

differential calculus in characteristic $p > 0$ and de Rham-Witt complex.

Paris Sud Michel Raynaud

(諏訪紀幸記)

本稿は Raynaud 教授の 9 月 20 日 東京大学での講演と
10 月 6 日 京都大学数理解析研究所での講演をもとに
まとめたものです。

1. historical notes

X を compact 複素多様体, $\Omega_X^\bullet$ を X の de Rham complex とする.
このとき, 重要な spectral sequence

$$E_1^i = H^i(X, \Omega_X^\bullet) \Rightarrow H^*(X, \Omega_X^\bullet) \simeq H^*(X, \mathbb{C})$$

が存在する. X が Kähler なる上, spectral sequence は E_1 で退化し,
Hodge number $h^i = \dim_{\mathbb{C}} H^i(X, \Omega_X^\bullet)$ は X の重要な不変量である. 同様の
議論を代数多様体に対して試みるのは興味深いことであるが,

de Rham cohomology $H_{\text{DR}}^*(X/k) = H^*(X, \Omega_{X/k}^\bullet)$ は 標数 0 のときは
求めらるる良い性質を持っているのに比べて, 標数 $p > 0$ のときはもはや
良い性質を持たない (例えば, 良い Betti number を与えない).

この方面での最初の試みは Serre の Witt vector cohomology

であろう (Serre [11] '58): k を標数 $p > 0$ の algebraically closed field, X を k の上に定義された代数多様体, また, $W = W(k)$ を k の上の Witt vector の環とする. X の affine open U に $A = \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ の上の Witt vector の環 $W(A)$ を対応させることにより, X の上の formal sheaf $W(X)$ が定義される. このとき, $H^i(X, W(X))$ は W 加群. Serre は $H^i(X, W(X))$ が X の Hodge number $h^{0,i}$ を与えるものであると考えたが, 実際, X が k の上に smooth complete で W の上への lifting π を持つとき, $\dim_k H^i(X, W(X)) \otimes_w K$, K は W の分数体, は π の "Hodge number $h^{0,i}$ " と一致する. また, X が k の上に smooth complete なる, $H^i(X, W(X))$ は free W -module of finite type となることを示した. さらに, Serre は X が k の上に smooth complete なる一般に $H^i(X, W(X))$ が有限型 W 加群となることを予想したが, ほとんどなく反例を見出した. (Serre [12])

remark 1.1. X が k の上に smooth complete のとき, $P = \text{Pic}_{X/k}$ を X の Picard scheme とすれば, $\{H^i(X, W(X)), F, V\}$ は formal completion $(\hat{P}^0)_{\text{red}}$ の Cartier module に対応する.

これから十年程進展が見られなかったが, Monsky と Washnitzer は differential の標数 p から標数 0 への lifting についての系統的な研究を行ない, formal cohomology を定義した (Monsky-Washnitzer [7] '68-'70). また, Grothendieck は Monsky-Washnitzer の仕事に着目し, scheme の infinitesimal site を定義し, 標数 0 のとき, infinitesimal cohomology が smooth variety に対して de Rham

cohomology を与えることを示した。しかし、標数 $p > 0$ の場合、infinitesimal site では不十分であることから、scheme の crystalline site を定義し、crystalline cohomology が良い p -adic cohomology を与えるであろうと述べた (Grothendieck [5])。実際、Berthelot は crystalline cohomology が良い p -adic cohomology であることを示した：例えば、 k を標数 $p > 0$ の perfect field, X を smooth proper k -scheme とすれば、 $H^*(X/W)_{\text{cris}}$ は有限型 W 加群；また、 $b_i = \dim_k H^i(X/W)_{\text{cris}} \otimes_W K$ は Weil-Deligne の k -adic Betti number と一致する；また、 X が W の上への lifting $\tilde{X}$ を持つとき、 $H^*(X/W)_{\text{cris}} \simeq H^*_{\text{DR}}(\tilde{X}/W)$, etc. (Berthelot [2])。

しかし、Hodge number を定義するためには、spectral sequence から定義される filtration が必要であるが、Grothendieck-Berthelot の crystalline cohomology に explicit に complex で定義したものはなかった。Bloch は標数と次元の制限はあるにしても、 K -theory を使って crystalline cohomology を与える complex を構成した (Bloch [4])。

remark 1.2 加藤和也は標数と次元の制限が不要であることを述べている。

さらに、Deligne と Illusie は K -theory を使わずに、一般の scheme に対して crystalline cohomology を与える complex として de Rham-Witt complex を定義した (Illusie [6])。de Rham-Witt complex は Serre の Witt vector cohomology と Grothendieck-Berthelot の crystalline

cohomology との自然な結び付きをも与えている

remark 1.3 S を scheme, X を S -scheme とする. X の S に関する infinitesimal site $\text{Inf}(X/S)$ は次のように定義される.

(1) object: S -morphism $U \rightarrow T$, U は X の Zariski open, $U \rightarrow T$ は $\mathcal{O}_T$ の nil-Ideal $\mathcal{J}$ によって定義される closed immersion;

(2) morphism: commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & T \\ \downarrow & & \downarrow \\ U' & \longrightarrow & T' \end{array}$$

$U \rightarrow U'$ は inclusion, $T \rightarrow T'$ は S -morphism;

(3) covering: $\{(U_i \rightarrow T_i) \rightarrow (U \rightarrow T)\}_i$, 各 $T_i \rightarrow T$ が open immersion で $\bigcup T_i = T$.

remark 1.4 Ogus は singular variety に対しても infinitesimal cohomology が de Rham cohomology を与えることを示している (Ogus [10]).

remark 1.5 $(S, \mathcal{J}, \gamma)$ を PD-scheme, X を S -scheme とし, γ が X に拡張できると仮定する. X の S に関する crystalline site $\text{Cris}(X/S)$ は次のように定義される.

(1) object: $(U \rightarrow T, \delta)$, U は X の Zariski open, $U \rightarrow T$ は $\mathcal{O}_T$ の nil-Ideal $\mathcal{J}$ によって定義される closed S -immersion, δ は γ と compatible な $\mathcal{J}$ の上の PD-structure;

(2) morphism : commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & T \\ \downarrow & & \downarrow \\ U' & \longrightarrow & T' \end{array}$$

$U \rightarrow U'$ は inclusion, $(T, \mathcal{J}, \delta) \rightarrow (T', \mathcal{J}', \delta')$ は PD-structure と compatible な S -morphism;

(3) covering : $\{(U_i \rightarrow T_i, \delta_i) \rightarrow (U \rightarrow T, \delta)\}_i$, 各 $T_i \rightarrow T$ は open immersion で $\bigcup T_i = T$.

remark 1.6. k を標数 $p > 0$ の体, $W = W(k)$ を k の上の Witt vector の環とする. このとき, $\gamma_i(a) = a^i/i!$ によつて pW の上の divided powers $\gamma = (\gamma_i)_{i \geq 0}$ が定義される. また, $p^n W$ は pW の PD-subideal なので, $W_n = W/p^n W$ の上に PD-structure が γ から誘導される. 以下, W, W_n を PD-structure γ を持つ PD-ring と考える. さらに, $S = \text{Spec } W$, または, $\text{Spec } W_n$, X を S -scheme とすれば, γ は X に拡張できる.

以下, de Rham-Witt complex の構成と基本的な性質について述べる. また, crystalline cohomology については Berthelot [2], Berthelot-Ogus [3] を, また, de Rham-Witt complex については Illusie [6] を見るといい.

2 de Rham-Witt complexの構成

k を標数 $p > 0$ の perfect field, $W = W(k)$ を k の上の Witt vector の環,
 $W_n = W/p^n W$ とする.

定理 2.1 (Poincaré lemma) $S = \operatorname{Spec} W_n$, X, Y を smooth affine S -scheme,
 $f, g: X \rightarrow Y$ を S -morphism とし, $f^*, g^*: \Omega_{Y/S} \rightarrow \Omega_{X/S}$ をそれぞれ f, g から誘導
 される de Rham complex の準同型 とする. このとき, $f = g \pmod{p}$ なる 各 i
 に対して $H^i(f^*) = H^i(g^*): H^i(\Omega_{Y/S}) \rightarrow H^i(\Omega_{X/S})$ となる. 特に, $f \not\equiv g \pmod{p}$ で同型
 なる $H^i(f^*)$ は同型.

実際, Y は S の上に smooth なので, Y の各点 y に対して y の open neighbour-
 hood U , 及び, 整数 $r \geq 0$, 及び, étale S -morphism $U \rightarrow S[T_1, \dots, T_r]$ が存在する.
 局所性から, étale S -morphism $\varphi: Y \rightarrow Z = S[T_1, \dots, T_r]$ が存在すると仮定して
 よい. このとき, A, B, C をそれぞれ X, Y, Z の affine ring とし, また, f, g, φ に対応
 する環の準同型をまた f, g, φ で表わす. $t_i = \varphi(T_i)$ とおけば, 仮定から, $g(t_i) =$
 $f(t_i) + p a_i$, a_i は A の元, と書ける. ここで, $A\langle T \rangle$ を T を不定元とする polynomial
 A -algebra with divided powers とすれば, 対応 $T_i \rightarrow f(t_i) + T a_i$ により,
 W_n -代数の準同型 $\alpha: C \rightarrow A\langle T \rangle$ が, また, 対応 $T^{[n]} \rightarrow 0$ (あるいは, $T^{[n]} \rightarrow p^{[n]} 1_A$)
 $(n > 0)$ により A -代数の準同型 $u: A\langle T \rangle \rightarrow A$ (あるいは, $u: A\langle T \rangle \rightarrow A$) が定義
 される. このとき, $u \cdot \alpha = f \cdot \varphi$, $u \cdot \alpha = g \cdot \varphi$. ここで, $(T^{[l]})^m = \frac{(l m)!}{(l!)^m} T^{[l m]}$ ($l > 0$),
 $p^n A = 0$ なので, $A\langle T \rangle$ の augmentation ideal $\bigoplus_{l > 0} A T^{[l]}$ は nilideal であ
 り, B は C の上に étale なので, $f = u \cdot \beta$, $\beta \cdot \varphi = \alpha$ となるような環の準同型
 $\beta: B \rightarrow A\langle T \rangle$ が一意に存在する. このとき, $u \cdot \beta \cdot \varphi = g \cdot \varphi$. B は C の上に

étale なのて, $u \cdot \beta = g$. 二て, $\Omega_{A\langle T \rangle/W_n, [1]}^i = \Omega_{A/W_n}^i \otimes_A A\langle T \rangle \oplus dT \wedge (\Omega_{A/W_n}^{i-1} \otimes_A A\langle T \rangle)$,
 $d^i(T^{[m]} \omega_i + T^{[m]} dT \wedge \eta_{i-1}) = (T^{[m-1]} dT \wedge \omega_i + T^{[m]} d\omega_i) - T^{[m]} dT \wedge d\eta_{i-1}$, ω_i ,
 η_{i-1} はそれぞれ $\Omega_{A/W_n}^i, \Omega_{A/W_n}^{i-1}$ の元, 且て A 加群の complex $\Omega_{A\langle T \rangle/W_n, [1]}^i$ を得る
 さらに, $u^*, v^*: \Omega_{A\langle T \rangle/W_n, [1]}^i \rightarrow \Omega_{A/W_n}^i$ をそれぞれ u, v から誘導される complex の
 準同型とし, また, $K(a + dT \wedge b) = \int_0^1 b(t) dt$ (ie $K(T^{[m]} dT \wedge \eta_{i-1}) = p^{[m+1]} \eta_{i-1}$)
 によて 準同型 $K: \Omega_{A\langle T \rangle/W_n, [1]}^i \rightarrow \Omega_{A/W_n}^{i-1}$ を定義すれば, $v^* - u^* = Kd + dK$ と
 なる. したがて, $g^* - f^* = (Kd + dK) \cdot \beta^*$. 二れから 結論を得る. (Katz による
 証明).

remark 2.2 $\{T^{[0]}=1, T^{[1]}, T^{[2]}, \dots\}$ を基底とする free A -module $A\langle T \rangle$ の上
 に, $T^{[n]} T^{[m]} = \frac{(n+m)!}{n!m!} T^{[n+m]}$ によて 乗法を定義すれば, $A\langle T \rangle$ は A 代数となる.
 このとき, $\gamma_m(T^{[1]}) = T^{[m]}$ によて $A\langle T \rangle$ の augmentation ideal $\bigoplus_{n \geq 1} A T^{[n]}$ の
 上の divided powers $\gamma = (\gamma_m)_{m \geq 0}$ が定義される. PD- A 代数 $A\langle T \rangle$ を T を
 不定元とする polynomial A -algebra with divided powers. または, PD-
 polynomial A -algebra とよぶ.

次に, X を smooth k -scheme とする. このとき, 定理 2.1. から, 同型
 $H^i(X/W_n) \cong H_{\text{dR}}^i(U_n/W_n) = H^i(\Omega_{U_n/W_n}^i)$, U は X の affine open, U_n は U の
 W_n 上への lifting, によて X の上の (Zariski 位相 に対する) W_n 加群の層
 $H^i(X/W_n)$ が定義される. さらに, U を X の affine open, U' を U の W の
 上への flat p -adically complete な lifting とする. このとき, $U'_n = U' \otimes_W W_n$
 とすれば, complex の exact sequence

$$0 \longrightarrow \Omega_{U'/W}^i \xrightarrow{p^n} \Omega_{U'/W}^i \longrightarrow \Omega_{U'_n/W_n}^i \longrightarrow 0$$

を得る。したがって, $x \in Z\Omega_{U'/W_n}^i$ の section, $x' \in x \rightarrow x$ とする $\Omega_{U'/W}^i$ の section とすれば, $dx' = p^*y'$ とする $Z\Omega_{U'/W}^{i+1}$ の section y' が存在する。 $y \in y'$ の Ω_{U''/W_n}^{i+1} における image とすれば, 対応 $x \rightarrow y$ によって層の準同型 $d_U: H_{DR}^i(U_n/W_n) \rightarrow H_{DR}^{i+1}(U_n/W_n)$ が定義される。ここで, U'' を U の W の上への flat p -adically complete lifting, $f: U' \rightarrow U''$ を W -morphism とし, $U_n'' = U'' \otimes_W W_n$ とすれば, commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} H_{DR}^i(U_n'/W_n) & \xrightarrow{d_U} & H_{DR}^{i+1}(U_n'/W_n) \\ \uparrow f^* & & \uparrow f^* \\ H_{DR}^i(U_n''/W_n) & \xrightarrow{d_U} & H_{DR}^{i+1}(U_n''/W_n) \end{array}$$

を得る。これから, 層の準同型 $d: H^i(X/W_n) \rightarrow H^{i+1}(X/W_n)$ を得る。このとき, 明らかに, $d^2 = 0$ 。これから, $H^*(X/W_n)$ は X の上の graded differential W_n -algebra の層となる。

remark 2.3 A を (可換) 環, $B = \bigoplus_{i \geq 0} B^i$ を positively graded A -algebra, また, $d = (d^i: B^i \rightarrow B^{i+1})_{i \geq 0}$ を A 準同型の族とする。

(1) $xy = (-1)^{|y|}yx$, x, y はそれぞれ B^i, B^j の元;

(2) $x^2 = 0$, x は B^i , i は奇数, の元;

(3) $d^{i+1} \circ d^i = 0$;

(4) $d^{i+1}(xy) = (d^i x)y + (-1)^i x dy$, x, y はそれぞれ B^i, B^j の元,

が成立するとき, (B, d) は graded differential A -algebra であるという。例えば, R を (commutative) A -algebra とすれば, de Rham complex $\Omega_{R/A}$ は graded differential A -algebra。

次に, $W_n(X)$ を X の上の長さ n の Witt vector の層, $F \in W_n(X)$ の Frobenius endomorphism とする. X の W_n の上への smooth lifting X_n が存在すると仮定する. このとき, $a = (a_0, \dots, a_{n-1}) \in W_n(X)$ の local section, $\tilde{a}_0, \dots, \tilde{a}_{n-1}$ をそれぞれ $a_0, \dots, a_{n-1}$ の X_n の上への lifting とすれば, 対応 $a \mapsto \tilde{a}_0 p^{n-1} + p \tilde{a}_1 p^{n-2} + \dots + p^{n-1} \tilde{a}_{n-1}$ により, 環の層の準同型 $\tilde{\omega}_{n-1}: W_n(X) \rightarrow \mathcal{O}_{X_n}$ が定義される. このとき, 準同型の結合 $\tilde{\omega}_{n-1} \circ F: W_n(X) \rightarrow W_n(X) \rightarrow \mathcal{O}_{X_n}$ の image は differential $d: \mathcal{O}_{X_n} \rightarrow \Omega_{X_n/W_n}^1$ の kernel に含まれる. 二枚の W_n -代数の層の準同型 $\theta_n: W_n(X) \rightarrow F_* H^0(X/W_n) \simeq F_* H_{DR}^0(X_n/W_n)$, F は $W_n = W_n(k)$ の Frobenius endomorphism, を得る. 一般の場合, X の上の局所化と貼り合わせの議論により 準同型 $\theta_n: W_n(X) \rightarrow F_* H^0(X/W_n)$ が定義される. このとき,

命題 2.4 θ_n は同型

graded differential W_n -algebra の層 $F_* H^*(X/W_n)$ を X の level n の de Rham-Witt complex とよび, これを $W_n \Omega_X^\bullet$ で表わす. 命題 2.4 から, $W_n \Omega_X^\bullet$ は $W_n(X)$ に同-視される. また $W_1 \Omega_X^\bullet$ は de Rham complex $\Omega_{X/k}^\bullet$ に他ならない.

命題 2.5 graded differential W_n -algebra $W_n \Omega_X^\bullet$ は $W_n(X)$ により生成される. i.e. 任意の $W_n \Omega_X^\bullet$ の local section ω は $\sum a db_1 \wedge \dots \wedge db_r$, a, b_i は $W_n \Omega^0 = W_n(X)$ の local section, の形で書ける.

二枚から, restriction $R: W_n(X) \rightarrow W_{n-1}(X)$ により, graded differential algebra の準同型 $R: W_n \Omega_X^\bullet \rightarrow W_{n-1} \Omega_X^\bullet$ が定義される.

graded differential algebra $W\Omega_X = \varinjlim W_n\Omega_X$ を X の de Rham-Witt complex とよぶ. 定義から, $W\Omega_X$ は X の上の Witt vector の層 $W(X)$ に同一視できる. ここで, 各 transition map $R: W_n\Omega_X \rightarrow W_{n+1}\Omega_X$ は全射なので, 自然な準同型 $W\Omega_X \rightarrow W_n\Omega_X$ もまた全射.

また, décalage $V: W_n(X) \rightarrow W_{n+1}(X)$ による準同型 $V: W_n\Omega_X \rightarrow W_{n+1}\Omega_X$ が定義される. このとき,

- (1) $xVy = V(Fx, y)$, x は $W_n(X)$ の, y は $W_{n+1}\Omega_X$ の local section;
 - (2) $V(xdy) = (Vx)dVy$, x は $W_n\Omega_X$ の, y は $W_n\Omega_X$ の local section;
 - (3) $(dx)Vy = V(x^{p-1}dx, y)$, x は $\mathcal{O}_X$ の, y は $W_{n+1}\Omega_X$ の local section.
- x は x の $W_n(X)$ における multiplicative representative.

が成立する. ここで, $RV = VR$ なので, limit への移行により, $W\Omega_X$ の自己準同型 V を得る. このとき,

- (1)' $xVy = V(Fx, y)$, x は $W(X)$ の, y は $W\Omega_X$ の local section;
 - (2)' $V(xdy) = (Vx)dVy$, x は $W\Omega_X$ の, y は $W\Omega_X$ の local section;
 - (3)' $(dx)Vy = V(x^{p-1}dx, y)$, x は $\mathcal{O}_X$ の, y は $W\Omega_X$ の local section.
- x は x の $W(X)$ における multiplicative representative.

また, 環の準同型 $RF = FR: W_n(X) \rightarrow W_{n+1}(X)$ による graded algebra の準同型 $F: W_n\Omega_X \rightarrow W_{n+1}\Omega_X$ を定義される. このとき,

- (4) $FV = VF = p: W_n\Omega_X \rightarrow W_n\Omega_X$;
- (5) $FdV = d: W_n\Omega_X \rightarrow W_n\Omega_X^{(1)}$;
- (6) $dF = pFd: W_n\Omega_X \rightarrow W_{n+1}\Omega_X^{(1)}$; $Vd = pdV: W_n\Omega_X \rightarrow W_{n+1}\Omega_X^{(1)}$;

(7) $xV_y = V(Fx, y)$, x は $W_n\Omega_X^i$ の, y は $W_{n-1}\Omega_X^i$ の local section;
 さらに limit への移行により, graded differential algebra $W\Omega_X^i$ の自己
 準同型 F を得る. このとき

$$(4') FV = VF = p;$$

$$(5') FdV = d;$$

$$(6') dF = pFd; Vd = pdV;$$

(7') $xV_y = V(Fx, y)$, x は $W\Omega_X^i$ の, y は $W\Omega_X^i$ の local section,
 が成立する. (特に, (5), (5') は重要な公式である)

次に, X を smooth k -scheme of finite type とする. $(X/W_n)_{\text{cris}}$
 を W_n に関する X の crystalline topos. $\mathcal{O}_{X/W_n}$ を $(X/W_n)_{\text{cris}}$ の structure
 sheaf, また, X_{zar} を X の Zariski topos, $u_{X/W_n}: (X/W_n)_{\text{cris}} \rightarrow X_{\text{zar}}$ を自然な
 topos の morphism とする. このとき, $D(X, W_n)$ における同型

$$(I) R u_{X/W_n*} \mathcal{O}_{X/W_n} \cong W_n\Omega_X^i$$

が存在する. したがって, $D(W_n)$ における同型

$$(II) R\Gamma(X/W_n) = R\Gamma((X/W_n)_{\text{cris}}, \mathcal{O}_{X/W_n}) \cong R\Gamma(X, W_n\Omega_X^i).$$

さらに, cohomology 群の同型

$$(III) H^i(X/W_n)_{\text{cris}} \cong H^i(X, W_n\Omega_X^i)$$

を得る. さらに, k が X の上に proper なる, 各 $H^j(X, W_n\Omega_X^i)$ は W_n -module
 of finite length で, $D(W)$ における自然な準同型

$$(IV) R\Gamma(X, W\Omega_X^i) \rightarrow R\varprojlim R\Gamma(X, W_n\Omega_X^i)$$

は同型. したがって, cohomology 群の準同型

$$(V) H^*(X, W\Omega_X^i) \rightarrow \varinjlim H^*(X, W_n\Omega_X^i)$$

は同型. これから, cohomology 群の同型

$$(VI) H^*(X/W)_{\text{cris}} = \varinjlim H^*(X/W_n)_{\text{cris}} \simeq H^*(X, W\Omega_X^i)$$

を得る

remark 26 $S = (S, \mathcal{I}, \gamma) \in \text{PD-scheme}$, $X \in S\text{-scheme}$ とし, γ が X に拡張されると仮定する. このとき, $\text{Cris}(X/S)$ の対象 (U, T, δ) に $\Gamma(T, \mathcal{O}_T)$ に対応させることにより, $\text{Cris}(X/S)$ の上の環の層 $\mathcal{O}_{X/S}$ が定義される. $\mathcal{O}_{X/S} \in \text{Site } \text{Cris}(X/S)$ の, または, $\text{topos } (X/S)_{\text{cris}}$ の structure sheaf とよぶ.

3. de Rham-Witt complex に伴う spectral sequence

k を標数 $p > 0$ の perfect field, $W = W(k)$ を k の上の Witt vector の環, $K \in W$ の分体. また $X \in \text{smooth proper } k\text{-scheme}$ とする. このとき, 次数 i において $p \cdot F$ により, $W\Omega_X^i$ の complex の自己準同型 E が定義される. さらに, E から誘導される $H^*(X/W)$ の自己準同型は crystalline cohomology の上の Frobenius endomorphism と一致する.

さらに, decreasing filtration $(W\Omega_X^{2i}: W\Omega_X^i \rightarrow W\Omega_X^{i+1} \rightarrow \dots)_{i \geq 0}$ により, spectral sequence

$$E_1^i = H^i(X, W\Omega_X^i) \Rightarrow H^*(X/W)_{\text{cris}}$$

(de Rham-Witt complex に伴う (the first spectral sequence))

を得る. 一方, increasing filtration $(W\Omega_X^i: 0 \rightarrow W\Omega_X^0 \rightarrow \dots \rightarrow W\Omega_X^{i-1} \rightarrow Z\Omega_X^i \rightarrow 0)_{i \geq 0}$

によつて spectral sequence

$$E_1^i = H^i(X, \underline{H}^j(W\Omega_X)) \Rightarrow H^i(X/W)_{\text{cris}}$$

(de Rham-Witt complexに伴う the opposite spectral sequence)

を得る. ここで, R から誘導される準同型 $\underline{H}^j(W_n\Omega_X) \rightarrow \underline{H}^j(W_{n-1}\Omega_X)$ は全射.

したがつて, projective system $(\underline{H}^j(W_n\Omega_X))_{n \geq 0}$ は Mittag-Leffler 条件を満たす.

これより, $H^i(X, \underline{H}^j(W\Omega_X)) = \varprojlim H^i(X, \underline{H}^j(W_n\Omega_X))$

定理 3.1. (Illusie-Raynaud) (1) the first spectral sequence は torsion を除いて E_1 で退化する. さらに, $H^i(X, W\Omega_X) \otimes_w K$ は $H^{(i)}(X/W)_{\text{cris}} \otimes_w K$ の part of slopes $[i, i+1[$ に対応する. 特に, $H^j(X, W(X)) \otimes_w K$ は $H^j(X/W)_{\text{cris}} \otimes_w K$ の part of slopes $[0, 1[$ に対応する.

(2) the opposite spectral sequence は torsion を除いて E_2 で退化する. さらに, $H^i(X, \underline{H}^j(W\Omega_X)) \otimes_w K$ は $H^{(i)}(X/W) \otimes_w K$ の part of slopes $]j-1, j]$ に対応する.

remark 3.2 定理 3.1.(1) は Serre [11], Artin-Mazur [1], Bloch [4] の結果の一般化になっている.

remark 3.3. $E = H^i(X/W)_{\text{cris}} \otimes_w K$ とすれば, E は linear operator F を持つ K の上の有限次元線型空間. このとき, 有理数 $\lambda = s/r$, $(s, r) = 1$, に対して $E_\lambda = \{a \in E; F^r a = p^s a\}$ とおけば, 直和分解 $E = \bigoplus E_\lambda$ を得る. E_λ は E の part of slope λ とよぶ.

また, さらに,

- 定理 3.4 (Illusie-Raynaud) (1) the first spectral sequence is finite length を除いて E_2 で退化する
 (2) the opposite spectral sequence is finite length を除いて E_2 で退化する
 (3) the first spectral sequence が E_1 で退化する $\Leftrightarrow$ the opposite spectral sequence が E_2 で退化する

したがって, $E_2^i = \text{Ker}(H^i(X, W\Omega_X^*) \rightarrow H^i(X, W\Omega_X^{*-1})) / \text{Im}(H^i(X, W\Omega_X^*) \rightarrow H^i(X, W\Omega_X^{*-1}))$ は有限型 W 加群. E_2 は E_∞ の good approximation であると言える.

以下, 定理 3.4 (1) の証明の概要を述べる.

R を次数 0 で生成元 F, V により, 次数 1 で生成元 d により, 次の関係式により生成される graded W -algebra とする.

$$(1) F \cdot a = F(a) \cdot F, a \cdot V = V \cdot F(a), a \text{ は } W \text{ の元}; FV = VF = p;$$

$$(2) ad = da, a \text{ は } W \text{ の元}; d^2 = 0; FdV = d$$

このとき, $R = R^0 \oplus R^1$, R^0 は Dieudonné-Cartier algebra, R^1 は d により生成される R^0 上の bimodule. また, $H^i(X, W\Omega_X^*)$ は operator F, V, d により R 上の graded module となる.

ここで, M を R^0 加群とする. M が V -adic topology に対して complete で, 各 $n > 0$ に対して $M/V^n(M)$ が of finite length となるとき, M は V -finite であるという. 例えば, $H^i(X, W(X))$ は V -finite.

命題 3.5. M を V -finite R^0 -module とする. このとき,

- (1) M の V -torsion part は of finite length.

(2) M が V -torsion-free なる, 有限次元の smooth formal group G が存在して G の Cartier module は M に同型となる. さらに, このとき,
 M が free W -module of finite type $\Leftrightarrow G$ が p -divisible. また,
 M が F のある中で 0 になる $\Leftrightarrow G$ が unipotent.

また, G の formal group の exact sequence

$$0 \longrightarrow G' \longrightarrow G \longrightarrow G'' \longrightarrow 0,$$

G' は G の maximal p -divisible subgroup, G'' は unipotent. に対応して, R 加群の exact sequence

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0,$$

M' は free W -module, M'' は F のある中で 0 になる, を得る.

これから,

命題 3.6 M を V -finite R^0 -module とする. このとき M は successive quotient が 次のいずれかの型の V -finite module であるような組成列を持つ. (I) of finite length; (II) W の上に free of finite type; (III) $\hat{G}_a$ with $F=0$.

次に, $M^* = \bigoplus M^i$ を graded R^* -module とする. このとき, $\text{Fil}^n(M^*) = V^n(M^*) + dV^n(M^{*-1})$ とすれば, $\text{Fil}^n(M^*) = \bigoplus \text{Fil}^n(M^i)$ は M^* の graded W -submodule である.

$$F(\text{Fil}^n(M^*)) \subset \text{Fil}^{n-1}(M^*);$$

$$V(\text{Fil}^n(M^*)) \subset \text{Fil}^{n+1}(M^*);$$

$$d(\text{Fil}^n(M^*)) \subset \text{Fil}^n(M^*).$$

$\text{Fil}^n(M')$ は M' の decreasing filtration を与える. 例えは, $M' = H^1(X, W\Omega_X)$ とすれば, $\text{Fil}^n(M') = \text{Ker}(H^1(X, W\Omega_X) \rightarrow H^1(X, W_n\Omega_X))$.

さらに, $Z' = \text{Ker}(M' \xrightarrow{V} M')$, $B' = \text{Im}(M' \xrightarrow{V} M')$ とおく. このとき,

(1) Z' は F で stable であるが, V で stable ではない. また, $\forall a \in Z'$ の元
なる, a もまた Z' の元. したがって, Z' は M' の V -torsion part を含む. さらに,
 $V^{-\infty}(Z') = \{a \in M'; \text{任意の } n > 0 \text{ に対して } V^n a \text{ は } Z' \text{ の元となる}\}$ とおけば,
 $V^{-\infty}(Z')$ は V で stable な最大の Z' の部分 W 加群.

(2) B' は V で stable であるが, F で stable ではない. $F^{\infty}(B') = \bigcup_{n=0}^{\infty} F^n(B')$
とおけば, $F^{\infty}(B')$ は F で stable で B' を含む最小の M' の部分 W 加群.

このとき,

$$0 \subset B' \subset F^{\infty}(B') \subset V^{-\infty}(Z') \subset Z' \subset M'$$

となる.

次に, M' を graded R -module とする. M' が Fil^n -topology に対して
complete で, 各 n, i に対して $M'/\text{Fil}^n(M')$ が of finite length となる
とき, M' は profinite であるという.

定理 3.7. (profinite module の構造) M' を下に有界な profinite
graded R -module とする. このとき,

(1) $F^{\infty}(B')/B'$, $Z'/V^{-\infty}(Z')$ は of finite length.

(2) $F^{\infty}(B')$ は M' で closed で, V のある中で 0 になる. また, $\text{Fil}^n(M')$ による
 $F^{\infty}(B')$ の上に誘導される位相は $dV^{-n-1}(M')$ による定義される位相と一致
する. さらに, $M'/F^{\infty}(B')$ は V -finite.

(3) $M^*/V^\infty(Z')$ は V -torsion-free V -finite module で、 F のある n で 0 になる。

さらに、

命題 3.8. M^* を有界な profinite graded R -module とする。このとき、 M^* は successive quotient カ次のいずれかの型の profinite module であるような組成列を持つ。

(I) (one degree) (a) of finite length; (b) W の上に free of finite type; (c) $\hat{G}_a$ with $F=0$

(II) (involve two degrees) $k[[T]] \xrightarrow{d} k[[T]]$, on the left $F=0$, $V(T^n)=T^{n+1}$; on the right $V=0$, $F(1)=0$, $F(T^n)=T^{n-1}$ ($n>0$), で
(a) d は全射で長さ l の kernel を持つ, i.e. $d(1)=\dots=d(T^{l-1})=0$, $d(T^{l+n})=T^n$; (b) d は単射で長さ l の cokernel を持つ, i.e. $d(T^n)=T^{n+l}$.

次に問題になるのは cohomology 群 $H^i(M^*)=Z^i/B^i$ の有限性である。これについて、

補題 3.9. M^* を有界な profinite graded R -module とする。このとき、次の条件は同値。

- (a) 各 i に対して $V^\infty(Z^i)/F^\infty(B^i)$ は有限型 W 加群;
- (b) 各 i に対して $H^i(M^*)=Z^i/B^i$ は有限型 W 加群;
- (c) R 加群 M^* の組成列に 命題 3.8 の (Ic) の型の R 加群は現れない。

graded R -module M^* が有界で profinite で 補題 3.9. の同値な条件を満たすとき、 M^* は coherent であるという。

定理 3.10. graded R -module $H^j(X, W\Omega_X^i)$ は coherent.

これから、各 E_1^j は有限型 W 加群. ここで, the first spectral sequence は torsion を除いて E_1 で退化するので, finite length を除いて E_2 で退化することがわかる.

4. applications

定理 3.4. から the first spectral sequence の E_1 -term について幾つかの結果が得られる.

命題 4.1. $H^0(X, W\Omega_X^i)$ は free W -module (of finite type)

命題 4.2 (Torsten Ekedahl) $H^1(X, W\Omega_X^i)$ は有限型 W 加群.

また, $N = \dim X$ とすれば, F は $W\Omega_X^N$ の上で双射, したがって, $H^j(X, W\Omega_X^N)$ の上で双射. これから,

命題 4.3. $H^j(X, W\Omega_X^N)$ は有限型 W 加群.

したがって, 特に,

定理 4.4. (Nygaard) X を k の上の complete smooth surface とする. このとき, the first spectral sequence は E_2 で退化する. さらに, 次の条件は同値

- (a) the first spectral sequence は E_1 で退化する;
- (b) $d: H^2(X, W\Omega_X^0) \rightarrow H^2(X, W\Omega_X^1)$ は零射;
- (c) $H^2(X, W\Omega_X^0)$ は有限型 W 加群;

(d) X の formal Brauer group $\widehat{\text{Br}}(X)$ は p -divisible.

Supersingular K3 surface は定理 4.4. の同値な条件を満たさない例を与える (Nygaard [8], [9]).

references

1. M. Artin - B. Mazur, Formal groups arising from algebraic varieties, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup 10 (1977)
2. P. Berthelot, Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique $p > 0$, LN 407, Springer.
3. P. Berthelot - A. Ogus, Notes on Crystalline cohomology, Math. Notes 21, Princeton.
4. S. Bloch, Algebraic K-theory and crystalline cohomology, Publ. Math. IHES 47 (1978)
5. A. Grothendieck, Crystals and the de Rham cohomology of schemes, in <Dix exposés sur la cohomologie des schémas> North Holland.
6. L. Illusie, Complexe de de Rham-Witt et cohomology cristalline, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup 12 (1979)
7. P. Monsky, Formal cohomology I (with G. Washnitzer) Ann of Math 88 (1968), II ibid 88 (1968), III ibid 93 (1971).

8. N. Nygaard, Closedness of regular 1-forms on algebraic surfaces, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.* 12 (1979)
9. N. Nygaard, A p -adic proof of the non-existence of vector fields on K3 surfaces, *Ann. of Math.* 110 (1979)
10. A. Ogus, Cohomology of the infinitesimal site, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.* 8 (1975)
11. J.-P. Serre, Sur la topologie des variétés algébriques en caractéristique p , *Symp. Intern. de Topologia Algebraica*, Mexico (1958)
12. J.-P. Serre, Quelques propriétés des variétés abeliennes en caractéristique p , *Amer. Journ. of Math.* 80 (1958)
13. M. Raynaud, Études de la torsion dans la première suite spectrale (preprint)
14. L. Illusie - M. Raynaud, Complexe de de Rham-Witt et cohomologie cristalline (preprint) in *Seminaire de Géométrie Algébrique d'Orsay* 1979/80.