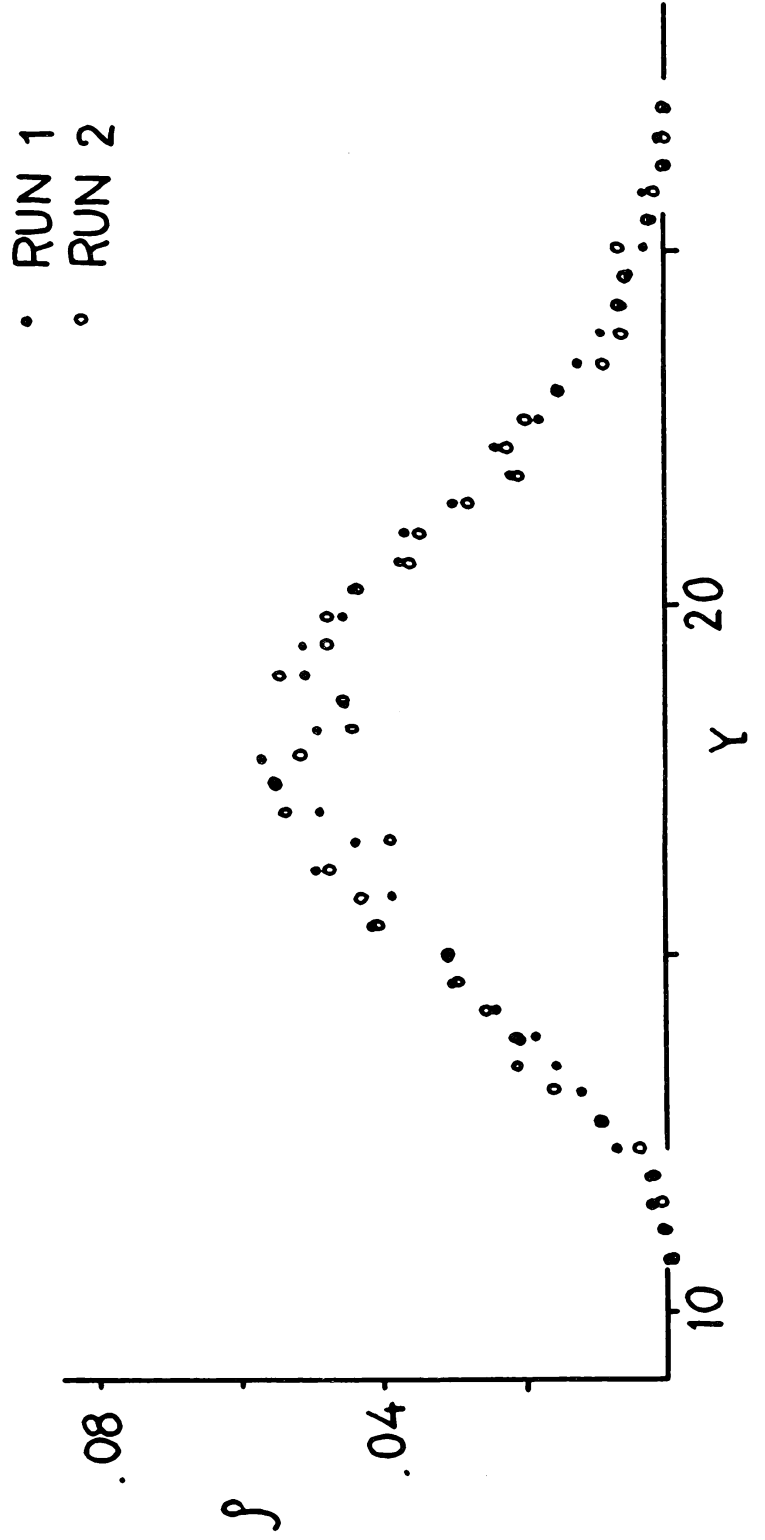


Fig. 5-(a)

$\chi = 224.0$

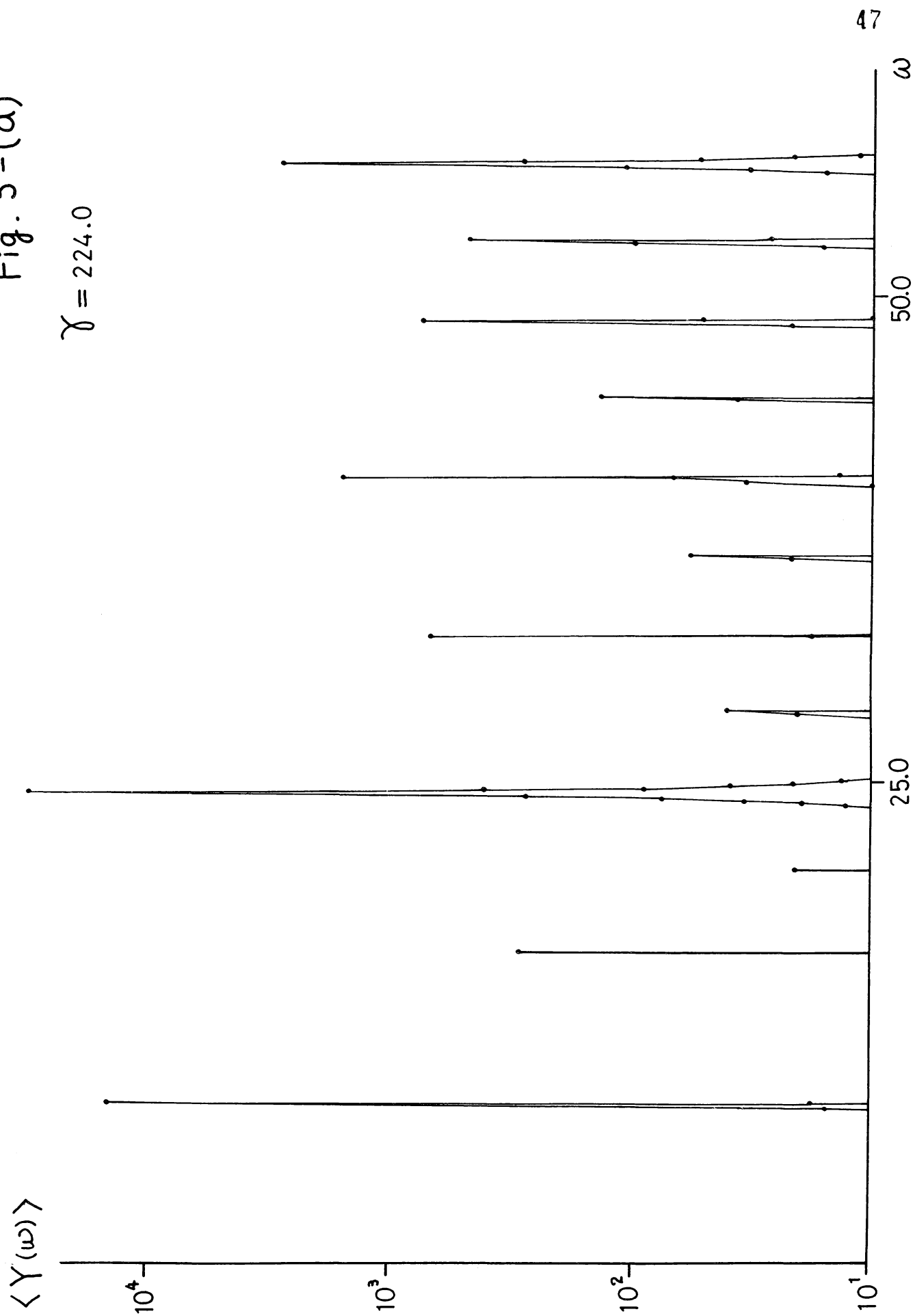


Fig. 5-(8)

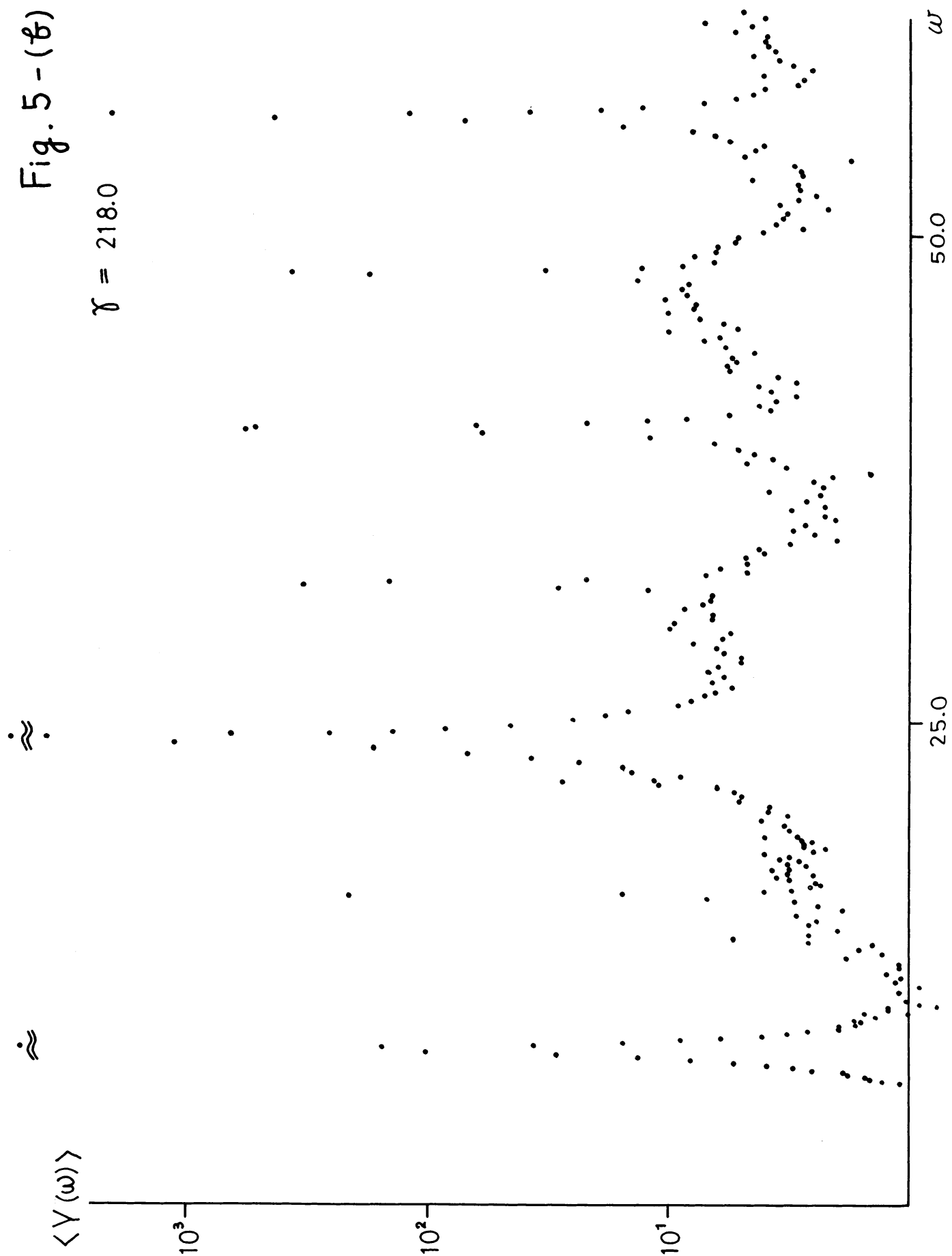


Fig. 5 - (c)

$\gamma = 213.0$

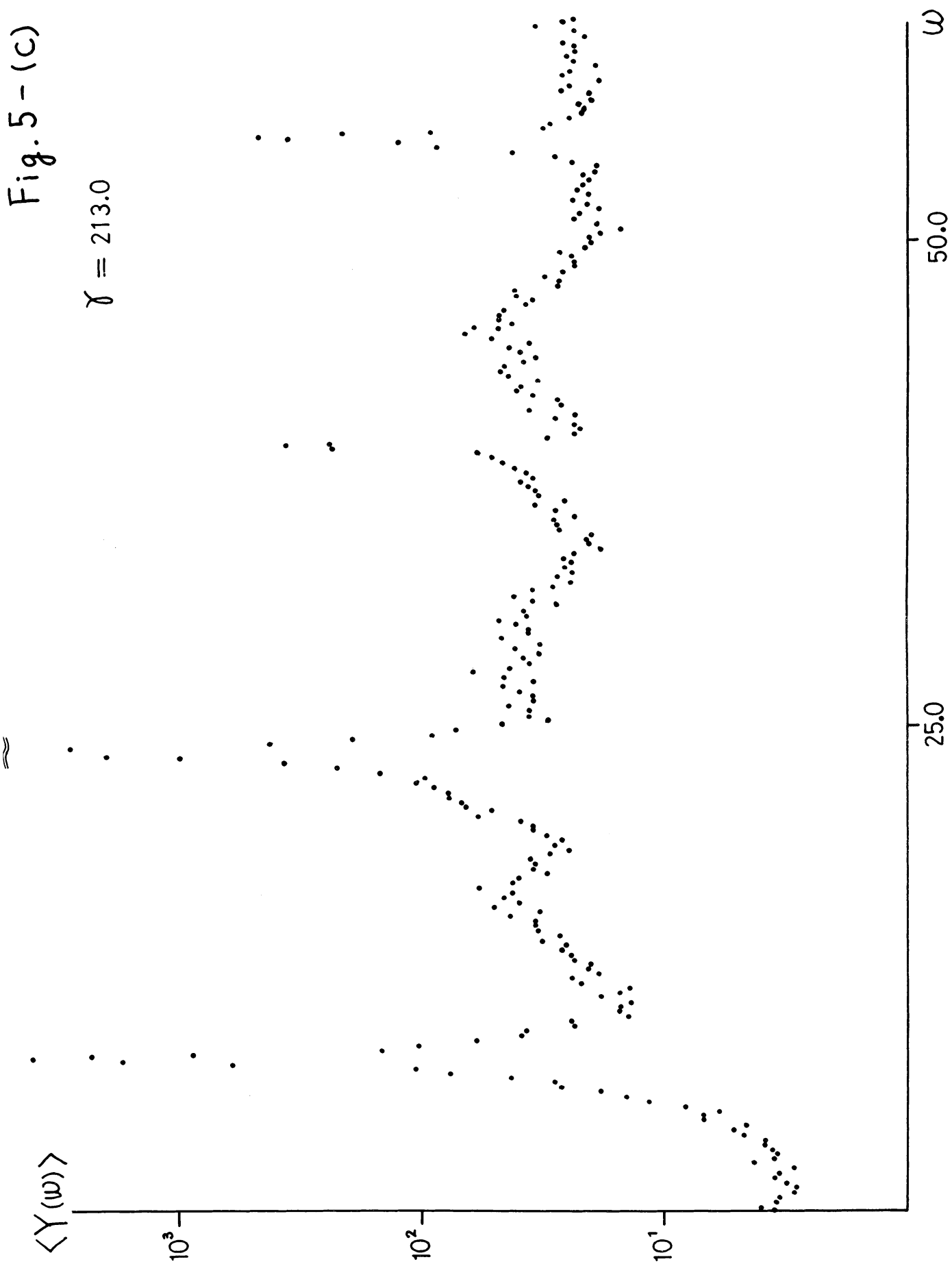


Fig. 5-(d)

