

球関数の新谷 lifting について

阪大・理 川中宣明 (Noriaki Kawanaka)

§1. 新谷 lifting

G を有限群,

$$\sigma: g \longrightarrow \sigma g, \quad g \in G$$

を, G の自己同型とする. G の σ による不動点の全体を G_σ , G と $\langle \sigma \rangle$ の半直積 $G \langle \sigma \rangle$ を $\tilde{G}$ と書く. m を σ の位数として, "ソルム写像"

$$N: G \longrightarrow G$$

を

$$N(g) = (g\sigma)^m = g \cdot \sigma g \cdot \sigma^2 g \cdot \cdots \cdot \sigma^{m-1} g, \quad g \in G$$

によって定義する. G が可換なら $N(g) \in G_\sigma$ となるが一般には, $N(g)$ を含む G の共役類 ${}^G N(g)$ が σ で保たれり, という程度のことが成り立たない. 次の条件 (S) を考える.

条件 (S) 任意の $g \in G$ に対して ${}^G N(g) \cap G_\sigma$ は G_σ の一つの共役類である.

さて, $R: G \longrightarrow GL(W)$ を G の複素既約表現とすると, $\sigma R = R \circ \sigma^{-1}$ も G の既約表現である. いま $\sigma R \sim R$ と仮定すれば, $\tilde{G}$ の既約表現

$$\tilde{R}: \tilde{G} \longrightarrow GL(W)$$

で $\tilde{R}|_G = R$ であるものが (同値を除いて m 個) 存在する. 条件 (S) のもとで, 次のように定義する.

定義 (新谷) G_0 の既約表現 $Q: G_0 \longrightarrow GL(V)$

が, G の既約表現 R で $\sigma R \sim R$ となるものに,

"持ち上がる" とは,

$$\text{trace } \tilde{R}(g_0) = \varepsilon \text{ trace } Q(n(g))$$

がすべての $g \in G$ に対して成立することである.

ここに ε は $\varepsilon^m = 1$ を満たす複素数で g には関係しない. また $n(g)$ は $G_{\mathbb{N}(g)} \cap G_0$ の任意の元である.

条件 (S) が満たされ, G_0 の任意の既約表現が, G の既約表現へ持ち上がる場合として, 例えば, 次の 2 つが知られている.

Case (G) $(|G|, m) = 1$ の場合.

(1968 G. Glauberman [1] の結果. Glauberman

自身の formulation は, 上と少しだけ異なる.)

Case (S) $G = GL_n(\mathbb{F}_q^m)$ ($\mathbb{F}_q$ = 元数 q の有限体),

$\langle \sigma \rangle = Gal(\mathbb{F}_q^m/\mathbb{F}_q)$ の場合.

(新谷卓郎 1976.^[2] 土井, 長沼両氏による保型形式,

および対応する Dirichlet 級数の持ち上げについての結果を発展させた斎藤裕氏の仕事 [5] の本質を, 新谷氏は, 局所体・アデール環上の reductive 群の表現の持ち上げという形で定式化した [3], [4]. 上記 1976 年の論文は, 有限体上でも同様のことが成立することを示したもの.)

良く知られているように, 対称空間上の球関数, あるいは, Hecke 環の指標は, 群の既約指標の概念の一般化と考えることができる。そこで, “球関数の新谷 lifting” とは何か? という問題を考えてみたい。

§2. Hecke 環 $M(H \backslash G / K)$

有限群の Hecke 環とその表現の一般論については, Curtis, Reiner の本 [6] の中 1 巻, §11D があるが, ここでは, その結果を, もう少し一般化しておく。

G を有限群, H と K をその部分群とする。 G の群環

$\mathbb{C}G$ のべき等元 $e_H = |H|^{-1} \sum_{h \in H} h$, $e_K = |K|^{-1} \sum_{k \in K} k$ を用いて

$$\mathcal{H}(H \backslash G / K) = e_H \mathbb{C}G e_K \ (\subset \mathbb{C}G)$$

とおく。明きさかに $\mathcal{H}(H \backslash G / K)$ は, $\mathbb{C}G$ の部分環である。Curtis-Reiner の本の Hecke 環は $H=K$ の特別の場合である。 $\mathcal{H}(H \backslash G / K)$ は, また, 左から $\mathcal{H}(H \backslash G / H)$ が, 右から $\mathcal{H}(K \backslash G / K)$ が作用する加群とみることもできる。“Hecke 環” $\mathcal{H}(H \backslash G / K)$ およびその表現の一般論について, 次のことがわかる。

1° $\mathcal{H}(H \backslash G / K)$ は, 半単純とは限らない。また, 単位元を持つとは限らない。

2° $\{x_i \mid i \in I\}$ を $H \backslash G / K$ の完全代表系とすると,

$$[x_i] = \frac{|HK|}{|x_i^{-1}Hx_i \cap K|} e_H x_i e_K, \quad i \in I$$

は, $\mathcal{H}(H \backslash G / K)$ の基底をなし, その構造定数 $\in \mathbb{Z}$ となる。

3° $\mathcal{H}(H \backslash G / K)$ のすべての既約指標は, $\mathbb{C}G$ の既約指標の $\mathcal{H}(H \backslash G / K)$ への制限として得られる。また,

$\mathbb{C}G$ の相異なる既約指標 χ_1, χ_2 に対して,

$$\chi_i|_{\mathcal{H}(H \backslash G / K)} \neq 0, i=1,2 \Rightarrow \chi_1|_{\mathcal{H}(H \backslash G / K)} \neq \chi_2|_{\mathcal{H}(H \backslash G / K)}$$

4° $\mathbb{C}G$ の既約指標 χ, χ' に対して

$$\begin{aligned} \chi(1) |G|^{-1} \sum_{i \in I} |Hx_i:K| \chi(e_H x_i e_K) \overline{\chi'(e_H x_i e_K)} \\ = \begin{cases} 0 & \chi \neq \chi' \\ \chi(e_H e_K) & \chi = \chi' \end{cases} \end{aligned}$$

5° $\mathcal{N}(H \backslash G / K)$ が半単純 ($\Leftrightarrow$ べき零な両側イデアルはない)

かつ可換となるための必要十分条件は,

$\langle \chi, 1_H^G \rangle \neq 0$, $\langle \chi, 1_K^G \rangle \neq 0$ となる G の ^{任意の} 既約指標 χ に対し, $\langle \chi, 1_H^G \rangle = \langle \chi, 1_K^G \rangle = 1$ と $\chi(e_H e_K) \neq 0$ が成り立つことである.

定義 $\mathcal{N}(H \backslash G / K)$ の元 $\varphi \neq 0$ が $H \backslash G / K$ 上の球関数であるとは,

任意の $f \in \mathcal{N}(H \backslash G / H)$ と任意の $g \in \mathcal{N}(K \backslash G / K)$ に対して

$$f \cdot \varphi = c_\varphi(f) \varphi \quad \exists c_\varphi(f) \in \mathbb{C}$$

$$\varphi \cdot g^* = d_\varphi(g) \varphi \quad \exists d_\varphi(g) \in \mathbb{C}$$

であること. ここに, $*$ は $\mathcal{N}(K \backslash G / K)$ の標準的な反自己同型である.

このとき $f \mapsto c_\varphi(f)$, $g \mapsto d_\varphi(g)$ は, それぞれ $\mathcal{N}(H \backslash G / H)$, $\mathcal{N}(K \backslash G / K)$ の 1 次元表現となる.

とくに $\mathcal{N}(H \backslash G / K)$ が半単純, 可換である場合, G の既約指標 χ で, $\chi(e_H e_K) \neq 0$ を満たすものに対して,

$$\varphi_\chi = \sum_{i \in I} |Hx_i:K| \overline{\chi(e_H x_i e_K)} e_H x_i e_K$$

は $H \backslash G / K$ 上の球関数である。逆に, $H \backslash G / K$ 上のすべての球関数は φ_χ の定数倍で, $\mathcal{N}(H \backslash G / K)$ は, φ_χ 達で張られる。

$$\begin{aligned} \text{また,} \quad c_{\varphi_\chi}(e_H \times e_H) &= \chi(e_H \times e_H) \\ d_{\varphi_\chi}(e_K \times e_K) &= \overline{\chi(e_K \times e_K)}, \quad x \in G \end{aligned}$$

である。

§3 $\mathcal{N}(\Delta G \backslash G \times G / \Delta_\sigma G)$ について

G を有限群とし, σ をその自己同型とする。直積群 $G \times G$ の部分群として, 次の2つを考える。

$$\Delta G = \{(x, x) \mid x \in G\} : \text{対角部分群}$$

$$\Delta_\sigma G = \{(\sigma x, x) \mid x \in G\} : \sigma \text{ でひねった対角部分群}$$

このとき, $\mathcal{N}(\Delta G \backslash G \times G / \Delta_\sigma G)$ は, 可換。一般には半単純とは限らないが, 例えば, §1 の $\text{Case}(G)$, $\text{Case}(S)$ の場合は半単純である。 $G \times G$ の既約指標 ψ が,

$$\langle 1_{\Delta_\sigma G}^{G \times G}, \psi \rangle \neq 0, \quad \langle 1_{\Delta G}^{G \times G}, \psi \rangle \neq 0$$

となるための必要十分条件は, 以下が

$$\psi = \chi \otimes \bar{\chi}, \quad \chi \text{ は } \sigma\chi = \chi \text{ をみたす } G \text{ の既約指標}$$

と書けることである。また, このとき

$$(\chi \otimes \bar{\chi})(e_{\Delta G}(g, 1) e_{\Delta_\sigma G}) = \frac{\tilde{\chi}(\sigma^{-1}) \tilde{\chi}(g\sigma)}{\chi(1)^2}$$

が成り立つ。ただし, $\tilde{\chi}$ は $\{1\}$ の $\tilde{R}$ の指標である。 $\sigma = \text{id.}$ のときは, 良く知られた式

$$(\chi \otimes \bar{\chi})(e_{\Delta G}(g, 1) e_{\Delta G}) = \frac{\chi(g)}{\chi(1)}$$

になる。これらの式と Glauberman 1968, 新谷 1976 の結果をあわせると, $(\text{case}(G), (\text{case}(S))$ の場合は,

$$\Delta(G_0) \backslash G_0 \times G_0 / \Delta(G_0) \text{ 上の球関数}$$

と

$$\Delta G \backslash G \times G / \Delta_r G \text{ 上の球関数}$$

とが, ノルム写像による対応を通して同一視できることがわかる。これは, Glauberman や新谷の結果の球関数的な言い換えである。次節で単なる言い換えでないような例を示す。

§ 4 $\mathcal{N}(Sp_{2n}(\mathbb{F}_{q^2}) \backslash GL_{2n}(\mathbb{F}_{q^2}) / U_{2n}(\mathbb{F}_q))$ など

G を有限群, j と τ をその自己同型で

$$j^2 = \tau^2 = \text{id.}, \quad j\tau = \tau j$$

を満たすものとする。次の^(2.7の)両側剰余類集合を考える。

$$G_j \backslash G / G_{j\tau}, \quad (G_\tau)_j \backslash G_\tau / (G_\tau)_j$$

$$\alpha_j : G \longrightarrow G \quad (x \longrightarrow jx^{-1}x)$$

という写像を考えると, 次のことが成り立つ。

- $g, h \in G$ に対して $G_j g G_{j\tau} = G_j h G_{j\tau}$
 $\Leftrightarrow \alpha_j(g) = \tau x^{-1} \alpha_j(h) x \quad (\exists x \in G_{j\tau})$
- $g, h \in G_\tau$ に対して $(G_\tau)_j g (G_\tau)_j = (G_\tau)_j h (G_\tau)_j$
 $\Leftrightarrow \alpha_j(g) = x^{-1} \alpha_j(h) x \quad (\exists x \in (G_\tau)_j)$

よって,

$$G_j \backslash G / G_{j\tau} \xleftrightarrow{\sim} \alpha_j(G) \text{ の } G_{j\tau} \text{ の元による } \tau\text{-共役類}$$

$$(G_\tau)_j \backslash G_\tau / (G_\tau)_j \xleftrightarrow{\sim} \alpha_j(G_\tau) \text{ の } (G_\tau)_j \text{ の元による共役類}$$

これから後は次の2つの場合だけを考える。

Case (G') $|G|$ が odd

Case (S') $G = GL_{2n}(\mathbb{F}_{q^2})$, $\langle \tau \rangle = Gal(\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q)$

$$j: g \longrightarrow J^{-1} \tau g \tau J, \quad J = \begin{pmatrix} 0_n & 1_n \\ -1_n & 0_n \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{このとき, } G_j = Sp_{2n}(\mathbb{F}_{q^2}), \quad G_{j\tau} \cong \underbrace{U_{2n}(\mathbb{F}_q)}_{\text{ユ=ユニタリ群}} \\ G_\tau = GL_{2n}(\mathbb{F}_q) \\ (G_\tau)_j = Sp_{2n}(\mathbb{F}_q) \end{array} \right)$$

この場合, 任意の $g \in G$ に対し

$$G_j (\alpha_j(g)^\tau \alpha_j(g)) \cap G_\tau$$

は, $\alpha_j(G_\tau)$ の $(G_\tau)_j$ の元によるひとつの共役類になること,
 従って, $(G_\tau)_j \backslash G_\tau / (G_\tau)_j$ のひとつの元を決めることが,
 わかる。さらに, この対応により

$$G_j \backslash G / G_{\tau_j} \xrightarrow{\sim} (G_{\tau})_j \backslash G_{\tau} / (G_{\tau})_j$$

となり,

$$G_j \not\cong G_{\tau_j} \longleftrightarrow (G_{\tau})_j \times (G_{\tau})_j, \quad \begin{matrix} g \in G \\ x \in G_{\tau} \end{matrix}$$

のとき

$$\frac{|G_j \not\cong G_{\tau_j}|}{|G_j| |G_{\tau_j}|} = \frac{|(G_{\tau})_j \times (G_{\tau})_j|}{|(G_{\tau})_j|^2}$$

となることもわかる。これらを用いて、次のことが証明できる。

定理 $\text{Case}(G')$, $\text{Case}(S')$ のとき, $\mathcal{N}(G_j \backslash G / G_{\tau_j})$ は可換, 半単純で, $G_j \backslash G / G_{\tau_j}$ 上の球関数と $(G_{\tau})_j \backslash G_{\tau} / (G_{\tau})_j$ 上の球関数とは, 上の対応を通して同一視できる。

注意 $\text{Case}(S')$ のとき,

$$(G_{\tau})_j \backslash G_{\tau} / (G_{\tau})_j = \text{Sp}_{2n}(\mathbb{F}_q) \backslash \text{GL}_{2n}(\mathbb{F}_q) / \text{Sp}_{2n}(\mathbb{F}_q)$$

上の球関数は, [7] で求められている。

文 献

- [1] G. Glauberman: Correspondences of characters for relatively prime operator groups, *Canad. J. Math.* 20 (1968), 1465 - 1488.
- [2] T. Shintani: Two remarks on irreducible characters

of finite general linear groups, J. Math. Soc. Japan 28 (1976), 396 - 414.

[3] T. Shintani : On irreducible unitary characters of a certain group extension of $GL(2, \mathbb{C})$, J. Math. Soc. Japan 29 (1977), 165 - 188.

[4] T. Shintani : On liftings of holomorphic cusp forms, Proc. Symp. Pure Math. 33, Part 2, Providence (1979), 79 - 110.

[5] H. Scuto : Automorphic Forms and Algebraic Extensions of Number Fields, Lecture Notes in Math., Kyoto Univ. 1975.

[6] C.W. Curtis, I. Reiner : Methods of Representation Theory, Vol 1, Wiley-Interscience, 1981.

[7] E. Banai, N. Kawanaka, S.-Y. Song : The character table of the Hecke algebra $\mathcal{H}(GL_{2n}(\mathbb{F}_q), Sp_{2n}(\mathbb{F}_q))$, J. Alg. 129 (1990), 320 - 366.