

von Neumann 代数の extension property

とその応用について

山形大 理 富 山 淳

§1. 序

Banach 空間 E が extension property (以下簡単のため EP とかく) をもつというのは、任意の Banach 空間 F とその任意の部分空間 G に対して線型連続写像 $T: G \rightarrow E$ が与えられたとき、 T を F へ E へあげて F に拡大出来ることである。これは又同値な定義として、 E を含む任意の Banach 空間 F から常に F から E への射影が存在することともいえる。このような空間の構造は幾人かの人達によって研究されたが最終的な結果は荷見[5]によって与えられ、 E はある Stonean 空間上の連続関数環と同型になることが知られている。さて後者は作用素環的に見れば可換な AW^* -代数であり、従ってこの特殊なものとして可換な von Neumann 代数は上のような性質をもっているわけである。このようなことを荷見にこそでは E と F を C^* -代数でとりかえたときは何が起るかを考えてみる。

中でも興味があるのは E が von Neumann 代数の時であり、この
 ような意味で筆者は先に羽毛田との共著[6] において extension
 property を導入したが von Neumann 代数の標準表現につ
 いての議論の不備なところでの基本定理も不十分が実がわ
 かった。幸い現在では最近の富田-竹崎の理論[20]により
 この実がわかれつつあるのでここで議論も比較的すま
 してきている。本稿の後半はこの応用として C^* -代数の新し
 い類別を考える。

§2. Extension property の定義

~~この~~ この節と次節では与える C^* -代数はすべて 単位元を
もつものとする。以下の議論の元になるのは $\mathbb{N}$ の 1 の射
 影について正型性より次のことが出てくるといえることであ
 る。

定理 A. ([23]) A を C^* -代数, B を $\mathbb{N}$ の C^* -部分代数と
 し、 π を A より B への $\mathbb{N}$ の 1 の射影と取る。ここで $\pi(1_A)$
 $= 1_B$ とする。 ($1_A, 1_B$ はそれぞれ A, B の単位元)。この時次のこ
 とが成り立つ。

- 1) π は positive 写像である。
- 2) $\pi(a \times b) = a \pi(x) b$ ($a, b \in B$)
- 3) $\pi(x)^* \pi(x) \leq \pi(x^* x)$

一般に A より B へ射影 π が存在したとき

$$\pi_1(x) = \pi(1_B \times 1_B)$$

とすれば π_1 については $\pi_1(1_A) = 1_B$ となる。よって以下にあっては $1_A = 1_B$ と常に仮定しても議論の本質は失われない。

Proposition 2.1. C^* -代数 B について次つことは同値である。

1) B を含む任意の C^* -代数 A より B に 1 が 1 の射影が存在する

2) 任意の C^* -代数 A と φ の任意の自己共役部分空間 S (但し $1_A \in S$) について、 S より B への completely positive な写像 θ で $\theta(1_A) = 1_B$ を満たすものは常に A より B への completely positive 写像に拡大出来る。

理由は 1 が 1 の射影は completely positive であること、([27]) と 2) が $B = B(H)$ の時には成立ちること ([2; 定理 1.2.3]) より出てくる。

定義 2.1. (単位元をもつ) C^* -代数 B が上の性質を満たす時 extension property をもつと云う。

定義より次つことは容易に示しかつかる。

補題 2.1. EP は $\ast$ -同型 について不変である。

補題 2.2. EP をもつ C^* -代数は monotone closed である。

ここで C^* -代数の中の自己共役元の有界有向増大列が常に上限をもつとき、この代数を monotone closed とする (cf. [10])。

上記 Arveson の結果を再び用いれば、次のように EP の定義を弱めることが出来る。

Proposition 2.2. C^* -代数 B が EP をもつことと、 B があるヒルベルト空間 H 上へ表現 (忠実) ρ をもち、 $B(H)$ より $\rho(B)$ にノルムが 1 の射影が存在することとは同値である。

§3. von Neumann 代数の場合。

以下の節に次の定理を引用する ([6], [26])。

定理 B. M_1, M_2 は H 上、 N_1, N_2 は K 上の von Neumann 代数とする。今 π_1, π_2 をそれぞれ M_1, N_1 より M_2, N_2 へのノルムが 1 の射影とすると、ノルムが 1 の射影

$$\pi: M_1 \otimes N_1 \longrightarrow M_2 \otimes N_2$$

が存在して $\pi(a \otimes b) = \pi_1(a) \otimes \pi_2(b)$

定理 3.1. M は H 上の von Neumann 代数とすると、 M が EP をもつことと M' が EP をもつことは同値である。

証明. 先ず M が H 上に標準表現の形で作用しているもの

とする ([21] 参照). 即ち H 上に conjugate linear で且つ
 $J^2 = 1$ とする J が存在して作用素 J が存在して JMJ
 $= M'$ と成っているものとす. 今これを仮定して $B(H)$ より
 M へのノルム 1 の射影 π とする

$$\pi_1(x) = J\pi(JxJ)J \quad (x \in B(H))$$

は $B(H)$ より M' への射影を与える. $2) \Rightarrow 1)$ も同様に言えるか
らこの場合には定理が成立する. ~~von Neumann~~ von Neumann
代数は標準表現をもちることが現在では知られているから ([20],
[21]) 定理を完結するには結局次のことを証明すればよいこ
とになる.

補題 3.1. M が性質 2) をもつとき M と $*$ -同型な von
Neumann 代数 N ($\text{on } K$) も又性質 2) をもつ.

証明) ヒルベルト空間 K_0 を適当に次元を高くとれば
 $H \otimes K_0$ と $K \otimes K_0$ への ampliation $M \otimes 1$ と $N \otimes 1$ は spatially
isomorphic にある. 今 $\pi \in B(H)$ より M' への射影とする. 定
理 3 より $B(H \otimes K_0)$ より $M' \otimes B(K_0)$ への射影が存在する. よ
って $(N \otimes 1)'$ への射影 π_1 が存在する. $\varphi \in B(K_0)$ の normal
state とし L_φ をそれに対応した左 φ -写像 ([26], [28]) と
すると

$$\pi_2(x) = L_\varphi(\pi_1(x \otimes 1)) \quad (x \in B(K))$$

は $B(K)$ より N' へのノルム 1 の射影である.

I型の von Neumann 代数は, 常に, commutant が可換な忠実表現をもつからすべて EP をもつことがわかる.

次に I 型以外の EP をもつ von Neumann 代数の構成について次の結果が言える.

定理 3.2. H 上の von Neumann 代数 M が EP をもつ von Neumann 部分代数 M_α の有向増大列より生成されるか又は有向減少列の共通部分としてかけるならば M 自身も又 EP をもつ.

証明. 前定理から後局にわたるのみ証明すれば十分である. π_α を M_α への射影とする. 今 $\mathcal{L}(B(H), B(H))$ を $B(H)$ 上の有界線型作用素をつくる代数とし, 其中に次の位相を与える.

$$T_\alpha \longrightarrow T \iff T_\alpha(a) \longrightarrow T(a) \quad \sigma\text{-weakly} \\ \forall a \in B(H).$$

$\mathcal{L}(B(H), B(H))$ はこの位相によってその単位球が compact になる. π を $\{\pi_\alpha\}$ の極限の一つとする. 任意の $x \in B(H)$ と index α について $\beta > \alpha$ ならば $\pi_\beta(x) \in M_\alpha$ となるから $\pi(x) \in M_\alpha$. よって $\pi(x) \in M$ となり, π は M への 1 の射影であることがわかる.

以上から II, III 型の von Neumann 代数については任意の Hyperfinite factor 及びその commutant は EP を持つことが

言えたことになる。

次に EP をもたない von Neumann 代数であるが次の様なことがある。 G を γ の共役類が (単位元の時を除いて) すべて無限個になるような可算 discrete 群とする。 $A(G)$ を G の左正則表現から生成される von Neumann 代数とする。 $A(G)$ は II_1 型の factor であることが知られているがこれについて

定理 3.3. $A(G)$ が extension property をもつことと、 G が amenable であることは同値である。

証明. π を $A(G)$ への射影として $A(G)$ 上の normal faithful trace とすると、 $\tau \pi(\tau)$ の $\ell^\infty(G)$ 上への制限は G の左不変平均になる。逆は、 $A(G)$ のユニタリ群は正則表現による G を部分群として含んでいると考えると、Day の不動点定理により

$$\overline{\text{con}}(uxu^* \mid u \text{ は } A(G) \text{ のユニタリ}) \cap A(G)' \neq \emptyset$$

とすることが得られ、これから [18] に於ける議論により $A(G)'$ が EP をもつことが結論出来るのである。ここで上の記号は $\{uxu^*\} (x \in B(H))$ の weakly closed な convex hull を意味する。

non-amenable 群の典型的な例は、2 つの生成元をもつ自由群であり、これは又 G に付くような条件を明らかに満足するから、これからつくられた $A(G)$ は EP をもたない。こ

$A(G)$ はよく知られているように non-hyperfinite factor の例にもなっている。が更に今述べている non-hyperfinite factor は皆群 G が上の non-amenable 群の典型に比較的に近い構造をもっているように思える。amenability は hyperfinite 性との関連ではとりあげられなかったが Extension property と hyperfinite 性との関連と合せて興味ある問題であると思う。

EP をもたない von Neumann 代数を更に求めることにしては次のテンソル積についての結果がある。証明は定理 B の σ - σ -写像を用いなければならない。

定理 3.4 $M \otimes N$ が EP をもつのは M, N 共に EP をもつとき、かつ時に限る。

§4. E 型の C^* -代数, 及び NE 型の代数

GCR, NGCR 代数とよく知られた C^* -代数の類別は表現論的には意味がなかったものであったが他方構造論的には GCR 代数の inductive limit が NGCR 代数になつたように思われる面がある。そこでここではこの利点をとりつつ構造論的に自然な C^* -代数の 1 つの類別を提唱する。

C^* -代数 A の表現 ρ について $\rho(A)$ の弱位相による閉包 $\widehat{\rho(A)}$ が von Neumann 代数として EP をもつとき、 ρ を extension property

をもつもの。前節の議論を使えば境 [5] [6] の議論は一般論として次の形にまとめられる。

定理 4.1. A を C^* -代数 B 上の C^* -部分代数とする。

ρ を B の表現で EP をもつものとする。 A の表現 $\hat{\rho}$ と von Neumann 代数 M 上の部分代数 N が存在して、 $\widehat{\rho(A)'}^{\prime}$ と M' , N と $\widehat{\rho(B)}$ は同型であり、 M より N への normal な 1 の射影が存在する。更に ρ が factor 表現であれば $\hat{\rho}$ も factor 表現になることが出来る。

つまり B が A に比してどのように小さくなる部分代数であっても B の EP をもつ表現は上の意味で A の表現に影響を及ぼすわけである。一般に normal な射影が存在する時は M が N に比べて ^{より}単純な代数にはなり得るから ([24])、例えば ρ を III 型の表現とすると $\hat{\rho}$ も III 型の部分表現をもつ。従って A は III 型の表現をもつ。 $A = B(H)$, $B =$ III 型の hyperfinite factor などが上の結果の好例であり [15] に使われた部分である。

定理の証明. $\tilde{A}, \tilde{B}$ を A, B の second dual とする。 $\tilde{A}$ は von Neumann 代数と見とられ、 $\tilde{B}$ は自然な形でその弱閉な部分代数とみることが出来る。補題 2.1 より表現 ρ の形を、 $\tilde{B}$ の central projection により $\rho(x) = xp$ とかけてるものと仮定しよう。 $\tilde{B}_p$ は EP をもつから $p\tilde{A}p$ より $\tilde{B}_p$ に 1 の射影 π が存在する。そこで今写像 $\pi(A \rightarrow \tilde{B}_p \rightarrow)$ を

$$\Phi(x) = \pi(pxp)$$

と定義する. $\tilde{\Phi} \in \tilde{A}$ の σ -weakly continuous を拡大とする.

$$\Phi(axb) = ap\Phi(x)bp \quad (a, b \in B, x \in A)$$

であるから $\tilde{\Phi}$ は任意の $a, b \in \tilde{B}_p$, $x \in \tilde{A}$ について

$$\tilde{\Phi}(axb) = a\tilde{\Phi}(x)b$$

を見出す. よって $\tilde{\Phi}$ の $p\tilde{A}p$ への制限は $\tilde{B}_p$ への normal を射影になる. $c(p) \in p$ の $\tilde{A}$ での central support として

$$\hat{p}(x) = xc(p), \quad M = p\tilde{A}p, \quad N = \tilde{B}_p$$

とすれば求めるものが得られる.

次に ρ を factor 表現とする. $\mathcal{L}(A, \tilde{B}_p)$ に定理 3.2 での証明の位相を与えよう.

$F = \{\Phi \mid \|\Phi\| \leq 1, \Phi \geq 0, \Phi(axb) = ap\Phi(x)bp \quad a, b \in B\}$ とする. F は単位球の π の閉凸集合になる. $\mathcal{L}(A, \tilde{B}_p)$ の単位球は compact であつたから F は extreme point を持つ. ここで F の non-zero を extreme point Φ とする. $\tilde{B}_p$ は factor だから $\tilde{\Phi}(p) = \lambda p$, したがって $\lambda = 1$ が言えて $\tilde{\Phi}$ は射影になることがわかる. $\{e_\alpha\} \in p\tilde{A}p$ の直交する central projection で $\tilde{\Phi}(e_\alpha) = 0$ とするものを極大 family とする. $z = p - \sup e_\alpha$ とおくと $\tilde{\Phi}$ は $z\tilde{A}z$ の π に対して faithful になる. 今 $z\tilde{A}z$ が non-trivial を central projection z_1 をもつたとする.

$$\tilde{\Phi}(z_1) = \lambda p \quad 0 < \lambda < 1$$

よって $x \in p\hat{A}p$ について

$$\Phi'_1(x) = \frac{1}{\lambda} \tilde{\Phi}(xz_1), \quad \Phi'_2(x) = \frac{1}{1-\lambda} \tilde{\Phi}(x(z-z_1))$$

とかくとこはうけ共に $p\hat{A}p$ より $\tilde{B}p$ への positive 写射影になる。

よって更に $x \in A$ について

$$\Phi_1(x) = \Phi'_1(pxp), \quad \Phi_2(x) = \Phi'_2(pxp)$$

とかくと $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{T}$ で且つ

$$\Phi = \lambda \Phi_1 + (1-\lambda) \Phi_2,$$

こは Φ が縮退であることに反する。よって $z\hat{A}z$ は factor

になる。 $C(z)$ を z の central support として以下

$$\hat{\Phi}(x) = xC(z), \quad M = z\hat{A}z, \quad N = \tilde{B}z$$

とかけよう。

定義 4.1. C^* -代数 A の表現がすべて EP をもつ時 A は E 型の C^* -代数と呼ぶ。

定義から GCR 代数は E 型である。更に定理 3.2 を考えれば次のことが成立する。

Proposition 4.1. E 型の C^* -代数の C^* -inductive limit は又 E 型である。

よって UHF 代数又 Matroid 代数 などは E 型になる。

イデアルの表現は常に表現空間と弱閉包を変えずに全体代数の表現に拡大出来るから、E 型の代数のイデアルは又 E 型

であり、又その homomorphic image も又 E 型である。しかし

"E 型の代数の C^* -部分代数は又 E 型であるか?"

と云うことはわかってゐる。もしこれが肯定的なら興味ある応用例を考へることが出来る。

GCR , $NGCR$ の類別の元になつてゐる次の Kaplansky の結果であつたが E 型の代数になつても同様のことが成立つると云うのが本節の基本定理である。

定理 (Kaplansky) 任意の C^* -代数 A には常に最大の GCR イデアル K が存在して、 A/K は non-zero な GCR イデアルをもちゐる。

定理 4.2. 任意の C^* -代数 A には常に最大の E 型イデアル K_1 が存在して、 A/K_1 は non-zero な E 型イデアルをもちゐる。

証明には次の 2 つの補題を引けばよく、どちらにもイデアルの表現の拡大の特性を用ひればよい。

補題 4.1. $\underbrace{2 \times 2}_{\text{E 型}} \text{イデアルの和} (C^*\text{-代数になる})$ は又 E 型である。

補題 4.2. C^* -代数 A とイデアル I になつて A/I は I が共に E 型ならば A 自身が E 型である。

この定理により C^* -代数 A が non-zero な E 型イデアルをもちゐるとして A を NE 型の代数と云うことにする。

最近 B.E. Johnson は [11] に於いて strongly amenable な C^* -代数と λ -cross を導入した. Banach 代数の cohomology 理論を主としてとり扱っている [11] の出發点はここでの我々の議論と大分かけ離れてゐるが彼の λ -cross は、その表現がすべて Schwartz [18] の意味での性質 P をもつ C^* -代数として定義出来るので、これは E 型の代数の一部分に存する. [1] に於いてはこれについて Proposition 4.1, 定理 4.2 の前手後述定理 4.3 の前手と同じ結果が証明されてゐる. GCR を含み C^* -inductive limit で閉じてゐる C^* -代数の λ -cross としては他に竹崎 [19] によつて定義された性質 T をもつ C^* -代数の λ -cross があつた. ここで C^* -代数 A が性質 T をもつとは任意の C^* -代数 B に對して、その代数的テンソル積 $A \otimes B$ の中に compatible C^* -ノルムが一通りしかあつたことである. これについては

"E 型の C^* -代数と、性質 T をもつ C^* -代数の λ -cross は同じである" か

と云ふことが予想されてゐる. 一般の C^* -テンソル積の構造と云ふのは例とば M を II, III 型の factor とした時の既約 C^* -代数 $C^*(M, M')$ の構造なども含んでゐるので、その説明は非常に興味がある. しかし、その一つの鍵になる性質 T をもつた C^* -代数と云ふのは現在では [19] に示された例 (2 つの生成元と 1 つ自由群の正則表現からつくられた C^* -環) のみしかあつた

である。上の予想が肯定的であればこの方面で大きな理論的進歩を与えることになる。

補題 4.3 von Neumann 代数 M が互いに可換な 2 つの部分代数 N_1, N_2 より生成されてゐるものとする。もし N_1 及び N_2 が EP をもてば M も EP をもつ。

証明 $M' = N_1' \cap N_2'$ が EP をもつことを示せばよい。今 π_1, π_2 を N_1', N_2' へのノルムが 1 の射影とすると、 $\pi = \pi_1 \pi_2$ は定理 A を与へる条件より、 M' への射影になる。

定理 4.3 A, B を C^* -代数、 $A \otimes B$ をノルム α, β による C^* テンソル積とする。 I を $A \otimes B$ での E 型イデアルとすると、任意の A の pure state φ (B の pure state ψ) について $\overline{R_\varphi(I)} (\overline{L_\psi(I)})$ は又 B (resp. A) の E 型イデアルになる。

証明 $J = \overline{R_\varphi(I)}$ (ノルム閉包) とおく。 J は $\{0\}$ とする。 J は [; 補題 1] より B のイデアルになる。 ρ を J の H 上の non-degenerate 表現とし ρ を B への canonical 表現 ω と ρ でかく。 ρ_φ を φ による A の既約表現 (on H_φ)、又 $\varphi = {}^t \rho_\varphi(\omega)$ とおく。このとき任意の $x \in I$ について (又任意の $B(H)$ 上の σ -weak 位相で連続な汎関数 ψ について) フビニ写像の性質から

$$\begin{aligned} \langle \rho(R_\varphi(x)), \psi \rangle &= \langle R_\varphi(x), {}^t \rho(\psi) \rangle = \langle x, \varphi \otimes {}^t \rho(\psi) \rangle \\ &= \langle x, {}^t \rho_\varphi \otimes {}^t \rho_\psi(\psi) \rangle = \langle \rho_\varphi \otimes \rho(x), \omega \otimes \psi \rangle \end{aligned}$$

$$= \langle R_w(p_f \otimes f(x)), \psi \rangle$$

$$\text{よって } f(R_f(x)) = R_w(p_f \otimes f(x)).$$

$M = \widehat{p_f(A)} \otimes \widehat{f(B)}$ とおくと, central projection z が存在

して $\widehat{p_f \otimes f(I)} = Mz$. ここで $z = 1 \otimes z_1$ とかける. 一方

$$\begin{aligned} R_w(Mz) &= R_w(\widehat{p_f(A)} \otimes \widehat{f(B)}z_1) = \widehat{f(B)}z_1 \\ &= \widehat{R_w(p_f \otimes f(I))} = \widehat{f(J)} = \widehat{f(B)} \end{aligned}$$

従って $z_1 = 1$ i.e. $\widehat{p_f \otimes f(I)} = M$. よって M は EP である.

定理 3.4 より $\widehat{f(B)} = \widehat{f(J)}$ は EP であることがわかる

注意. 証明から φ の後定めた factor 表現とすることだけ
使ったが M が EP であるならば当然 $\widehat{p_f(A)}$ も EP であるわけ
である. このことは φ を p_f が EP であるものとする factor
state とすると $R_\varphi(I) = \{0\}$ となることから得る.

上記定理と補題 4.3 を用いれば次の結果を得る.

定理 4.4 C^* -代数 A, B について

(1) 任意の C^* -クロスノルム β について, $A \otimes_\beta B$ は A, B 共に
E 型, かつ時に限って E 型になる.

(2) 最小の C^* -クロスノルム α について, $A \otimes_\alpha B$ は A または
 B が NE 型の時, かつ時に限って NE 型の C^* -代数となる.

任意の β について (2) が成り立つかどうかは NGCR 代数の

時と同じような困難にあつて ([25] 参照) 現在の所わかつてゐる。

§5. E型^との代数の Stone-Weierstrass の定理.

本質的ではなかつた議論を簡単にするたうに与える C^* -代数はすべて単位元をもつものとする。こゝで Stone-Weierstrass の定理と共につは次の主要的(?)な問題である。

A を C^* -代数 B をその部分代数としたときもし B が A の pure state の集合を区別すれば $B=A$ となるか?

この問題についての現状はまだ完全解決には遠い。こゝでの議論はこの問題とも以下のような関係をもつてゐる。先ず EP をもつ C^* -代数については Akemann [1] で指摘されてゐるよりに

定理 5.1. C^* -代数 A, B が SW-定理の状態にあるものとする。もし B が EP をもてば $A=B$ である。

証明は上の状況を状態に於いては B の pure state の A への state extension は一意であること、従つて π を射影 φ を A の pure state とすると $\varphi = {}^t\pi(\varphi|B)$ となることから容易に残りが導びかれる。 $\varphi|B$ が又 B の pure state にあるのはこの状態について知られてゐる結果の一つである。

最近境 [17] は SW-定理の知られてゐる一番広い形を示したが [17] の鍵となつてゐる次の補題を仮定すれば残りの議論は個々の場合にわたる必要なく次の形に統一出来る。

補題 5.1 (境 [17]) $A \in H$ 上 separable な C^* -代数 B をその部分代数とする。 $C \in A'$ の maximal abelian な von Neumann 部分代数とし、 von Neumann 代数 $R(A, C)$ を与える。今 $A \otimes R(A, C)$ の $\varphi \sim \|\varphi\| \leq 1$, $\varphi(b) = b$ ($b \in B$) とする E 型写像 φ があつたとする。このときもし B が SW-定理の状態にあれば $\varphi(a) = a$, $a \in A$ となる。

定理 3.2. separable C^* -代数 $A \supset B$ が SW-定理の状態にあつたとする。 $f \in A$ の separable を表現で $f|B$ が EP もあつたとすると

$$\widehat{f(A)} = \widehat{f(B)} \quad (3.3 \text{ 例 5})$$

証明. $\pi \in \widehat{f(B)}$ への射影とすると上の定理より π は $f(A)$ の元を動かさぬ。よつて $f(A) \subset \widehat{f(B)}$ 。故に $\widehat{f(A)} = \widehat{f(B)}$

系. ~~次の定理~~ 上の状態で B が E 型の代数とすると $A = B$ である。

証明. $B \subsetneq A$ とすると B 上で 0 とする A の (0 でない) 自己共役汎関数 φ が存在する。 $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$ を φ の正負部分

の部分を分解とし $[f] = f^+ + f^-$ とおく。 $[f]$ による表現 $p_{[f]}$ は上記定理の条件をみたすがつくりうから

$$\overline{p_{[f]}(B)} \subsetneq \overline{p_{[f]}(A)}$$

であり矛盾を起す。

文 献

1. C. A. Akemann, The Stone-Weierstrass problem,
J. Functional Analysis 4 (1969), 277-294
2. W. Arveson, Subalgebras of C^* -algebras, Acta Math.
123 (1969), 141-224
3. J. Dixmier; Les C^* -algèbres et leurs représentations,
Paris 1964.
4. D. B. Goodner, Projections in normed linear spaces,
Trans. A. M. S., 69 (1950), 84-108
5. M. Hasumi, The extension property of complex
Banach spaces, Tôhoku Math. J., 10 (1958), 135-142
6. J. Hakeda - J. Tomiyama, On some extension property
of von Neumann algebras, ibid, 19 (1967), 315-323
7. J. Hakeda, On property P of von Neumann algebras,
ibid. 19 (1967), 238-242
8. H. Choda and M. Echigo, A new algebraic property

of certain von Neumann algebras, Proc. Japan Acad.
39(1963), 651-655

9. R. V. Kadison, Operator algebras with a faithful weakly closed representation, Ann. Math., 64(1956)
175-181
10. R. V. Kadison & G. K. Pedersen, Equivalence in operator algebras, to appear in Math. Scand.
11. B. E. Johnson, Cohomology theory in Banach algebras
(preprint)
12. F. J. Murray and J. von Neumann, On rings of operators ~~algebras~~ IV, Ann. Math., 44(1943), 716-808
13. L. Nachbin, A theorem of the Hahn-Banach type for linear transformations, Trans. A. M. S., 68
(1950), 28-46.
14. S. Sakai, On topological properties of W^* -algebras,
Proc. Japan Acad., 33(1957), 434-439
15. S. Sakai, On a problem of Calkin, Amer. J. Math.,
88(1966), 935-941
16. S. Sakai, On a characterization of type I C^* -algebras,
Bull. A. M. S., 72(1966), 508-512
17. S. Sakai, On the Stone-Weierstrass theorem of

- C^* -algebras, Tohoku Math. J., 22(1976) 191-199
18. J. Schwartz, Two finite, non-hyperfinite, non-isomorphic factors, Comm. Pure Appl. Math., 16(1963), 19-26
 19. M. Takesaki; On the cross-norm of the direct product of C^* -algebras, Tohoku Math. J., 16(1964), 111-119.
 20. M. Takesaki, Tomita's theory of modular Hilbert algebra and its application, Springer lecture note 128 (1970)
 21. M. Takesaki, The theory of operator algebras, Univ. of California at Los Angeles, 1969/70
 22. M. Tomita, Standard forms of von Neumann algebras, Mimeographed note 1967.
 23. J. Tomiyama, On the projection of norm one in W^* -algebras, Proc. Japan Acad., 33(1957), 608-612
 24. J. Tomiyama, 同 I II, Tohoku Math. J., 10(1958) 37-41. 同 I III, ibid. 11(1959), 125-129
 25. J. Tomiyama, Applications of Fubini type theorem to the tensor products of C^* -algebras, Tohoku Math. J., 19(1967), 213-226.
 26. J. Tomiyama, On the tensor product of von Neumann algebras, Pacific J. Math., 30(1969), 125-
 27. J. Tomiyama, Tensor products and projections of

norm one in von Neumann algebras, Seminar Univ.
of Copenhagen, Fall 1970.

28. J. Tomiyama, Applications of Fubini mappings to
tensor products of Banach algebras, Seminar
Univ. of Copenhagen, 1971.