

## 27. 純間欠カオスにおける揺動スペクトルの臨界挙動

鹿大・理 井上 政義, 藤坂 博一

時系列の拡散的性質（平均値，分散）については従来から良く調べられている。ところが間欠的性質はキュムラントの高次展開を用いても解析できないので，この性質の研究は殆どなされていない。我々の方法はこの両性質を統一的に解析できるので，間欠的性質を強くもつ時系列は，我々の「揺動スペクトル理論」の良い適用例となる。そこで，極限において純間欠性を示す時系列を導入し，これに揺動スペクトル理論を適用することにする。

このタイプの時系列  $\{u_j\}$  の一つを次の様にして導入する。変数  $u_j$  は  $x_j$  の関数とし， $x_j$  は  $x_{j+1} = f(x_j)$  で生成されたとする。マップ  $f(x)$  としてベルヌーイ変換  $B(p, 1-p)$  を採用する。すなわち，

$$f(x) = \begin{cases} x/p, & (0 \leq x < p) \\ (x-p)/(1-p), & (p \leq x < 1) \end{cases} \quad (1)$$

ここで  $p$  はコントロール・パラメーターであり，その変域は  $0 \leq p \leq 1$  とする。

上のマップを用い，時系列  $\{u_j\}$  を次の様に定義する，

$$u_j(x_j) = \begin{cases} u^{(1)} = a/p, & (0 \leq x_j \leq p) \\ u^{(2)} = (b-a)/(1-p), & (p \leq x_j < 1) \end{cases} \quad (2)$$

ここで  $a$  と  $b$  は定数であり， $u^{(1)} > u^{(2)}$ ，すなわち  $a > bp$  を仮定している，定数  $b$  は時系列の平均値を与えている，すなわち  $b = \langle u_j \rangle = pu^{(1)} + (1-p)u^{(2)}$ 。

コントロール・パラメーターが臨界値 0 (1) に近づくと図 1 に示した様に，時系列は強い間欠性を示す。この時系列の  $\lambda_q$  は次の様に求まる。

$$\lambda_q = \frac{1}{q} \ln [pe^{q(a/p)} + (1-p)e^{q(b-a)/(1-p)}] \quad (3)$$

この  $\lambda_q$  の  $p$  依存性を図 2 に示している。 $p$  が 0 (1) に近づくと  $\lambda_q$  は逆 L 字型になり， $u_j$  の平均値  $\lambda_{q=0}$  は，図の様に連続した値をとりうるようになる。すなわち，この場合は時系列を一つの平均値と分散では特徴づけられない。平均値が連続分布するという極めて興味深い結果が得

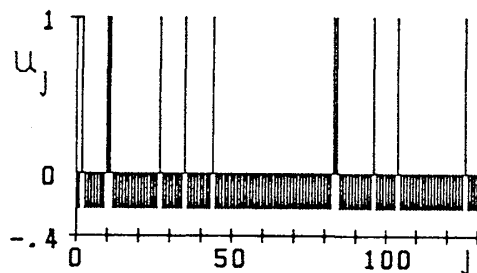


図 1

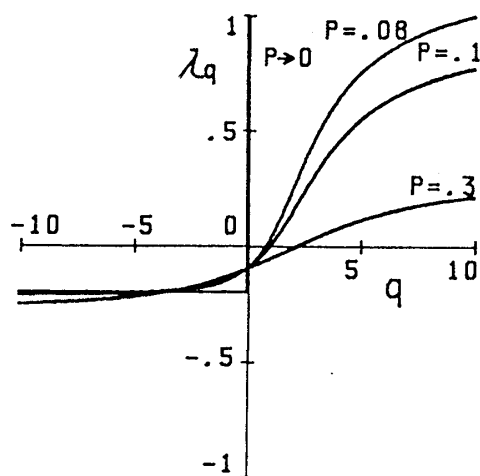


図 2

られるという事がこの純間欠カオスの特徴である。

る。拡散係数  $D = (a - bp)^2 / [2p(1-p)]$ , 3

次キュムラント係数  $\kappa_3 = (1-2p)(a-bp)^3 /$

$[6p^2(1-p)^2]$  と計算できるので,  $\lambda_q$  の収束

半径  $\kappa$  は  $\kappa \cong D / |\kappa_3| = 3p(1-p) / |(1-2p)(a-bp)|$ ; ( $p \neq 1/2$ ) と求まる。これより  $p$

が臨界値 0 (1) に近づくと, この時系列は純間欠的性質を示すことがわかる。この間欠カオスで

は, ラミナー状態の平均持続時間  $l$  は  $l = 1/p (1/(1-p))$  であり, バーストの強度は  $u^{(1)} =$

$a/p$  ( $u^{(2)} = (b-a)/(1-p)$ ) であるから,  $p$  が臨界値 0 (1) に近づくと  $l$  も  $u^{(1)}$  ( $u^{(2)}$ ) も大き

くなり発散する。そして, 大きな 1 つのバーストと 1 つの小さくて長いラミナーが統計的につ

りあい, 平均値  $\langle u_j \rangle$  が一定値  $b$  をもつようになっている。

このような間欠カオスでメタファーできる自然現象の一つとして雷がある。雷の現象では, ゆっくりと集積した電荷が短時間のうちに突然, 放電をする。この例では, バーストが放電, ラミナー状態が電荷の集積に対応している。

揺動スペクトル理論を用いると (3) 式より,

$$\begin{aligned} \alpha(q) &= \frac{d}{dq} (q \lambda_q) \\ &= \frac{a e^{q(a/p)} + (b-a) e^{q(b-a)/(1-p)}}{p e^{q(a/p)} + (1-p) e^{q(b-a)/(1-p)}}. \end{aligned} \quad (4)$$

$\alpha$  の最大値  $\alpha_{\max}$  および最小値  $\alpha_{\min}$  は, それぞれ  $\alpha_{\max} = \alpha(\infty) = u^{(1)} = a/p$ ,  $\alpha_{\min} = \alpha(-\infty) = u^{(2)} = (b-a)/(1-p)$  で与えられる。ただし  $u^{(1)} > u^{(2)}$  を用いた。これよりスケール依存平均値  $\alpha_n \equiv (1/n) \sum_{j=0}^{n-1} u_j$  の揺動範囲は  $\alpha(-\infty) \leq \alpha_n \leq \alpha(\infty)$  である。また平均値  $\langle \alpha_n \rangle = b$  は  $\alpha(0)$  で与えられる。大きな  $n$  に対して,  $\alpha_n$  が  $\alpha'$  という値をとる確率は漸近的に  $\rho_n(\alpha') \sim \exp[-n\sigma(\alpha')]$  と表わされる, ここに現れた  $\sigma(\alpha)$  が揺動スペクトルである。この揺動スペクトルにより, 揺動量  $\alpha_n$  の平均値, 揺動の範囲および, ある値の実現確率がわかる。また揺動の分散は  $d^2\sigma(\alpha)/d\alpha^2|_{\alpha=\lambda_0}$  より求まる。

揺動スペクトルは(3)式と(4)式を用いると次のように計算できる。

$$\begin{aligned}\sigma(\alpha) &= q^2 \frac{d\lambda_q}{dq} = q[\alpha - \lambda_q] \\ &= \ln \frac{A(\alpha)^{\alpha d p(1-p)}}{p A(\alpha)^{d a(1-p)} + (1-p) A(\alpha)^{d(b-a)p}}\end{aligned}\quad (5)$$

ここで

$$A(\alpha) \equiv \frac{a - \alpha p}{\alpha(1-p) - (b-a)}, \quad d \equiv \frac{1}{bp - a}.\quad (6)$$

揺らぎの範囲より、 $\alpha > \alpha(\infty)$  と  $\alpha < \alpha(-\infty)$  では  $\sigma(\alpha) = \infty$  である。

$\alpha - \sigma(\alpha)$  曲線で表現された、 $\sigma(\alpha)$  のスペクトル構造が図3に示されている。スペクトルは  $\alpha = \langle \alpha_n \rangle = b$  で最小値  $\sigma(\alpha) = 0$  をとる。

この最小値の近傍で  $\sigma(\alpha)$  は漸近的に次のように展開できる。

$$\sigma(\alpha) = \frac{p(1-p)}{2(a-bp)^2} (\alpha - b)^2 + \dots\quad (7)$$

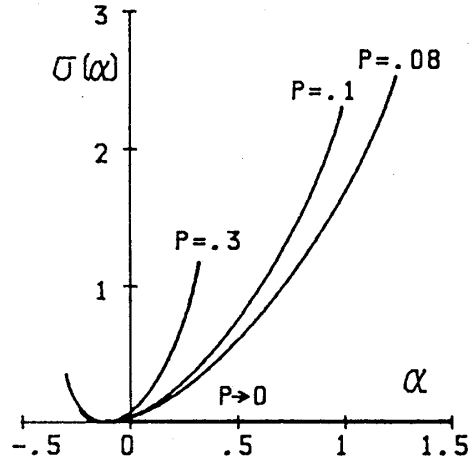


図3

平均値  $\alpha = \langle \alpha_n \rangle = b$  の近くは放物曲線になっており、これが中央極限定理の結果に対応している。この放物曲線((7)式の初項の係数)が純間欠カオス転移点  $p = 0$  (1) で消失するという重要な結果を(7)式は示している。

他方、 $\alpha = \alpha_{\pm}$  ( $\alpha_{+} \equiv \alpha(\infty)$ ,  $\alpha_{-} \equiv \alpha(-\infty)$ ) の近傍では  $\sigma(\alpha)$  は次の様に展開できる。

$$\sigma(\alpha) = \frac{1}{\tau_{\pm}} - \frac{p(1-p)}{a-bp} |\alpha - \alpha_{\pm}| \ln |\alpha - \alpha_{\pm}|^{-1},\quad (8)$$

ここで  $\tau_{+} (= 1/\ln(1/p))$  と  $\tau_{-} (= 1/\ln[1/(1-p)])$  はラミナー状態のコヒーレンス時間である。上式は、 $\alpha_n$  が平均値より大きくずれて実現する確率を特徴づけている。

臨界点  $p = 0$  (1) の近傍では、揺動スペクトルのスケーリング関数を求めることができる。これは次の様に表わされる。

$$\frac{\sigma(\alpha)}{p} = S(y_{\epsilon})\quad (9)$$

ここで

$$S(y) = (1 + \varepsilon y) \ln(1 + \varepsilon y) - \varepsilon y \quad (10)$$

$$y_{\varepsilon=+} = \frac{\alpha - b}{a}, \quad y_{\varepsilon=-} = \frac{\alpha - b}{a - b} \quad (11)$$

上式で、 $\varepsilon = +$ と $\varepsilon = -$ はそれぞれ $p \rightarrow 0$ 、 $p \rightarrow 1$ に対応している。これは図4に示した。

パラメーター $q$ を複素数 $z$ に拡張し、複素分配関数 $Z(z)$ を $Z(z) \equiv \exp(z\lambda_z)$ で導入する。方程式 $Z(z) = 0$ の根を求めると、 $\lambda_q$ が(3)式の場合は、

$$z_n = \frac{p(1-p)}{a-bp} \left[ \ln \frac{1-p}{p} + (2n+1)\pi i \right] \quad (12)$$

; ( $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )

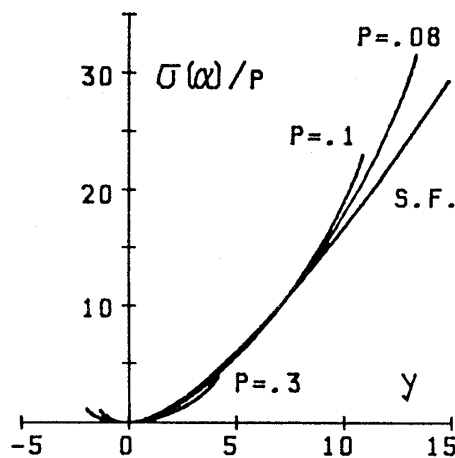


図4

ここで $i^2 = -1$ 、この場合、 $Z(z)$ は超越整関数であるから、根は $Z(z)$ の1位の零点と一致している。

コントロール・パラメーター $p$ が $p \rightarrow 0$  (1)のとき根が原点に集積する。すなわち、実根の出現が転移に対応している。

## 29. 保存系カオスの新しいユニバーサリティ予想

早大・理工 相 沢 洋 二

保存系のカオスには、これまでもいくつかの普遍則が知られている。(Greene, Kadanoff, Mackay, etc) それらは或る種の周期軌道に注目する方法(ファイゲンバウム・アプローチ)に依存している。ここではカオスとKAMトーラスの境界に存在する新しい統計的普遍則について最近我々が得た結果をレビューする。

次の二つの基本的制約によって、KAMトーラス近傍の運動には長時間相関がある。

(a) 写像の連続性に由来する淀み運動の出現

(b) 島トーラスの階層的分布による多重エルゴード運動の出現

その結果として、たとへばトーラス付近の運動の待ち時間分布が逆ベキ則に従い、パワー・ス