

# Optimal stopping の問題について

愛媛大・教養 森本宏明 (Hiroaki Morimoto)

§1. Stochastic control の一般論では取扱えない, 一つの問題として optimal stopping の問題がある。  $(x_t)$  を (1) diffusion process 又は (2) point process とするとき, 利得  $J(T) = E[a(x_T) + \int_0^T b(s, x_s) ds]$  ( $T$ : stopping time) を最大にすることである。 (1) の場合, [1], [2], [5] 等で論じられている。 ここでは (2) の場合を含めて, マルチンゲール理論を適用する立場から論ずる。 もっと一般的な問題の formulation をしよう。

Formulation  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  を complete な確率空間,  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  を  $\mathcal{F}$  の sub- $\sigma$ -fields の増加列で通常の条件をみたすとする。  $(X_t)$  を与えられた右連続, adapted process で  $E[\sup_t X_t^+] < \infty$ ,  $E[X_t^-] < \infty \quad \forall t \geq 0$ , をみたすとする。 以後  $X_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \sup X_t$  とみなす。

$$\bar{C} = \{T; \text{stopping time}, E[X_T] < \infty\},$$

$$C = \{T \in \bar{C} : \text{finite}\} \quad \text{とおく.}$$

利得を  $J(T) = E[X_T]$  で定義するとき  $C$  又は  $\bar{C}$  の中で利得を最大にせよ。

この問題の起源は Wald の Sequential Analysis (1947) にあり, Snell (1952) は  $(X_t)$  のかわりに r.v. の列  $(X_n)_{n=1,2,\dots}$  の場合に解決した。その考え方を deterministic な場合に述べよう。すべし  $t$  で  $\mathcal{F}_t$  は trivial とすると  $(X_t)$  は  $t$  のみの通常の一変数関数となる, 更に,  $t \rightarrow X_t$  は連続としよう。  $Y_t = \sup_{s \geq t} X_s$  とおくと,  $Y_t$  は次の性質をもつ:

(1)  $t \rightarrow Y_t$  : 連続, 減少関数,

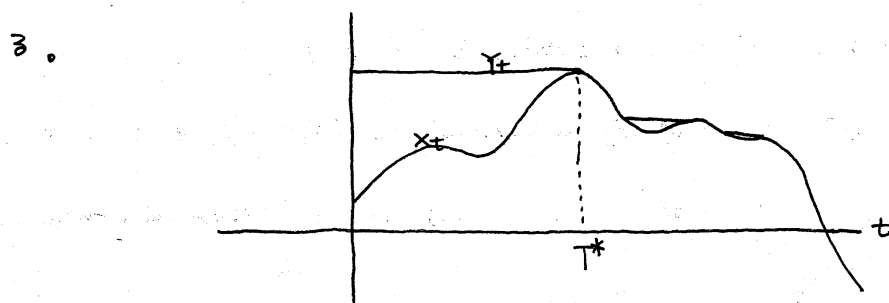
(2)  $X_t \leq Y_t, \quad Y_t \geq 0,$

(3)  $Y_0 = \sup_t X_t$  .

$T^* = \inf \{t | X_t = Y_t\}$  とおくと, これが求めるもの,

optimal stopping time である。更に  $X_t \rightarrow -\infty (t \rightarrow \infty)$

のときには  $T^* < \infty$ 。事情を図式にすると次の様になる。



これを random 化しようとするのが Snell の考えである。  
即ち次の定理が成立する。

定理 1. 次の性質をもつ右連続 supermartingale  $(Y_t)$  が存在する:

- (1)  $X_t \leq Y_t, \quad \forall t \geq 0,$
- (2)  $Y_t = \operatorname{ess\,sup}_{T \in \bar{C}, T \geq t} E[X_T | \mathcal{F}_t],$
- (3)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \sup Y_t = \lim_{t \rightarrow \infty} \sup X_t,$
- (4)  $E[Y_0] = \sup_{T \in \bar{C}} E[X_T] = \sup_{T \in \bar{C}} E[X_T].$

証明の概略。 先ず, クラス  $\{E[X_v | \mathcal{F}_t]: v \in \bar{C}, v \geq t\}$  は "sup" operation に関していることが基本的である。  
これより, (2) の右辺を  $Y'_t$  とおくと, stopping time の列  $T_n \in \bar{C}, T_n \geq t$  により  $Y'_t = \lim_n \uparrow E[X_{T_n} | \mathcal{F}_t]$  なるものがとれる。従って,

$$\begin{aligned} E[Y'_t | \mathcal{F}_s] &= \lim_n E[E[X_{T_n} | \mathcal{F}_t] | \mathcal{F}_s] \\ &= \lim_n E[X_{T_n} | \mathcal{F}_s] \leq Y'_s, \quad t \geq s, \end{aligned}$$

即ち,  $(Y'_t)$  は supermartingale である。

更に  $(Y'_t)$  は右連続 modification  $(Y_t)$  をもつことが示される。(1) は明らか。(3), (4) は time discrete の場合と同じ様にして出る。

この  $(Y_t)$  は Snell envelope と呼ばれる。 Optimal stopping time の存在定理として次の定理 2, 3 が知られている。

定理 2.  $(X_t)$  は次の性質をもつとする：

$$T_n \in C \uparrow T \Rightarrow \limsup X_{T_n} \leq X_T \text{ on } \{T < \infty\}.$$

このとき,

$$T^* = \inf \{t \mid X_t = Y_t\} : \text{optimal in } \bar{C}.$$

更に,  $\lim_{t \rightarrow \infty} X_t = -\infty$  ならば  $T^* < \infty$  かつ optimal in  $C$ .

定理 3.  $(X_t)$  は次の性質をもつとする：

$$(i) \quad E[\sup_t |X_t|] < \infty,$$

$$(ii) \quad T_n \uparrow T \text{ in } \bar{C} \Rightarrow E[X_{T_n}] \rightarrow E[X_T].$$

このとき,

$$T^* = \inf \{t \mid X_t = Y_t\} : \text{optimal in } \bar{C}.$$

そして Snell envelope  $(Y_t)$  も (ii) の性質をもつ。

更に,  $S$  を stopping time とするとき,

$$D(S) = \inf \{t \mid t \geq S, X_t = Y_t\} : \text{optimal in } \bar{C},$$

$$\text{i.e., } E[X_{D(S)}] = \sup_{T \geq S} E[X_T].$$

定理 2 は Fakker (1970), Thompson (1971), 定理 3 は Bismut-

Skalli (1977) による。尚これらの定理で左からの連続性がおとせない事は容易にわかる。

定理4.  $T \in \bar{C}$  とするとき,  $T$  が optimal であるための必要十分条件は  $X_T = Y_T$  かつ  $(Y_{t \wedge T})$  : martingale となることである。

Penalty method コンピュータ的視点より Snell envelope を求める事, 近似法が問題となる。[1] は変分不等式, [2] は semi-group を用いて, 1つの近似法, いわゆる penalty method を論じている。ここではマルチンゲールによる取扱いを述べる。先ず Banach space  $W$  を次の様に定義する:

$$W = \{x = (x_t): \text{右連続, adapted process, } \|x\| = \|\sup_t |x_t|\|_{L^\infty} < \infty\}.$$

以後,  $X_t$  は次の形

$$X_t = e^{-\alpha t} f_t + \int_0^t e^{-\alpha s} g_s ds \quad (f, g \in W, \alpha > 0)$$

の場合のみを考える。  $(X_t)$  の Snell envelope  $(Y_t)$  は

$$Y_t = e^{-\alpha t} z_t + \int_0^t e^{-\alpha s} g_s ds$$

となる。ここで  $(z_t)$  は右連続, adapted process で

$$z_t = \operatorname{ess\,sup}_{T \geq t} E[e^{-\alpha(T-t)} f_T + \int_t^T e^{-\alpha(s-t)} g_s ds | \mathcal{F}_t].$$

問題は  $(z_t)$  を何かで近似せよという事になる。

問題解決の key point は,  $V$  を  $W$  の subclass として

$$V = \{x = (x_t) \in W : \}$$

$$(i) \quad f_t \leq x_t, \quad \forall t \geq 0,$$

$$(ii) \quad (\bar{e}^{\alpha t} x_t + \int_0^t \bar{e}^{\alpha s} g_s ds) : \text{supermartingale} \}$$

とすると,  $(z_t)$  は  $V$  の元で, かつ minimal, i.e.,

$\forall x \in V$  に対して  $x \geq z$  になっていることである。

実際, (i), (ii) は容易に check できる。又 Doob の任意

抽出定理より,  $T \geq t$  に対して,

$$E[\bar{e}^{\alpha T} x_T + \int_0^T \bar{e}^{\alpha s} g_s ds | \mathcal{F}_t] \leq \bar{e}^{\alpha t} x_t + \int_0^t \bar{e}^{\alpha s} g_s ds.$$

故に, (i) を考慮して,

$$E[\bar{e}^{\alpha(T-t)} f_T + \int_t^T \bar{e}^{\alpha(s-t)} g_s ds | \mathcal{F}_t] \leq x_t.$$

結局  $x \geq z$  を得る。

次に non-Markovian の場合に通用する generator  $A$  を導

入しよう。各  $x \in W$ , 各  $\beta > 0$  に対して

$$G_\beta x(t) = E[\int_t^\infty \bar{e}^{\beta(s-t)} x_s ds | \mathcal{F}_t]$$

とおくと,  $G_\beta : W \rightarrow W$  であり 1 対 1, resolvent

equation  $G_\beta - G_\gamma + (\beta - \gamma) G_\beta G_\gamma = 0$  ( $\beta, \gamma > 0$ ) を満たすことが

示せる。よって  $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow W$  を

$$A = \beta - G_\beta^{-1}, \quad \mathcal{D}(A) = G_\beta(W) \quad (\beta \text{ に depend しない})$$

と定義する。deterministic な場合  $A = d^+/dt$  である

ことが簡単な計算より示せる。

マルチンゲールとの関係では

$$\begin{cases} Ax = 0 & \Leftrightarrow x \in W : \text{martingale} \\ Ax \leq 0, x \in \mathcal{D}(A) & \Rightarrow x : \text{supermartingale} \end{cases}$$

が成立する。

定理 5. Penalty equation

$$(\alpha - A) z^\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} (f - z^\varepsilon)^+ = g, \quad (\varepsilon > 0)$$

は unique solution  $z^\varepsilon \in \mathcal{D}(A)$  をもち、各  $t$  に対し  $z$

$$z^\varepsilon(t) \rightarrow z(t) \quad \text{a.s.} \quad (\varepsilon \downarrow 0).$$

証明の概略。作用素  $T_\varepsilon : W \rightarrow W$  を

$$T_\varepsilon x(t) = E \left[ \int_t^\infty \bar{e}^{(\alpha + \frac{1}{\varepsilon})(s-t)} (g_s + \frac{1}{\varepsilon} f \vee x(s)) ds \mid \mathcal{F}_t \right], \quad x \in W,$$

によつて定義すると、 $T_\varepsilon$  は縮小写像となり、不動点  $z^\varepsilon \in W$  をもつ。そして  $z^\varepsilon(t) = G_\alpha(g + \frac{1}{\varepsilon}(f - z^\varepsilon)^+)$  とかける。

これが penalty equation の解である。更に、

$$A \left( \bar{e}^{\alpha t} z^\varepsilon(t) + \int_0^t \bar{e}^{\alpha s} g_s ds \right) = -\bar{e}^{\alpha t} \frac{1}{\varepsilon} (f - z^\varepsilon)^+(t) \leq 0$$

により  $(\bar{e}^{\alpha t} z^\varepsilon(t) + \int_0^t \bar{e}^{\alpha s} g_s ds)$  は supermartingale となる。

$$\text{一方, } \begin{cases} z^\varepsilon(t) \leq z^{\varepsilon'}(t) & (\varepsilon' < \varepsilon) \\ z^\varepsilon(t) \leq z(t), \end{cases}$$

が成立し、 $z^*(t) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} z^\varepsilon(t)$  とおくと  $z^* \in V$  がわかり

minimality より  $z = z^*$  となる。

§2. Optimal stopping の応用や複雑化された optimal stopping の問題として有名なものはいくつかあるが、ここでは直列型の optimal switching の問題を述べよう。

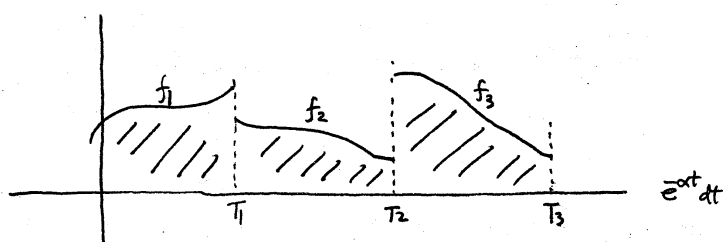
先ず次の様な model を考えよう。  $N$  個の diffusion process  $x_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ) が与えられたとき、 $x_1$  を start し、時刻  $T_i$  で  $x_i$  から  $x_{i+1}$  に switch する process を  $x_{\hat{\tau}}$  とする

$$\text{即ち, } x_{\hat{\tau}}(t) = \begin{cases} x_i(t) & \text{if } T_{i-1} \leq t < T_i \\ 0 & \text{if } t \geq T_N \end{cases}$$

このとき、利得  $J(\hat{\tau}) = E[\int_0^{\infty} e^{-\alpha s} c(x_{\hat{\tau}}(s)) ds] \cong \sum_i E[\int_{T_{i-1}}^{T_i} e^{-\alpha s} c(x_i(s)) ds]$  ,  $(\hat{\tau} = (T_1, T_2, \dots, T_N))$  を最大にせよ。

一般的な formulation  $\mathcal{C} = \{\hat{\tau} = (T_1, T_2, \dots, T_N) \mid 0 = T_0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_N$  stopping time  $\}$  とする。与えられた  $f_i \in W$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ) に対して利得  $J(\hat{\tau}) = \sum_{i=1}^N E[\int_{T_{i-1}}^{T_i} e^{-\alpha s} f_i(s) ds]$  ( $\hat{\tau} \in \mathcal{C}$ ) を最大にせよ。特に、 $N=1$  のときは optimal stopping の問題となっている。

$N=3$ , deterministic な場合は下図の斜線の部分の面積を最大にするように  $T_1, T_2, T_3$  を選ぶことになる。





Snell envelope を一般化して, 定理 1 に対応する次の定理が成立する。

定理 6. 次の性質を満たす  $Z_i \in W$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ) が存在する:

$$(1) \quad Z_1 \geq Z_2 \geq \dots \geq Z_N \geq Z_{N+1} \equiv 0,$$

(2) 任意の stopping time  $S$  に対して,

$$Z_i(S) = \operatorname{ess\,sup}_{\bar{T} \in C_i(S)} E \left[ \sum_{j=i}^N \int_{T_{j-1}}^{T_j} e^{\alpha(t-S)} f_j(t) dt \mid \mathcal{F}_S \right], \quad i=1, 2, \dots, N,$$

$$\therefore \therefore C_i(S) = \{ \bar{T} = (T_1, \dots, T_N) \mid S = T_{i-1} \leq \dots \leq T_N, \text{ stopping times } \},$$

$$(3) \quad (e^{\alpha t} Z_i(t) + \int_0^t e^{\alpha s} f_i(s) ds) : \text{supermartingale} \quad \forall i,$$

$$(4) \quad E[Z_1(0)] = \sup_{\hat{T} \in \mathcal{C}} J(\hat{T}),$$

$$(5) \quad e^{\alpha t} Z_i(t) = \operatorname{ess\,sup}_{T \geq t} E \left[ \int_t^T e^{\alpha s} f_i(s) ds + e^{\alpha T} Z_{i+1}(T) \mid \mathcal{F}_t \right].$$

(5) だけは定理 1 のものに対応していない。  $i$  について

Bellman principle が成立することを示しており基本的な役割をする。

定理 7.  $T_0^* = 0$ ,  $T_i^* = \inf \{ t \geq T_{i-1}^* \mid Z_i(t) = Z_{i+1}(t) \}$  とおくと  $\hat{T}^* = (T_1^*, T_2^*, \dots, T_N^*) \in \mathcal{C}$  は optimal である。

証明の概略。 各  $i$  に対して定理 6 (5) より

$(\bar{e}^{\alpha t} z_i(t) + \int_0^t \bar{e}^{\alpha s} f_i(s) ds)$  は  $(\bar{e}^{\alpha t} z_{i+1}(t) + \int_0^t \bar{e}^{\alpha s} f_i(s) ds)$  の Snell envelope である。これらはすべて定理 3 (ii) の性質をもつことが帰納法でわかる。定理 6 (5) と定理 3 により,

$$\begin{aligned} E[z_1(0)] &= E[\limsup_{T \geq 0} E[\int_0^T \bar{e}^{\alpha s} f_1(s) ds + \bar{e}^{\alpha T} z_2(T) | \mathcal{F}_0]] \\ &= \sup_{T \geq 0} E[\int_0^T \bar{e}^{\alpha s} f_1(s) ds + \bar{e}^{\alpha T} z_2(T)] \\ &= E[\int_0^{T_1^*} \bar{e}^{\alpha s} f_1(s) ds + \bar{e}^{\alpha T_1^*} z_2(T_1^*)]. \end{aligned}$$

更に, 定理 6 (5) により,

$$\bar{e}^{\alpha T_{i-1}^*} z_i(T_{i-1}^*) = \limsup_{T \geq T_{i-1}^*} E[\int_{T_{i-1}^*}^T \bar{e}^{\alpha s} f_i(s) ds + \bar{e}^{\alpha T} z_{i+1}(T) | \mathcal{F}_{T_{i-1}^*}]$$

が示せるので

$$E[\bar{e}^{\alpha T_{i-1}^*} z_i(T_{i-1}^*)] = \sup_{T \geq T_{i-1}^*} E[\int_{T_{i-1}^*}^T \bar{e}^{\alpha s} f_i(s) ds + \bar{e}^{\alpha T} z_{i+1}(T)]$$

となる。再び定理 3 より右辺は  $E[\int_{T_{i-1}^*}^{T_i^*} \bar{e}^{\alpha s} f_i(s) ds + \bar{e}^{\alpha T_i^*} z_{i+1}(T_i^*)]$  に等しい。結局,  $E[z_1(0)] = \sum_{i=1}^N E[\int_{T_{i-1}^*}^{T_i^*} \bar{e}^{\alpha s} f_i(s) ds]$  を得て定理 6 (4) により証明は終る。

最適性の条件は長くなるので省略する。最後に penalization を考えよう。

$\mathcal{U}$  を  $N$  個の process の組の class :

$$\mathcal{U} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \mid x_i \in W \ (i=1, 2, \dots, N),$$

$$(i) \ x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_N \geq x_{N+1} \equiv 0,$$

$$(ii) \ (\bar{e}^{\alpha t} x_i(t) + \int_0^t \bar{e}^{\alpha s} f_i(s) ds) : \text{supermartingale } \forall i \}$$

としよう。  $N$  個の組  $(z_1, z_2, \dots, z_N)$  は  $\mathcal{U}$  の元であっ

で, かつ minimal i.e.,  $\forall (x_1, x_2, \dots, x_N) \in U \Rightarrow x_i \geq z_i, \forall i$ ,  
 であることがわかる。  $i$  についての帰納法と定理 5  
 の方法によつて次の定理が成立する。

定理 8. Penalty equation

$$(\alpha - A) z_i^\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} (z_{i+1}^\varepsilon - z_i^\varepsilon)^+ = f_i, \quad z_{N+1}^\varepsilon \equiv 0$$

の solution  $(z_1^\varepsilon, z_2^\varepsilon, \dots, z_N^\varepsilon)$  が unique に存在して, 各  $t \geq 0$ ,  
 各  $i$  に対して

$$z_i^\varepsilon(t) \longrightarrow z_i(t) \quad \text{a.s.} \quad (\varepsilon \downarrow 0).$$

### 参考文献

- [1] A. Bensoussan and J. L. Lions, Applications des inéquations  
 variationnelles en contrôle stochastique, 1978.
- [2] A. Bensoussan, Stochastic control by functional analysis methods, 1982.
- [3] H. Morimoto, Tôhoku Math. J. 34, (1982), 407-416.
- [4] H. Morimoto, Tôhoku Math. J. 35, (1983), 119-128.
- [5] A. N. Shiriyayev, Optimal stopping rules, 1978.