

n 次ローレンツ群の表現

とくに

ユニタリ表現について.

平井 武

目 次

頁

緒
言論
備

... 2

§1. n 次ローレンツ群の定義とその簡単な性質 ... 5§2. 重要な部分群と G の分解§3. G および部分群の Haar 測度、均質空間上の測度 ... 10.

主 系 列 の 表 現

§4. $K \backslash G = N$ 上 G の表現を構成する ... 16.§5. $L \backslash G = U$ 上 G の表現を構成する ... 22.§6. $L \backslash G = U$ 上 G の表現を分解する ... 25.§7. 2 つの型 G の表現がユニタリ同値である ... 34.

§8. 3 次および 4 次ローレンツ群の表現について ... 38.

補 系 列 の 表 現

§9. class 1 の補系列の表現 ... 43.

§10. 不変な不定符号内積を有する表現の構成とその内積の構造

Infinitesimal method による表現の決定

§11. $G = \mathfrak{L}_n$ の Lie 環と $\mathfrak{L}_n$ の表現の微分係数作用素 ... 55§12. $\mathfrak{L}_n$ の既約表現に対する微分係数作用素の決定と ...
既約表現の分類 ... 59.

§13. 不変な不定符号内積の構造について ... 74.

引 用 文 献

[I] 緒 論

1. この論文では、実準単純 Lie 群である 4 次ローレンツ群 G_0 の表現について述べる。まず、部分群 K による G の分解や Haas 測度などに関し、準備として、主系列ユニタリ表現、および class I の補系列ユニタリ表現も具体的に、適当な函数空間の上に構成する。同時に、これらの表現の種々の性質をあげる。

さらに infinitesimal method によつて、 G の既約表現の作る多様体の構造を研究する。これ、 G に構成したユニタリ表現が、 G の既約表現のうちの主要な位置をしめること、および、離散ユニタリ表現が存在するかどうかという重要な問題に関し、解答を与える。

2. G の群論に関する解説からはいめよう。

群の表現に関する理論は発生以来、数学内部の問題としてのみならず、理論物理学に於ても興味を持たれて来た。いわゆる古典群の行列表現に関し、 G の既約表現を求める問題は、主として、

E. Cartan と H. Weyl によつて完全に解決された。この行列表現、コンパクト群、局所コンパクト群の表現の一般論が作られたが、これらは、はなはだ明快であり、よく知られている。

さらに一般の位相群の表現を取扱うには、古典的な有限次元の行列による表現という立場から脱離して、無限次元の表現を考へるのが適当である。(現在、表現論は、一般の局所コンパクト群についても論じられているが、ここでは Lie 群のみに考察する。) すなわち、表現論と量子力学等に応用するため、4 次ローレンツ群の Hilbert 空間のユニタリ作用素による表現というものが考へられた。これは、数学内部の要請から一般の位相群に拡張されて、このユニタリ表現が定義される。

[定義] 位相群 G の各元 g に対し Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ のユニタリ作用素 T_g が対応して $T_{gh} = T_g \cdot T_h$ かつ、 $g \rightarrow T_g$ が作用素の弱位相で連続なとき、この対応を G のユニタリ表現とよび $\{T_g, \mathcal{H}\}$ と表わす。

コンパクト群に於ては、その既約表現は有限次元であり、それらはあるユニタリ表現に同値である。ところが群がコンパクトでなると、ユニタリ表現に同値でない表現が表れる。一方、有限次元の行列による表現にとどまらず、単位表現をのぞく、その既約表現がユニタリ表現に同値でないという状態は普通のことである。

いま、 T_g を g のユニタリとはかぎらない有界作用素とし T_2 を $\langle T_g, g \rangle$ を連続表現とよぶことにする。

G が単単純 Lie 群の場合には完全既約という概念を導入して、 G のその完全既約な連続表現全体の作る多様体を考へるとき、有限次元の表現はその多様体の特異点だと、考へるのが非常に自然であることが分る。そして逆説的ではあるが、有限次元表現よりも無限次元表現の方がある意味で分かり易いのである。

3. 表現論で考へられる重要な問題とは、与えられた群の既約表現をすべて求めること、さらに、与えられた表現をその既約表現に分解することである。

無限次元の表現論は主として Gelfand - 沢村 によつて建設された。

複素単単純群に於て既約ユニタリ表現を求める問題は 1944 年 - 1948 年の間に Gelfand - Naimark [1] によつて完全に解決された。そして求められた既約ユニタリ表現がその既約ユニタリ表現をつくることとも M. A. Naimark, F. A. Berezin によつて異なった方法によつて示されている。さらに Berezin はその完全既約な ~~表現~~ (必ずしもユニタリでない) 表現を決定する問題も解決している。表現論のもう一つの重要な問題である。表現の分解に於て最も重要な正則表現の分解は、Gelfand - Graev によつて解決された。

これにひきかえ、実単単純群に於ては まだあまりよく分らない。実群に於ても少くとも複素群と同程度の一般論を建設することは主要な目標となつてゐる。この論文もその方向への努力であるといへる。この論文の主題である n 次 D -レンジ

群は複素半単純群とから、類似した性質を持つと思われる実半単純群の一つである。3次ローレンツ群については Bergmann [8] 4次ローレンツ群については Gelfand [2], Naimark [3] によって完全な解決されているが、これらはそれぞれ $SL(2, \mathbb{R})$, $SL(2, \mathbb{C})$ を含む群として持つ。次元が低い、という似た特殊な事情があるのである。5次以上にすると、3次、4次ローレンツ群には存在しなかった全く新しい困難が生ずる。5次以上に文おしは、理論物理学者による。2, 3の結果については知られていなかった。

4. この論文では §1~§3の準備のうち、§4~§7に§2と§4よりよばれるユニタリ表現の系列と2通りの方法によって構成し、それぞれを用いて3つの性質をつべる。§9では補系列とよばれるユニタリ表現の系列を構成する。§11, §12. 2は infinitesimal method によって、おのの既約表現の中より2つに構成されたユニタリ表現が主要な位置を占めることを示す。この2つの結果は、まだ最終的なものではなく、証明するべき仮定を含んでいる。しかし、作られた表現がある意味で、おのの既約表現をつくると、できる。その表現から解析接続(連続パラメータの複素化)によっておのの表現が得られるであろうということが予想される。

既約表現系列はよばれる。ユニタリ表現を具体的に構成すると、正則表現を分解すると、本質的には、完全既約な表現がよびていられているということを厳密に示すこと、などは、未解決の問題である。

§10, §13 2は 不変な不定符号の積の構造についてつべる。§8 §12 2つあるように、3次、及び4次ローレンツ群の ~~既約~~ 既約にいられた結果は、この論文の枠内に入るが、おのの ~~含~~ 含んでいる。さらに今後5次ローレンツ群は理論物理学との関連もあって実用的にも興味があり、深く研究すべきである。

16頁の性質上、計算的側面が多いのであるが、叙述を簡潔にするため計算は入金を示すにとどめた。また断片的に得られている結果は、話の貫いた流れからはみ出るのである。愛した。

Ⅳ 準備

§1. n 次 Lorentz 群の定義とその簡単な性質

1. n 次元ベクトル空間 R^n における 2 次の不定 2 次形式を考へる.

$$(x, x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{m-1}^2 - x_m^2 \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad \cdots (1)$$

R^n の一次変換のうち、この 2 次形式を不変にするものの全体は群 $\mathcal{O}$ を作る. $\mathcal{O}$ の 2 次形式の行列を $I = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_{m-1} & \\ & -1 \end{pmatrix}$ とかく. $\mathcal{O}$ は

$${}^t g I g = I \quad \cdots (2)$$

を満たす m 次正方行列の全体と同一視できる.

$\mathcal{O}$ の元のうち $g_{mm} \geq 1$ を満たすものの全体は部分群 $\mathcal{O}_1$ を作る. さらに $\mathcal{O}_1$ の元のうち $\det g = 1$ を満たすものの全体は部分群 G を作る. G は $\mathcal{O}_1$ の単位元を含む $\mathcal{O}$ の連結成分である.

定義 1. $G = \{ g : {}^t g I g = I, g_{mm} \geq 1, \det g = 1 \}$ を n 次 Lorentz 群とよび、しばしば L_n で表わす.

$$\text{すなわち } \mathcal{O} = G + S G + t G + j G, \quad \mathcal{O}_1 = G + S G \quad \cdots (3)$$

$$\text{ここに } t = \begin{pmatrix} 1_{m-1} & \\ & -1 \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ 1 & & 0 \\ & & & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ & & \\ 1 & & 0 \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

x_m 座標を時間座標、残りの座標を空間座標とよぶ. すると t は時間座標の反転、 s は空間座標の反転、 j は空間、時間両座標の反転を行う変換である.

$(x, x) < 0$ なるベクトル x を時間ベクトル. このうち $x_m > 0$ または $x_m < 0$ なるものをそれぞれ正のまたは負の時間ベクトルとよぶ. 部分群 $\mathcal{O}_1$ は正の時間ベクトルをまた正の時間ベクトルにうつす変換の全体である. この事実を、 G を部分群を用いて分解するとき注意なしに用いられる.

G の性質として

(1°) G は 1 parameter 部分群 $g_{ij}(t), g_{\mu\nu}(t)$ で (代数的に) 生成される.

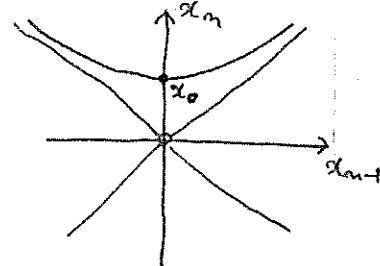
$$\therefore \text{に } g_{ij}(t) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos t & & a \sin t \\ & & 1 & \cos t \\ & -a \sin t & & 1 \end{pmatrix} \quad 1 \leq i < j \leq n-1 \quad \dots (4)$$

$$g_{i2}(t) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cosh t & & \sinh t \\ & & 1 & \cosh t \\ & \sinh t & & 1 \end{pmatrix} \quad i=1, 2, \dots, n-1 \quad \dots (5)$$

(2°) $G = UAU$ である

$\therefore \text{に } U = \left\{ \begin{pmatrix} u & \\ & 1 \end{pmatrix} ; u \in SO(n-1) \right\}$ は空間部分の回転による部分群
 $A = \{ g_{m-1}(t) : -\infty < t < +\infty \}$ は双曲的回転の群

(証明) $\forall g \in G$ は正の時間ベクトル $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ をまた、正の時間ベクトル $x = gx_0$ になる。



ある回転 $u \in U$ によって $ux = ug x_0$ は $x_{m-1} - x_m$ 平面上の $x_{m-1}^2 - x_m^2 = 1, x_m > 0$ なる曲線上に持ち来られる。ある $a(t) \in A$ によって

$$a(t)ux = a(t)ug x_0 = x_0 \quad \text{とできる。}$$

よって x_0 の stationary subgroup は U であるから

$$\exists v \in U \quad a(t)ug = v$$

$$\text{故に } g = v a(t) u^{-1}$$

上の (1°), (2°) より、 G は $\frac{n(n+1)}{2}$ 次元の連結 Lie 群であることが分る。 Q.E.D.

Proposition 1

$G = L_n$ は複素単群 $SO(n, \mathbb{C})$ の実形と i 準単群である。
 $SO(n, \mathbb{C})$ が $n=4$ を含む準単群であるから、 L_n と L_4 を含む準単群である。

(証明) $SO(n, \mathbb{C})$ については [4] p527 を見よ。 $\therefore$ L_n が $SO(n, \mathbb{C})$ の実形であることを示す。

$SO(n, \mathbb{C})$ の対合的自己同型写像 $\Phi: a \rightarrow I\bar{a}I$ を考える。

$$G' = \{ a : \Phi(a) = a \quad a \in SO(n, \mathbb{C}) \}$$

$$\Psi: G' \ni a \rightarrow g = f a f \in G + iG$$

よって G の部分群 $G + iG$ に同型である。

$$\therefore f = \begin{pmatrix} 1_{m-1} & \\ & -i \end{pmatrix} \quad f^2 = I \quad \text{よって} \quad f^2 = I \quad \text{よって}$$

Q.E.D.

2. $\mathbb{R}^m$ の transitive part と stationary subgroup.

G に よる $\mathbb{R}^m$ の transitive part は 次の 4 種類に分れる.

二葉双曲面 (i) $(x, x) = -C, \quad x_m > 0$

(i') $(x, x) = -C, \quad x_m < 0$

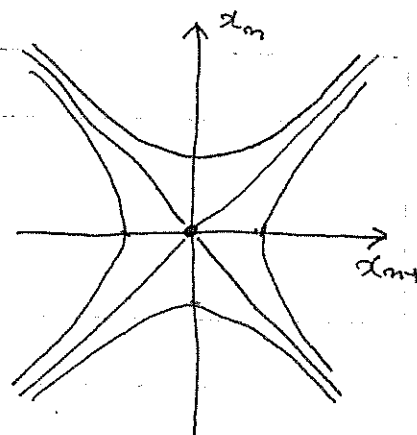
一葉双曲面 (ii) $(x, x) = C$

Cone (iii) $(x, x) = 0, \quad x_m > 0$

(iii') $(x, x) = 0, \quad x_m < 0$

原点 (iv) $x = 0$

$\therefore C$ は 正の実数.



後に用いる必要があるため、各 transitive part の stationary subgroup を求める。規約として、ベクトルは横書きに、matrix g は縦書きからかけることにする。 $x \rightarrow xg$ なる変換を考へるのであるから、変換群としては G の乗法から $g \circ g' = g'g$ による乗法を定義した群を考へれば分り易い。

(i) $(x, x) = -1, \quad x_m > 0$ (二葉双曲面)

点 $x_0 = (0 \dots 0 1)$ の stationary subgroup C_{x_0} は

$$C_{x_0} = U \cong SO(m-1) \quad \left(\begin{array}{l} \text{"LIF" "LIF"} \\ SO(m-1) \text{ と同視する} \end{array} \right)$$

(ii) $(x, x) = 1$ (一葉双曲面)

点 $x_0 = (1, 0 \dots 0)$

$$C_{x_0} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g' \end{pmatrix} ; g' \in I_{m-1} \right\} \cong I_{m-1}$$

(iii) $(x, x) = 0, \quad x_m > 0$ (cone)

点 $x_0 = (0 \dots 0 -1, 1)$

$$C_{x_0} = \Gamma = \Gamma N$$

$$\therefore N = \left\{ n(\xi) ; \xi = (\xi_1 \dots \xi_{m-2}) \in \mathbb{R}^{m-2} \right\}$$

$$|\xi|^2 = \sum_{i=1}^{m-2} \xi_i^2 = \sum_{i=1}^{m-2} \xi_i^2 \quad \text{とおくと}$$

$$n(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \xi_1 & -\xi_1 \\ & \ddots & \xi_2 & \vdots \\ & & \ddots & \xi_{m-2} \\ \xi_1 & \dots & \xi_{m-2} & 1 - \frac{1}{2}|\xi|^2 \\ \xi_1 & \dots & \xi_{m-2} & -\frac{1}{2}|\xi|^2 & 1 + \frac{1}{2}|\xi|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_{m-2} & \xi & -\xi \\ \xi & 1 - \frac{1}{2}|\xi|^2 & \frac{1}{2}|\xi|^2 \\ \xi & -\frac{1}{2}|\xi|^2 & 1 + \frac{1}{2}|\xi|^2 \end{pmatrix} \quad (b)$$

$$\Gamma = \{ (\sigma, 1, 1) ; \sigma \in SO(m-2) \} \subset U$$

(証明) $\sigma^{-1} n(\xi) \sigma = n(\xi \sigma)$ ($\xi \sigma$ は ξ を $\mathbb{R}^{m-2}$ の回転として ξ に作用させたもの)

よって $M = \Gamma N$ は群 Γ を作る。また $M \subset (x_0$ は明らかである。

逆に、 $\forall g \in (x_0$ に対して $x_0 g = x_0$, ${}^t g I g = I$ であるから

g は $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-2}) \in \mathbb{R}^{m-2}$ に対応する

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ \alpha & 1 - \frac{1}{2}|\alpha|^2 & \frac{1}{2}|\alpha|^2 \\ \alpha & -\frac{1}{2}|\alpha|^2 & 1 + \frac{1}{2}|\alpha|^2 \end{pmatrix} \text{ の形であることが分る。}$$

$$\text{すなわち } g' = g \cdot n(\alpha) = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ となる。}$$

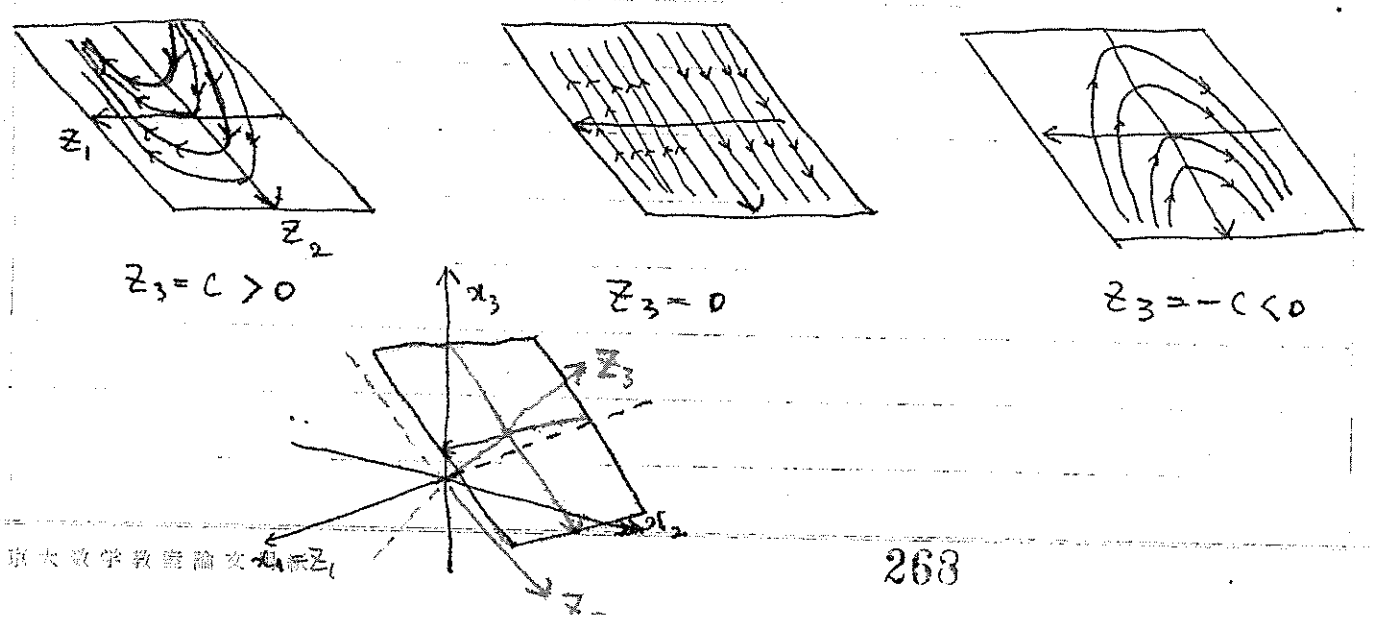
$$g' = \sigma \in \Gamma \text{ であることが分る}$$

$$\therefore g = \sigma n(\alpha)$$

Q.E.D.

注意1. 変換群 M は超平面 $x_{m-1} + x_m = \text{一定}$ を不変にする変換の全体であることが示される。従って M に属する変換は上の超平面と各transitive partの共通部分として表わされる hyperboloidを不変にする。よって $n(\xi)$ を幾何学的に示すと $n=3$ のときは

$$z_1 = x_1 \quad z_2 = x_2 - x_3 \quad z_3 = x_2 + x_3 \quad \text{と表わす。}$$



一般に $x_{m+1} + x_n = c$ なる超平面を考へると $y_0 = (0 \cdots 0, a; \frac{c-a}{2})$ なる点と基準に 12. この超平面上の hyperboloid に Euclid 座標を導入する (12. 付?)

$$z_i = x_i \quad i=1, 2, \dots, n-2, \quad z_{n-2} = x_{m+1} - x_n, \quad z_n = x_{m+1} + x_n$$

とあへて $x = y_0 \eta(\xi)$ に変する座標 $(z_1, \dots, z_{n-2}, z_n)$ は

$$z_n = c \quad (\text{一定})$$

$$z_i = c \cdot \xi_i \quad i=1, 2, \dots, n-2.$$

$$z_{n-1} = 2a - c - c|\xi|^2 = 2a - c[1 + |\xi|^2] \quad \text{ただし } c-a > 0.$$

注意 2. $M \rightarrow m = \delta \eta(\xi) \rightarrow \begin{pmatrix} \delta & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad i=1, 2. \quad M$ は $n-2$ 次元

のユークリッド運動群に

逆同型である。注意 1 に述べたように、 $x = y_0 \eta(\xi)$ に座標 ξ を与へて hyperboloid 上に Euclid 座標を導入すれば、各 hyperboloid 上の運動群と 12 座標 $z_1, \dots, z_{n-2}, z_n$ とが分かる。これは $m_0 = \delta_0 \eta(\xi_0)$ と

すると $x m_0 = y_0 \eta(\xi) \delta_0 \eta(\xi_0) = y_0 \eta(\xi \delta_0 + \xi_0)$ となるから座標 ξ の変を座標 $\xi \delta_0 + \xi_0$ の変に移すからである。

注意 3. 以下では $\begin{pmatrix} u & \\ & 1 \end{pmatrix}$ と u , $\begin{pmatrix} \delta & \\ & 1 \end{pmatrix}$ と δ とを同一視する。

すなわち各 transitive part は $(x_0; g)$ なる右剰余類の作る均質空間 $X = G/x_0$ と考へられ、従つて、この上に quasi-invariant measure μ が存在し、 (x_0) の表現を誘導することによつて、 $L^2(X; \mu)$ 上に G の表現が得られる。こゝの表現を既約成分に分解することは難しい問題である。しかし、cone 上の表現の場合は $C_{x_0} = M$ の有限次元表現を誘導したものは、Fourier 変換によつて、主系列の表現に分解できる。これはよく注意する。X 上の誘導表現に関する問題はこの論文では扱わなかつたが参考までに、各 X 上の g -inv. measure が同一の公式

$$d\mu(x) = \frac{dx_1 dx_2 \cdots dx_{m+1}}{|x_m|} = \frac{dx_1 dx_2 \cdots dx_i \cdots dx_m}{|x_i|} \quad (17)$$

で与えられることを注意しておく。

§2. 重要な部分群と G の分解

1. まずに表われた部分群も含め、本論で重要な役割を有する部分群をあげよう。

N : $n-2$ 次元ベクトル群 ; $\Gamma \cong SO(n-2)$

$M = \Gamma N$ $n-2$ 次元運動群 (semidirect product)

$U \cong SO(n-1)$

$A = \{ a(t) ; -\infty < t < +\infty \}$ $a(t) \stackrel{\text{def}}{=} g_{n-1}(t)$

$$a(t)^T n(\beta) a(t) = n(e^{-t}\beta) \quad \dots (1)$$

よって

$L = AN$ は部分群である。

N の軌道行列の全体 $\hat{N}$ はまた部分群である。

$$\hat{N} = \{ \hat{n}(\eta) : \eta \in \mathbb{R}^{n-2} \} \\ \therefore \hat{n}(\eta) = \begin{pmatrix} 1_{n-2} & t_\eta & t_\eta \\ \eta & 1 - \frac{1}{2}|\eta|^2 & -\frac{1}{2}|\eta|^2 \\ -\eta & \frac{1}{2}|\eta|^2 & 1 + \frac{1}{2}|\eta|^2 \end{pmatrix} \quad \dots (2)$$

$$\delta \hat{n}(\eta) \delta = \hat{n}(\eta \delta), \quad a(t)^T \hat{n}(\eta) a(t) = \hat{n}(e^t \eta) \quad \dots (3)$$

A と Γ とは可換 T_2 から

$K = A\Gamma N = A\Gamma L = \Gamma L$ は部分群である。

$a(t) \delta n(\beta) \rightarrow \begin{pmatrix} e^{t\beta} & t_\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ よって $n-2$ 次元 Euclid 相似変換群に同型である。

$S' = A\Gamma \hat{N}$ は $n-2$ 次元相似変換群に同型である。

2. G の部分群による分解について。

Proposition 2 $G = ANU = L \cdot U$ $L \cap U = \{e\}$

(証明) G の任意の元 g が $a(t)n(\beta)u$ と書けることと示せばよい。その一意性はたやすく分るからである。

= 葉双曲面 $(x, x) = -1$ ($x_n > 0$) とその上の点 $x_0 = (0 \dots 0, 1)$ とを考へる。 $x = x_0 g$ とおくと、 $x' = x n(\beta)$ は

$$x'_i = x_i + \beta_i (x_{n-1} + x_n) \text{ と } \beta_i \text{ である。}$$

$$x_{n-1}^2 - x_{n-2}^2 = 1 + x_1^2 + \dots + x_{n-2}^2 \geq 1 \text{ であり } x_n + x_{n-1} > 0 \text{ が分るから}$$

ある $n(\beta) \in N$ によって $x' = x_0 g n(\beta)$ が $x_{n-1} - x_n$ 平面上の

双曲系 $x_{m-1}^2 - x_m^2 = -1$ ($x_m > 0$) 上に $\bar{x} > 2$ なる $\bar{x}$ に 2 近づく。
 $\bar{x}$ の x' を $a(t)$ に $\bar{x}$ なる x_0 に $\bar{x}$ 近づく。

$$x_0 g n(\bar{x}) a(t) = x_0 \quad \therefore g n(\bar{x}) a(t) = u \in U$$

$$g = u a(t) n(\bar{x}) \quad g^{-1} = n(\bar{x}) a(t) u^{-1} \\ = a(t) n(\bar{x}^t) u^{-1}$$

これにより, Γ の元 g が $a(t) n(\bar{x}) u$ の形に $\bar{x} > 2$ なる $\bar{x}$ に 2 近づく T_2 の元 g である。

Proposition 3

$$G = K\hat{N} + Kv_0$$

$$\therefore v_0 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(証明) cone $(x, x) = 0$ ($x_m > 0$) と $\bar{x}$ の $\bar{x}$ $x_0 = (0 \cdots 0 -1, 1)$ を考へる。 G の Γ の元 g に $\bar{x}$ に 2 近づく $x = x_0 g$ は $\bar{x}$ の cone の上に $\bar{x}$ なるから

$$x_m^2 - x_{m-1}^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{m-2}^2 \geq 0 \quad \therefore x_m \geq |x_{m-1}|$$

$$x' = x \hat{n}(\eta) \text{ は } x'_i = x_i + (x_m - x_{m-1}) \eta_i \quad i=1, 2, \dots, m-2$$

(i) $x_m - x_{m-1} \neq 0$ のとき $x_m - x_{m-1} > 0$ なる η がある。

$$\eta = -\frac{1}{x_m - x_{m-1}} (x_1 \cdots x_{m-2}) \text{ と } \eta \text{ なる。}$$

$$x'_1 = x'_2 = \cdots = x'_{m-2} = 0$$

$$x'_{m-1} = -\frac{1}{2} (x_m - x_{m-1}) < 0$$

よって x' は $x_{m-1} - x_m$ 平面上 $\bar{x}$ 左半平面上にある。

x' はある $a(t)$ に $\bar{x}$ なる x_0 に $\bar{x}$ 近づく。

$$x' a(t) = x_0 \quad \therefore g \hat{n}(\eta) a(t) = \delta n(\bar{x}) \in M$$

$$g = \delta n(\bar{x}) a(t) \hat{n}(\eta)$$

$$= \delta a(t) n(\bar{x}^t) \hat{n}(\eta)$$

(ii) $x_m - x_{m-1} = 0$ のとき $x_1 = x_2 = \cdots = x_{m-2} = 0$ なる η がある。

よって x は $x_{m-1} - x_m$ 平面上右半平面上にある。 v_0 に $\bar{x}$ なる

$x' = x v_0$ は左半平面上に来るから ある $a(t)$ に $\bar{x}$ なる

$$x' a(t) = x_0 \quad \therefore g v_0 a(t) = \delta n(\bar{x}) \in M$$

$$g = \delta n(\bar{x}) a(t) v_0 = \delta a(t) n(\bar{x}^t) v_0$$

上の (i) (ii) に $\bar{x}$ なる。 G は集合論的直和 $K\hat{N} + Kv_0$ と $\bar{x}$ なる

い。す。に。 $g = a(t) \delta h(\beta) \hat{n}(\eta)$ かつ $a(t) \delta h(\beta) \cup$ と書けることは一意的である。

Q.E.D.

上の 2 つの proposition 12.2

$L \setminus G = U$ かつ $K^G = \hat{N} + U_0$ と考へることは可能である。

以下では、均質空間 $L^G = U$, $K^G = \hat{N}$ (一様空間 U の $U(1)$)

上の諸導表現を考へてみる。

3. K^G は幾何学的には、 $n-2$ 次元平面である。 z から $-z$ まで。

い。す。に。 $n-2$ 次元 euclid 空間 $\hat{N}$ を得る。

均質空間 U の cone $X = M \setminus G = A\hat{N} + AU_0$ である。

G から X の自然な写像 $A\hat{N}$ に制限される。

$A\hat{N} \ni a(t) \hat{n}(\eta) \rightarrow x = (ze^{-t}\eta, e^{-t}(-1+\eta^2), e^{-t}(1+\eta^2)) \in X$ である。この写像は $\hat{N}$ に制限される。

$\hat{N}$ は cone X を $z=0$ の平面 $-x_{n-2} + x_n = 2$ 上の $U(1)$ の D と思ふことができる。

注意 1 cone $X = M \setminus G$

M の normalization $\mathcal{H}(M) = K = AM$

$M \setminus \mathcal{H}(M) = A$ は abelian group である。

$A\hat{N} \ni g \rightarrow x = x_0 g \in X$ は自然な写像 $\hat{N} \rightarrow X$ である。

$a(t)g \rightarrow e^{-t}x$ と考へることに注意される。 X 上の

L の諸導表現は、Fourier 変換を用いる。

$\mathcal{H}(M)^G = K^G = \hat{N}$ 上の諸導表現に分解できることが分る。

cf. [5] pp339-343.

注意 2 $\mathcal{H}(K) = K$.

$\mathcal{H}(L) = K = \Gamma \cdot L$

この事実は均質空間 K^G , L^G 上の表現の分解に関連して重要である。

(Rv部分群)

§3. G の Haas 測度 および. 均質空間上の測度.

1. G に $g = a(t) \gamma \eta(\beta) \hat{\eta}(\eta)$ により定義される独立な parameter (t, γ, β, η) を導入する. これは G の次元の低い部分集合 K において定義されている. 元 g に対する parameter を explicit に表わしておき,

$$g \text{ を block に分けて } g = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g_{m,m} & g_{m,m} \\ g^{31} & g_{m,m} & g_{m,m} \end{pmatrix} \text{ と書ける.}$$

また, $g'' = (g_{ij})_{1 \leq i, j \leq m-2}$ 等々である.

$$g = a(t) \gamma \eta(\beta) \hat{\eta}(\eta) \text{ に対し } e^{-t} = \frac{1}{2} (g_{m,m-1} - g_{m,m} - g_{m,m-1} + g_{m,m}) \quad \dots (1)$$

$$e^{\eta} = \frac{1}{2} (g^{31} - g^{21}) \quad \dots (2)$$

$$\text{i.e. } \eta_i = \frac{g_{m,i} - g_{m,i}}{g_{m,m-1} - g_{m,m} - g_{m,m-1} + g_{m,m}} \quad (i=1, 2, \dots, m-2) \quad \dots (2')$$

$$\beta = \frac{g_{m+1,m-1} - g_{m+1,m}}{2} \cdot g^{31} + \frac{-g_{m,m-1} + g_{m,m}}{2} \cdot g^{21} \quad \dots (3)$$

γ は β の値に $\frac{1}{2}$ である (7) の $\frac{1}{2}$ の γ を略す.

2. $K^G = \hat{N}$ 上の quasi-invariant measure ($\hat{N}$, inv. meas と略す) を求めるため K, G 上の Haas 測度を求める.

上記を簡単にすると, K は K の $\eta(\beta)$ と β , $\hat{\eta}(\eta)$ と η , $a(t)$ と t とは同一である.

$$(1^\circ) \quad N \text{ の Haas 測度は } d\mu(\beta) = d\beta_1 d\beta_2 \dots d\beta_{m-2} = d\beta$$

$$\hat{N} \text{ の } d\mu(\eta) = d\eta$$

$$A \text{ の } d\mu(t) = dt$$

$$\Gamma \text{ および } U \text{ の Haas 測度は } \mu(\Gamma) = 1, \mu(U) = 1 \text{ である.}$$

$$(2^\circ) \quad L = AN. \quad L \text{ に } l = a(t) \eta(\beta) \text{ と } 2 \text{ parameter } (t, \beta) \text{ を導入する.}$$

$$a(t) \eta(\beta) a(t_0) \eta(\beta_0) = a(t+t_0) \eta(e^{-t_0} \beta + \beta_0) \quad \dots (4)$$

Proposition 4. G : 有限群, K : G の正規部分群.

$$\Delta_G(g_0) = \frac{\mu(g_0 g)}{\mu(g)}, \quad \Delta_K(h_0) = \frac{\mu(h_0 t_2)}{\mu(t_2)} \quad \text{とあるとき,}$$

G 上の 可測関数 $\psi(g) > 0$ かつ

$$\psi(hg) = \frac{\Delta_K(h)}{\Delta_G(h)} \cdot \psi(g) \quad (\text{a. a. g}) \quad \dots (9)$$

を満たすならば

K 上の ψ , inv. meas. μ かつ $\psi(1) = 1$.

G 上の 有限群 G の 可測関数 f に対して

$$\int_G f(g) d\mu(g) = \int_K \left[\int_G f(hg) d\mu(h) \right] d\mu(\pi(g)) \quad \dots (10)$$

$$\frac{\mu(\pi(g)g_0)}{\mu(\pi(g))} = \frac{\psi(gg_0)}{\psi(g)} \quad \dots (11)$$

$\therefore$ π は $G \rightarrow K$ への 自然な写像である.
(証明) 省略.

1. $(4^0) = 1$ である

$$\beta^1(g) d\mu(g) = d\mu(h) d\mu(h')$$

$$(4^1) = \beta^1(h) \cdot \beta^1(g)$$

$$\beta^1(h) = \frac{\mu(h)}{\mu(h')} = \frac{\mu(h t_2)}{\mu(t_2)} = \Delta_K(h)$$

$$\Delta_G(g) \equiv 1 \text{ であるならば } \beta^1(h) = \frac{\Delta_K(h)}{\Delta_G(h)}$$

2. $d\mu(h)$ は K 上の inv. meas. である.

$$\frac{d\mu(hg)}{d\mu(h)} = \frac{\beta^1(hg)}{\beta^1(h)} = \beta^1(hg) \quad \dots (12)$$

$\therefore$ hg は K の元 h かつ g に対して 変換されることを示す.
これにより K 上の inv. meas. かつ $\psi(1) = 1$.

[III] 主系列表現

§4 $H^G = \hat{N}$ 上へ G の表現を構成するに.

1. 誘導表現を作るときに必要定理を証明なしに与える. cf. [7]

G を局所コンパクト群, K をその閉部分群, μ を K 上の δ -inv. meas. とする. H^G から μ -meas. の subset を与える T_2 変換と同相な section (coset の代表系), $X \subset G$ が存在したとする.

 μ を自然正値測度とし, X 上にうつしを考へる.いま K の強連結 G -等変表現 $\{V(h), H\}$ (H : separable) を G 上に誘導しよう. $\mathcal{H}$ を X 上の H -値関数 2-次の条件 (i) (ii) を満たすものの全体とする.(i) $\forall v \in H$, $\langle f(h), v \rangle$ は X 上の可測関数である.(ii) $\int_X \|f(h)\|_H^2 d\mu(h) < +\infty$ $\mathcal{H}$ は Hilbert 空間である. $\mathcal{H}$ 上の作用素 U_g を

$$U_g f(h) = w^{\frac{1}{2}}(g, x) \cdot V(xg) f(x\bar{g}) \quad \dots \dots (1)$$

により定義する. $\therefore$ に $xg = h \cdot x\bar{g}$ $h \in K, x\bar{g} \in X$

$$w(g, x) = \frac{d\mu(x\bar{g})}{d\mu(h)} \quad V(xg) \stackrel{\text{def}}{=} V(h)$$

Theorem 11. $\{U_g, \mathcal{H}\}$ は G の強連結な G -等変表現である.2. $\{U_g, \mathcal{H}\}$ は G -等変同値を与える. δ -inv. meas. μ により与えられる.

この表現 $\{U_g, \mathcal{H}\}$ を $\{V(h), H\}$ より誘導した G の誘導表現という.
 とくに $V(h)$ から 1-次元表現のときは $w^{\frac{1}{2}}(g, x) V(xg)$ は scalar であり, 誘導表現はまた multiplier 表現とよばれる. [5] §2.

2. $K = A \Gamma N$ の N の要素 z の元を 恒等作用素に 対応させる 既約ユニタリ表現を G に 誘導する. K の 2 形の表現の χ を 誘導すれば, 他の形の表現を 誘導して ものをし 既約成分が 加わって 得られているという 意味に なる, 包含している. この 事実は 未証明であるが, 十分 根拠がある.

(1°) K の $N \rightarrow 1$ なる 表現は 結局 有限次元の 表現である.

K は $n-2$ 次元 ユークリッド 相似変換群に 逆同型である.

K の 1 次元ユニタリ表現は,

$$n \neq 4 \text{ のとき} \quad \chi(t_2) = e^{i\rho t} \quad \text{に 加わる} \quad t_2 = a(t) \delta n(\beta)$$

$$n = 4 \text{ のとき} \quad \chi(t_2) = e^{i\rho t} e^{i\sigma\theta} \quad \text{に 加わる.}$$

$$t_2 = a(t) \delta(\theta) n(\beta) \quad \delta(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}_1$$

一般に K の 有限次元の 既約ユニタリ表現は,

$$D(\chi) = e^{i\rho t} D^\alpha(\chi) \quad \text{に 加わる.}$$

$\therefore D^\alpha(\chi) \quad (\alpha \in \Gamma)$ は Γ の 既約ユニタリ表現である.

$\Gamma = SO(n-2)$ の 既約表現を 与える parameter α は

$n = 2k+2$ のとき $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_k$ なる k 個の 整数の組 $(m_1, m_2, \dots, m_k)$ である.

$n = 2k+1$ のとき $0 \leq m_1 \leq \dots \leq m_{k-1}$ なる $k-1$ 個の 整数の組 $(m_1, m_2, \dots, m_{k-1})$ である. [2] 頁 211.

(2°) 理解を助けるため, 1 付添, 一般の場合に 与えられる, 再び K の 1 次元表現 $\chi(t) = e^{i\rho t} = \left(\frac{t_{n,n} - t_{n-1,n} - t_{n,n-1} + t_{n-1,n-1}}{2} \right)^{-i\rho}$ $t_2 = a(t) \delta n(\beta)$

を G に 誘導する.

2 重 multiplier 表現は $f_g = L^2(N) = (L^2_\eta) \times (L^2_\eta)$

$$f \in f_g \quad T_g f(\eta) = \alpha(\eta g) f(\eta \bar{g}) \quad \dots (2)$$

$\therefore$ multiplier $\alpha(\eta g)$ は

$$\alpha(\eta g) = \frac{\chi(\eta g)}{\chi(\eta)} \cdot \left[\frac{\alpha(\eta \bar{g})}{\alpha(\eta)} \right]^{\frac{1}{2}} = \chi(\eta g) \beta^{-\frac{1}{2}}(\eta g) = (e^{-t})^{-\frac{1}{2}(2i\rho + n-2)}$$

$$\eta g = a(t) \delta n(\beta) \alpha(\eta \bar{g})$$

$$\chi(g) \stackrel{\text{def}}{=} \chi(\ell_2) \quad g = \ell_2 \hat{\alpha}(\gamma)$$

さらに具体的に:

$$e^{-t'} = \sum_{i=1}^{n-2} h_i (g_{i,n} - g_{i,n-1}) + \frac{1-|h|^2}{2} (g_{n-1,n-1} - g_{n-1,n}) + \frac{1+|h|^2}{2} (-g_{n,n-1} + g_{n,n}) \quad \dots (3)$$

$h' = h\bar{g}$ とおくと

$$e^{-t'} h'_i = \sum_{j=1}^{n-2} h_j g_{ji} + \frac{1+|h|^2}{2} g_{n-1,i} + \frac{1-|h|^2}{2} g_{n,i} \quad \dots (4)$$

$i=1, 2, \dots, n-2$

∴ $\{T_g, f\}$ の表現は、 $\hat{\alpha}$ の表現と一致する。

ユークリッド空間の変換群 $S = A\Gamma N$ に作用する。

$$T_{h_0} f(\gamma) = f(\gamma + h_0) \quad \dots (5)$$

$$T_\gamma f(\gamma) = f(\gamma\gamma) \quad \dots (6)$$

$$T_{e^{it}} f(\gamma) = e^{\frac{1}{2}(2ip+n-2)t} f(e^t \gamma) \quad \dots (7)$$

$$\text{さらに } T_z f(\gamma) = (e^{-t'})^{-\frac{1}{2}(2ip+n-2)} f(\gamma') \quad \dots (8)$$

$$e^{-t'} = 1 + 2\gamma \bar{z} + |h|^2 |z|^2 = 1 + 2\langle \gamma, z \rangle + |h|^2 |z|^2$$

$$h' = \frac{h + |h|^2 z}{1 + 2\langle \gamma, z \rangle + |h|^2 |z|^2}$$

$$T_w f(\gamma) = |h|^{-(2ip+n-2)} f(h\gamma) \quad \dots (9)$$

$$e^{-t'} = |h|^2$$

$$h'_i = \begin{cases} \frac{h_i}{|h|^2} & i=1, 2, \dots, n-3 \\ -\frac{h_{n-2}}{|h|^2} & i=n-2 \end{cases}$$

(3) K の有限次元既約表現 $D(\gamma) = e^{ip\gamma} D^\alpha(\gamma)$ を誘導する。

$D^\alpha(\gamma)$ の次元を N_α とする。 N 上の $\mathbb{C}^{N_\alpha}$ (直 (L^2)) を f^α とする。

$$f^\alpha \ni f \quad f(\gamma) = \begin{pmatrix} f_1(\gamma) \\ \vdots \\ f_{N_\alpha}(\gamma) \end{pmatrix} \quad f_i \in (L^2_\gamma)$$

$$\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{N_\alpha} \|f_i\|^2 = \int_H \sum_{i=1}^{N_\alpha} |f_i(\gamma)|^2 d\gamma$$

表現 $\{T_g, f^\alpha\}$

$$T_g f(\gamma) = A(g\gamma) f(\gamma\bar{g}) \quad \dots (10)$$

$$\therefore A(g\gamma) = \gamma^{-\frac{1}{2}}(g\gamma) D(g\gamma) \quad D(g) \stackrel{\text{def}}{=} D(\ell_2)$$

$$LT \text{ かつ } A(g) = e^{\frac{1}{2}(2ip+m-2)t} D^{\alpha}(\gamma)$$

$$g = a(t) \gamma n(\beta) \tilde{m}(\gamma)$$

とくに相似変換群 S に制限すると

$$\begin{aligned} T_{\eta_0} f(\gamma) &= f(\gamma + \eta_0) & T_{\gamma} f(\gamma) &= D^{\alpha}(\gamma) f(\gamma) \\ T_{a(t)} f(\gamma) &= e^{\frac{1}{2}(2ip+m-2)t} f(e^t \gamma) \end{aligned} \quad \dots (11)$$

2. あり

3. α discrete parameter α と continuous parameter γ による表現の系列. $\mathcal{D}(\alpha; \gamma) = \{T_{\gamma} \hat{f}^{\alpha}\}$ が与えられる.

3. また完全な結果は得られなかったが、表現 $\mathcal{D}(\alpha; \gamma)$ の既約性について述べる.

$$\hat{f}^{\alpha} \ni f(\gamma) \rightarrow \varphi(x) = \int e^{-2\pi i \langle \gamma, x \rangle} f(\gamma) d\gamma \in \hat{f}^{\alpha}$$

なる Fourier 変換により、 $\{T_{\gamma} \hat{f}^{\alpha}\}$ とユークリッド空間上の表現 $\{\hat{T}_{\gamma} \hat{f}^{\alpha}\}$ を作る. $\therefore \hat{f}^{\alpha}$ は $n-2$ 次元ユークリッド空間 X 上の $\mathbb{C}^{N_{\alpha}}$ 値 (L^2) である. $\hat{f}^{\alpha}$ は (L^2_X) の N_{α} 個の直和と考えられる.

$\{\hat{T}_{\gamma} \hat{f}^{\alpha}\}$ を S に制限すれば、簡単な計算により、

$$\hat{T}_{\eta_0} \varphi(x) = e^{2\pi i \langle \eta_0, x \rangle} \varphi(x)$$

$$\hat{T}_{a(t)} \varphi(x) = e^{it} \varphi(e^{-t} x) \quad \dots (12)$$

$$\hat{T}_{\gamma} \varphi(x) = D^{\alpha}(\gamma) \varphi(x)$$

[定義2] 任意の群 G のユークリッド表現 $\{T_{\gamma} \hat{f}\}$ が既約であるとは、 $\hat{f}_1 = T_{\gamma} \hat{f}$ 不変な $\langle \hat{f}, \hat{f} \rangle$ と異なる閉部分空間が存在しないことである.

Lemma 1 任意の群 G のユークリッド表現 $\{T_{\gamma} \hat{f}\}$ が既約であるための必要十分条件は、ある T_{γ} と可換な $\hat{f}$ の有界作用素 B が恒等写像 E の定数倍に等しいことである.

Lemma 2 $\{\hat{T}_{\gamma} \hat{f}^{\alpha}\}$ に関する. ある $\hat{T}_{\eta_0} \varphi(x) = e^{2\pi i \langle \eta_0, x \rangle} \varphi(x)$

$\hat{f}$ の作用素と可換な $\hat{f}^{\alpha}$ の有界作用素 B は ある essentially bounded な可測関数 $h_{ij}(x)$ $i, j = 1, 2, \dots, N_{\alpha}$ を用いて

$$B \varphi(x) = h(x) \varphi(x) \quad \text{と書ける.}$$

$$\therefore h(x) = (h_{ij}(x))$$

[証明] B が $\hat{T}_{\eta_0}$ と可換なことから 任意の ess. bdd. な関数 $p(x)$

を乗算という作用素 $M_p \varphi(x) = p(x) \varphi(x)$ と可換に T_g は

$$\varphi(x) = e^{-|x|^2} = e^{-\sum_{i=1}^{n-2} x_i^2} \in (L^2) \text{ と } \varphi^{(i)}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \varphi(x) \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ とおく.}$$

$$\hat{B} \varphi^{(i)}(x) = \begin{pmatrix} g_1^{(i)}(x) \\ \vdots \\ g_{N_\alpha}^{(i)}(x) \end{pmatrix} = g^{(i)}(x)$$

$\frac{\varphi_i(x)}{\varphi(x)}$ から $l_{i,j}$ は $l_{i,j}$ なる (L^2) の元 $\varphi_i(x)$ をとり
 $\varphi^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \varphi_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ とおく.

$$\hat{B} \varphi^{(i)}(x) = \hat{B} \frac{\varphi_i(x)}{\varphi(x)} \cdot \varphi^{(i)}(x) = \frac{\varphi_i(x)}{\varphi(x)} g^{(i)}(x)$$

上の条件を $\varphi_1, \dots, \varphi_{N_\alpha}$ に交代

$$\varphi = \varphi^{(1)} + \dots + \varphi^{(N_\alpha)} \text{ とおく.}$$

$$\hat{B} \varphi(x) = \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{\varphi(x)} g^{(i)}(x) \cdot \varphi_i(x)$$

$$l_{i,j}(x) = \frac{1}{\varphi(x)} \cdot g_{i,j}^{(i)}(x), \quad l(x) = (l_{i,j}(x)) \text{ とおく.}$$

$$\hat{B} \varphi(x) = l(x) \varphi(x)$$

... (13)

$\hat{B}$ が有界であるということから $l_{i,j}(x)$ が $l_{i,j}$ なる L^2 関数に属する
 ことが分る. (13) は $\hat{B}$ の稠密な部分空間から $\hat{B}$ 全体に拡張できる

Q.E.D.

次に $G = I_n$ の表現 $\mathcal{O}(\alpha; \nu_p) = \{T_g, \hat{B}\}$ を考える.

任意の T_g と可換な $\hat{B}$ の有界作用素 B は Fourier 変換によつて $\hat{T}_g$ と可換な有界作用素 $\hat{B}$ にうつる.

$$\hat{B} \text{ が } \hat{T}_{h_0} \text{ と可換なことから } \hat{B} \varphi(x) = l(x) \varphi(x).$$

$$\hat{B} \text{ が } \hat{T}_{\alpha t}, \hat{T}_\alpha \text{ と可換なことから}$$

$$(\forall t, \forall \alpha) \quad l(e^{t \cdot} \alpha) = D(\alpha)^{-1} l(\alpha) D(\alpha) \quad (\alpha, \alpha, \alpha) \dots (14)$$

が分る. $\hat{B}$ が 1 次元の時 $l(e^{t \cdot} \alpha) = l(\alpha) \quad (\alpha, \alpha, \alpha)$ とおくと

$$l(\alpha) = c \text{ (const)} \text{ である. 故に } \hat{B} = c \cdot E.$$

今迄に得た結果をまとめると

Theorem 2

1. K の有限次元既約 $\mathcal{U}$ -表現を誘導するとは、parameter (α, ν_p) によつて G の $\mathcal{U}$ -表現 $\mathcal{O}(\alpha; \nu_p)$ が与えられる.
 2. K の 1 次元表現を誘導した表現は既約である.
- とくに I_3, I_4 に対してはここに構成した表現はすべて既約である.

K の 1 次元表現を誘導した表現は S に制限した S_2 に既約であるか、一般の表現は S に制限すれば大部分可約である、 S に制限した S_2 に既約である表現が $G = I_m$ の m が偶数 $2n$ のとき、 I_n の $2n$ の位に若干存在する。しかし G の構造を用いた上述の方法によるにしろ、あるいは、誘導表現の一般論を用いるにしろ、表現 $\Theta(\lambda, \mu)$ の既約性ある問題は未解決の問題として残っている。

I_3, I_4 のときは、1 次元表現のみを誘導するのであるから、作った誘導表現はすべて既約である。

§5. $L \setminus G = U$ 上の G の表現を構成するとは、

まず N 上に作った表現と、ユ=タリ同値な表現を $G = LU = ANU$ なる別の分解を用いて構成する。この意味は、(1) 表現の構造を調べるとは、(2) 表現を scalar function の作る空間で実現するとは、の他に、(3) 作られた表現の系列がある意味で基本的な G のユ=タリ表現をつくっているということから分るのである。

$G = ANU$ は G の岩沢分解と呼ばれるものである。

1. $g = l \cdot u$ なる分解を用いて、 G に parameter (l, u) を導入する。
 $g = lu = a(t) \cdot n(z) \cdot u$

t, z, u を g の行列要素で具体的に書けば

$$g = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g_{m+1,m+1} & g_{m+1,m} \\ g^{31} & g_{m,m+1} & g_{mm} \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} u^{11} & u^{12} & 0 \\ u^{21} & u_{m+1,m+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{と}$$

block に分けておくと、

$$e^{-t} = g_{mm} - g_{m+1,m} \quad \dots (1)$$

$$u_{m+1,m+1} = \frac{g_{m+1,m+1} - g_{m+1,m}}{g_{mm} - g_{m+1,m}} \quad \dots (2)$$

$$u^{12} = g^{12} + \frac{g_{m+1,m+1} - g_{m+1,m}}{g_{mm} - g_{m+1,m}} \cdot g^{13} \quad \dots (3)$$

$$u^{21} = \frac{1}{g_{mm} - g_{m+1,m}} (g^{21} - g^{31}) \quad \dots (4)$$

$$u^{11} = g^{11} + \frac{1}{g_{mm} - g_{m+1,m}} g^{13} (g^{21} - g^{31}) \quad \dots (5)$$

2. 均質空間 $L \setminus G = U$ 上の g , inv. meas. を求める。

$$L \text{ 上の Haar 測度は } d\mu_L(l) = (3^t(l) d\mu(t) d\mu(z)) \quad \dots (6)$$

$$\text{左 Haar 測度は } d\mu_L(l) = d\mu(t) d\mu(z) \quad \dots (6')$$

$$l = a(t) \cdot n(z)$$

$$\beta(l) = \frac{d\mu_L(l)}{d\mu_L(l)} = e^{-(n-2)t} = (e_{mm} - e_{m+1,m})^{n-2} \dots (6'')$$

U の Haas 測度 μ は $\mu(U) = 1$ とする。

G の Haas 測度は

$$d\mu(g) = d\mu_2(l) d\mu(u) \quad g = l \cdot u \quad \dots (17)$$

これは §3. 2 (4) の U 上の Haas 測度

$$d\mu(g) = d\mu_2(l_2) d\mu(h) \quad g = l_2 \cdot h$$

と定数倍 μ の U 上の一致測度。

$$(b) i=1, 2 \quad d\mu_1(g) = (\beta_1(l)) d\mu_2(l) d\mu(u)$$

$$(\beta_1(g)) = (\beta_1(l)) = (g_{nn} - g_{n+1,n})^{n-2} \quad (g = l \cdot u) \quad \text{とある。}$$

$$(\beta_1^T(g)) d\mu_1(g) = d\mu_2(l) d\mu(u) \quad \dots (8)$$

§3. 2. (5) と同じ議論により、

均質空間 U 上の g の inv. meas. は $d\mu(u)$ と一致する。

$$\frac{d\mu(u\bar{g})}{d\mu(u)} = \frac{(\beta_1^T(u\bar{g}))}{(\beta_1^T(u))} = (\beta_1^T(u\bar{g})) \quad \dots (9)$$

3. (1) $L = AN$ の有限次元既約 $\mathbb{C}$ -表現は 1 次元表現にかきり、

$$\chi(l) = e^{ip \cdot t} \quad l = a(t) n(\beta)$$

とある。

(2) $\chi(l)$ を U 上の multiplier 表現を求める。

multiplier は $\chi(g) \stackrel{\text{def}}{=} \chi(l) \quad g = l \cdot u \quad \text{とある。}$

$$\alpha_1(u, g) = \frac{\chi(u\bar{g})}{\chi(u)} \left[\frac{d\mu(u\bar{g})}{d\mu(u)} \right]^{\frac{1}{2}} = (\beta_1^T(u\bar{g}))^{\frac{1}{2}} \chi(u\bar{g}) \quad \dots (10)$$

これは $\alpha_1(u\bar{g})$ と $\beta_1^T(u\bar{g}) = 1$ である。

表現 $\{T_g, \mathcal{H}\}$ は

$$\mathcal{H} = L^2(U; \mu)$$

$$T_g \phi(u) = \alpha_1(u, g) \phi(u\bar{g}) \quad \dots (11)$$

$$\therefore \alpha_1(g) = \alpha_1(l) = (g_{nn} - g_{n+1,n})^{-\frac{1}{2}(2ip + n - 2)} = (e^{-t})^{-\frac{1}{2}(2ip + n - 2)}$$

$$g' = u\bar{g} \quad \text{とある。}$$

$$g'_{nn} = g_{nn}$$

$$g'_{n+1,n} = \sum_{i=1}^n u_{ni} g_{in}$$

$$\begin{aligned}
 \text{さらに } e^{-t'} &= g_{nn} - \sum_{i=1}^{n-1} u_{n-1,i} g_{i,n} \\
 \alpha_i(u g) &= \left(g_{nn} - \sum_{i=1}^{n-1} u_{n-1,i} g_{i,n} \right)^{-\frac{1}{2}(2ip+n-2)} \dots (12)
 \end{aligned}$$

(3°) $\langle T_g, \frac{1}{g} \rangle \in U$ に制限すると,

$$\alpha_i(u) \equiv 1 \quad u \in U \quad i=1, 2$$

$$T_{u_0} \varphi(u) = \varphi(u u_0) \quad \varphi \in \mathcal{F} \quad \dots (13)$$

これは U の右正則表現に他ならない.

また

$$T_{a(t)} \varphi(u) = (cht - cht \cdot u_{n-1, n-1})^{-\frac{1}{2}(2ip+n-2)} \varphi(u a(t)) \quad \dots (14)$$

§ 6. $L \setminus G = U$ 上の G の表現を分解するとは、
表現 $\{T_g, L^2(U)\}$

$$T_g \varphi(u) = \alpha_1(u, g) \varphi(u \bar{g})$$

$$\alpha_1(g) = (g_{mm} - g_{m+1, m})^{-\frac{1}{2}(2n+p+m-2)}$$

を分解する問題に考えよう。

1. U の右正則表現を $\{R_u, L^2(U)\}$ 、左正則表現を $\{L_u, L^2(U)\}$ と書き、
 $\{T_g, L^2(U)\}$ を U に制限すると $\{R_u, L^2(U)\}$ と一致する。

$$\mathcal{H}(L) = K \quad L \setminus K = \Gamma \quad \dots \dots (1)$$

に注意すれば $L_\gamma \varphi(u) = \varphi(\gamma^* u)$ $\gamma \in \Gamma$ $1: \mathcal{H} \rightarrow L_2$

$$L_\gamma \circ T_g = T_g \circ L_\gamma \quad \dots (2)$$

$$[\text{証明}] \quad L_\gamma \circ T_g \varphi(u) = L_\gamma \alpha_1(u, g) \varphi(u \bar{g}) = \alpha_1(\gamma^* u, g) \varphi(\gamma^* u \bar{g})$$

$$T_g \circ L_\gamma \varphi(u) = T_g \varphi(\gamma^* u) = \alpha_1(u, g) \varphi(\gamma^* u \bar{g})$$

$$\therefore \text{よって} \quad \alpha_1(\gamma g) = \alpha_1(g)$$

$$u \bar{g} = \gamma \cdot u \bar{g} \quad \text{よって} \quad (\gamma^* u) \bar{g} = (\gamma^* \gamma) \gamma^* (u \bar{g})$$

$$\gamma^* \gamma \in L, \quad \gamma^* u \bar{g} \in U$$

$$\therefore \gamma^* (u \bar{g}) = (\gamma^* u) \bar{g}$$

Q.E.D.

また

$$L_v \circ R_u = R_u \circ L_v \quad u, v \in U \quad \dots (3)$$

$$\text{よって} \quad L_\gamma \circ R_u = R_u \circ L_\gamma \quad \dots (4)$$

2. Proposition 5 Γ の 2 -つの表現 $\{L_\gamma; L^2(U)\}$ は、

Γ の既約表現の multiple 表現の直和である。さらに既約表現 $D^\alpha(\gamma)$ の multiple 表現の値の空間は適当な projection により、特徴づけられる。 [3] pp 71-81.

さて、 2 -つの表現 $D^\alpha(\gamma)$ に対応する projection を用いる。

$$E_{ij}^\alpha = N_\alpha \int_\Gamma d_{ij}^\alpha(\gamma) L_\gamma d\gamma \quad (\text{operator norm による積分}) \quad \dots (5)$$

$$E^\alpha = \sum_{i,j} E_{ij}^\alpha \quad \dots (6)$$

$$\mathcal{H}_j^\alpha = E_{jj}^\alpha L^2(U), \quad \mathcal{H}^\alpha = E L^2(U) = \sum_{j=1}^{N_\alpha} \oplus \mathcal{H}_j^\alpha \quad \dots (7)$$

$L_\gamma \circ T_g = T_g \circ L_\gamma$ 2. あるから

$$E_{jj}^\alpha \circ T_g = T_g \circ E_{jj}^\alpha, \quad E^\alpha \circ T_g = T_g \circ E^\alpha \quad \dots (8)$$

故に: $\mathcal{H}_j^\alpha, \mathcal{H}^\alpha$ は T_g 2. 不変 2. ある.

Proposition 6 表現 $\{T_g, L^2(U)\}$ は

$$L^2(U) = \sum_{\alpha} \oplus \left(\sum_{j=1}^{N_\alpha} \mathcal{H}_j^\alpha \right), \quad T_g = \sum_{\alpha} \oplus \left(\sum_{j=1}^{N_\alpha} T_g^{(\alpha, j)} \right)$$

と $\{T_g^{(\alpha, j)}, \mathcal{H}_j^\alpha\}$ の直和に分解する. 従って, 2 parameter $(\alpha, j; \gamma)$ により, 2 通りの表現が与えられる.

以下では表現 $\{T_g^{(\alpha, j)}, \mathcal{H}_j^\alpha\}$ $j=1, 2, \dots, N_\alpha$ から 2 通りの同値 2. ある 2. とする. 故に: この構造を調べ, 3. の準備をする. このため U の右正則表現の性質を用いる.

3. Proposition 7 U の右正則表現 $\{R_u, L^2(U)\}$ は既約表現 $C^0(U)$

$\beta \in \mathcal{C}$ の重複度 N_β なる multiple 表現の直和に分解する.

3.12 C^0 の multiple 表現の値域空間 $\mathcal{M}^\beta$ は C^0 の行列要素から張られる N_β^2 次元の $L^2(U)$ の部分空間 2. ある. [4] §33, [3] pp138~139.

12. Γ の既約 2 通りの表現 $D^\alpha(\gamma), \alpha \in \Gamma$ を一列に固定する. 3.12 U の既約表現 $C^0(\gamma)$ を Γ に制限 L^2 とす. この行列は

$$C^0(\gamma) = \begin{pmatrix} D^{\alpha_1}(\gamma) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D^{\alpha_{N_\gamma}}(\gamma) \end{pmatrix} \quad \dots (9)$$

と $D^{\alpha_i}(\gamma)$ の完全直和に 2. なるように normalize 2. ある.

$$\mathcal{M}^\beta = [C_{\beta_j}^\beta, \lambda, j=1, 2, \dots, N_\beta]$$

$$C^0(uu_0) = C^0(u) C^0(u_0) \quad \dots (10)$$

2. あるから 行行列 C^0 の各行ベクトルは表現 C^0 の値域 N_β 次元不変部分空間を張る. $\mathcal{M}^\beta$ は L_γ 2. 不変 2. あるから. 故に:

$$C^0(\gamma^+ u) = C^0(\gamma^+) C^0(u) \quad \therefore \quad {}^t C^0(\gamma^+ u) = {}^t C^0(u) \overline{C^0(\gamma)} \quad \dots (11)$$

であるから、行列 $D^{\alpha}(\gamma)$ が位置する C^{β} の各行の行列要素は $\mathcal{H}^{\alpha}$ に属し、
 そうして $d_{jj}^{\alpha}(\gamma)$ が位置する行の行列要素は $\mathcal{H}_j^{\alpha}$ に属する。

すなわち、 $\mathcal{H}^{k(\beta)} = E^{\alpha} \mathcal{H}^{\beta}$ $\mathcal{H}_j^{k(\beta)} = E_{jj}^{\alpha} \mathcal{H}^{\beta}$ とあると

$$\mathcal{H}^{\beta} = \sum_{\alpha} \mathcal{H}^{k(\beta)}$$

$$\text{すなわち } \mathcal{H}^{\alpha} = \sum_{\beta} \mathcal{H}^{k(\beta)} \quad \mathcal{H}^{k(\beta)} = \sum_{j=1}^{N_{\alpha}} \mathcal{H}_j^{k(\beta)} \quad \dots (12)$$

$$\mathcal{H}_j^{\alpha} = \sum_{\beta} \mathcal{H}_j^{k(\beta)} \quad \dots (13)$$

と α, β の二つに分ける。これは $\mathcal{H}^{\beta}$ について C^{β} の行列要素を集めると、
 $L^2(U)$ の完全直交基底が与えられることに留意すればよい。

$\mathcal{H}_j^{k(\beta)}$ は C^{β} のある行に位置する行列要素から成る。この事情を α_1 に α, β 2 図示すると、

$$C^{\beta} = \begin{pmatrix} C_{11}^{\beta} & C_{12}^{\beta} & \dots & C_{1N_{\alpha}}^{\beta} \\ C_{21}^{\beta} & C_{22}^{\beta} & \dots & C_{2N_{\alpha}}^{\beta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N_{\alpha}1}^{\beta} & C_{N_{\alpha}2}^{\beta} & \dots & C_{N_{\alpha}N_{\alpha}}^{\beta} \end{pmatrix} \left. \begin{array}{l} \dots \mathcal{H}_1^{k(\beta)} \\ \dots \mathcal{H}_2^{k(\beta)} \\ \dots \mathcal{H}_{N_{\alpha}}^{k(\beta)} \end{array} \right\} \mathcal{H}^{k(\beta)} \quad \dots (14)$$

以上よりこれから

Theorem 3 表現 $\{T_g^{k(\beta)}; \mathcal{H}_j^{\alpha}\}$ が U の表現 C^{β} を含む度数は、
 C^{β} が Γ の表現 D^{α} を含む度数に等しい。

証明 $\mathcal{H}_j^{\alpha}$ に於て、 C^{β} の重複度 n の空間は $\mathcal{H}_j^{k(\beta)}$ である。
 $\mathcal{H}_j^{k(\beta)}$ の表現 C^{β} の重複度は C^{β} が D^{α} を含む度数に等しい。

Q.E.D.

Corollary $\{T_g^{k(\beta)}; \mathcal{H}_j^{\alpha}\}$ の α の class 1 であるものは、

$D^{\alpha}(\gamma) \equiv 1$ に対応するものである。

したがって class 1 である表現は

$$\{T_g; \mathcal{H}\}, \quad \mathcal{H} = \{\varphi(u): \varphi \in L^2(U), \varphi(gu) = \varphi(u)\} \quad \dots (15)$$

$$T_g \varphi(u) = \alpha_1(ug) \varphi(u\bar{g})$$

証明 $\{T_g^{k(\beta)}; \mathcal{H}_j^{\alpha}\}$ は $C^{\beta}(u) \equiv 1$ を含むものである。したがって C^{β} は D^{α} を含むものである。故に $D^{\alpha}(\gamma) \equiv 1$ 。

逆は明らかである。

Q.E.D.

4. $\mathcal{U}$ の表現 C^α のために 3. に述べた如く normalize した一列列定義であり、各 $\mathcal{H}_j^\alpha$ に対して含まれている C^α の行列要素を標準基底とよぶ。うちに述べたように C^α は各 $\mathcal{H}_j^\alpha$ を高々 1 回しか含むというので、標準基底は、絶対値 1 の定数倍をうけいじまる。

これから $\alpha \in \Omega$ を一つ固定して話を進める。 N_α を N と書く。

D^α を含む $\mathcal{U}$ の表現を C^{β_i} $i=1, 2, \dots$ とする。~~添字 β_i を $i=1, 2, \dots$ とする~~

$$C^{\beta_i}(\alpha) = \begin{pmatrix} D^\alpha(\alpha) & & 0 \\ 0 & \cdots & D^{\beta_i}(\alpha) \end{pmatrix} \quad \text{とし、} \quad \begin{matrix} \text{行列 } D^\alpha \text{ の位置に} \\ \text{行列 } C^{\beta_i} \text{ から} \end{matrix}$$

行よりなる N 行 N_{β_i} 列の函数行列を取り出す。各 β_i に対しても同様に $N - N_{\beta_i}$ 函数行列を作り、 β_i の列番号に i を横に並べて N 行無限列の函数行列重を得る。

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} C_{11}^1 & C_{12}^1 & \cdots & C_{1N_1}^1 \end{matrix} & \begin{matrix} C_{11}^2 & \cdots & C_{1N_2}^2 \end{matrix} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \\ \begin{matrix} C_{N_1}^1 & C_{N_2}^1 & \cdots & C_{NN_1}^1 \end{matrix} & \begin{matrix} C_{N_1}^2 & \cdots & C_{NN_2}^2 \end{matrix} & \cdots \end{pmatrix} \quad \dots (16)$$

各 C^{β_i} から C^{β_i} から D^α を含む度数と同じ個数の $N - N_{\beta_i}$ 行列を得る。このように、行列要素に対する添字を上添字は自然数に、下の添字も 1 から始まるようにつけかえてある。

$$C^{\beta_i}(\alpha u) = C^{\beta_i}(\alpha) C^{\beta_i}(u) \quad \dots (17)$$

$$i=1, 2 \quad \Phi(\alpha u) = D^\alpha(\alpha) \Phi(u) \quad \dots (18)$$

Φ_j は Φ の j 行である。 Φ_j の行列要素は、 $\mathcal{H}_j^\alpha$ の標準基底である。完全直交系をなしている。この直交系を同じ文字 Φ_j で表す。故に $\mathcal{H}_j^\alpha = [\Phi_j]$ と書ける。同様に $\mathcal{H}^\alpha = [\Phi]$ である。

表現 $\{T_g^{(\alpha, \beta)}, \mathcal{H}_j^\alpha\}$ は標準基底を用いて書いた。 $T_g^{(\alpha, \beta)}$ の行列 $B_j(g)$ によって、

$$T_g^{(\alpha, \beta)} \Phi_j = \Phi_j \cdot B_j(g) \quad \dots (19)$$

故に $\{T_g^{(\alpha, \beta)}, \mathcal{H}_j^\alpha\}$ $j=1, 2, \dots, N_\alpha$ に対して j は等しい値であることは、

$$B_1(g) = B_2(g) = \cdots = B_{N_\alpha}(g) \text{ を示せば分る。}$$

$T_g^{(\alpha, \beta)}$ を U に制限すると $\{T_g, L^2(U)\}$ は U の正規表現であるから

$$B_j(u) = \begin{pmatrix} C^1(u) & & 0 \\ & C^2(u) & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix} \quad j=1, 2, \dots, N_u \quad \dots (20)$$

Theorem 4

$\{T_g^{(\alpha, \beta)}; \mathcal{H}_j^\alpha\}$ は標準基底 Φ_j に (2) に 1 つの行列 $B(g)$ を書か表わされる. $T_g \Phi_j = \Phi_j B(g)$

従って $\{T_g^{(\alpha, \beta)}; \mathcal{H}_j^\alpha\} \quad j=1, 2, \dots, N_u$ は $\mathbb{R}_1$ に $\mathbb{R}$ の同値である.

[証明] 事実より来ることは, D^α と $\mathbb{R}$ の同値な D'^α をと, T_α と

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \Phi'_1 \\ \vdots \\ \Phi'_{N_u} \end{pmatrix} \quad \mathcal{H}'^\alpha = [\Phi'_j] \text{ を同様に (2) 作ったとき, } \mathcal{H}'^\alpha \text{ からは } T_g \text{ が不変}$$

であることがわかる.

$$B_1(g) = B_2(g) \text{ と示せば十分である.}$$

$$T_g^{(\alpha, \beta)} C_{jg}^s = \sum_{p \neq r} \gamma_{pg:rs}^j C_{jg}^p \quad \dots (21)$$

$$\text{と } \alpha < \gamma \quad \gamma_{pg:rs}^1 = \gamma_{pg:rs}^2 \text{ と示せばよい.}$$

$$D'^\alpha = T^{-1} D^\alpha T \quad T = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \\ & & 1_{N-2} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \alpha = \cos \theta \neq 0 \\ \beta = \sin \theta \neq 0 \end{matrix} \quad \dots (22)$$

$$\text{を } \alpha < \gamma, \quad C'^\beta = T^{\alpha-1} C^\alpha T^\beta \quad \dots (23)$$

$$\therefore T^\alpha = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & T_{1,1} \dots T_{N-1,N-1} \end{pmatrix} \text{ は } C^\beta(r) \text{ に } \frac{1}{\beta} \leq 2 D^\alpha(r) \text{ の}$$

表わされる行列に T をあてた行列

とすれば C'^β から D'^α に $\mathbb{R}$ に normalize された U の表現である. から

作られた $\begin{pmatrix} \Phi'_1 \\ \Phi'_2 \end{pmatrix}$ と U の $\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}$ との間に $\mathbb{R}_1$ は各 V を固定するとき,

$$\begin{pmatrix} C'^1_{11} & C'^1_{12} \\ C'^1_{21} & C'^1_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^1_{11} & C^1_{12} \\ C^1_{21} & C^1_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad \dots (24)$$

$$\begin{pmatrix} C'^1_{13} & C'^1_{14} & \dots & C'^1_{1N_r} \\ C'^1_{23} & C'^1_{24} & \dots & C'^1_{2N_r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^1_{13} & C^1_{14} & \dots & C^1_{1N_r} \\ C^1_{23} & C^1_{24} & \dots & C^1_{2N_r} \end{pmatrix}$$

$\{T_g, \mathcal{H}'^\alpha\}$ に $\mathbb{R}$ と

$$T_g C'^1_{jg} = \sum_{p \neq r} \gamma_{pg:rs} C'^1_{jp} \quad \dots (25)$$

とあるとき、この右辺に(24)より、 C_{1p}^r と C_{2p}^r にそれぞれ書か表わしたと、左辺
 C_{1p}^r に(24)を代入し(21)を用いて C_{1p}^r , C_{2p}^r にそれぞれ書か表わしたとすると
 両式が一致する。任意の r, s を固定すると、

$$\left(\gamma_{ps;rs}^1 \right)_{\substack{1 \leq p \leq N_r \\ 1 \leq s \leq N_s}} = \left(\gamma_{ps;rs}^2 \right) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \\ & & 1_{N_r-2} \end{pmatrix} \left(\gamma_{ps;rs} \right) \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \\ & & 1_{N_s-2} \end{pmatrix} \quad \dots (26)$$

が成立する。とされる。

$$\text{故に } (\forall g \in G) \quad B_1(g) = B_2(g)$$

Q.E.D.

この定理により、重の各行は、 $\alpha + \nu$ 。

$$T_g(\alpha, \nu) \Phi_j = \Phi_j B(g)$$

$$\text{故に } T_g \Phi = \Phi B(g)$$

... (27)

2. 以上より、重の各行は、 $\alpha + \nu$ 。 $\left(\begin{matrix} C_{1p}^r \\ C_{2p}^r \\ \vdots \\ C_{Np}^r \end{matrix} \right) \quad r=1, 2, \dots, p=1, \dots, N_r$ から与えられる。

U の $\mathbb{C}^N$ 値 L^2 の閉部分空間を $\mathcal{H}^\alpha$ とするとき、

G の表現 $\{T_g, \mathcal{H}^\alpha\}$ が構成される。

$$\mathcal{H}^\alpha \ni \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_N \end{pmatrix} \quad \varphi_i \in L^2(U) \quad \|\varphi\|^2 = \sum_{i=1}^N \|\varphi_i\|_{L^2(U)}^2$$

$$\varphi(gu) = D^\alpha(g) \varphi(u)$$

... (28)

$$T_g \varphi(u) = \alpha_1(g) \varphi(gu)$$

... (29)

$$\alpha_1(g) = (g_{nn} - g_{m,n})^{-\frac{1}{2}(2r+p+n-2)}$$

Theorem 5

$\{T_g, \mathcal{H}^\alpha\}$ と $\{T_g^{(\alpha, \nu)}, \mathcal{H}_j^\alpha\}$ とは 2 つの同値である。

証明) $\mathcal{H}^\alpha \ni \begin{pmatrix} C_{1p}^r \\ \vdots \\ C_{Np}^r \end{pmatrix} \rightarrow \sqrt{N} C_{jp}^r \in \mathcal{H}_j^\alpha$ 基底の対応は

で定義される変換は onto isometric な変換である。

この変換が表現の同型対応と一致することは、 T_g の定義により、表現が
 同一の行列 $B(g)$ により与えられることから分る。

Q.E.D.

5. 表現 $\{T_g, \mathcal{H}^\alpha\}$ の構造に關連して。

Theorem 6 表現 $\{T_g, f^\alpha\}$ に関する.

(1) f^α は $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_N \end{pmatrix}$ $\varphi_i \in L^2(U)$ から $\varphi(gu) = D^\alpha(g) \varphi(u)$... (30)

をみたす $\mathbb{C}^N$ 値函数 φ の全体 F なる Hilbert 空間である.

(2) $\{T_g, f^\alpha\}$ を U に制限した表現 $\{T_u, f^\alpha\}$ は

Γ の表現 D^α を U に誘導した表現である.

注 3.4.1 には 3.4.3 誘導表現の定義とは別な定義を導入する.

[定義3] G : 局所コンパクト群, K : 3つの閉部分群, $\Omega = K \backslash G$

μ : Ω 上の G -invariant measure. $\pi: G \rightarrow \Omega$ 上の自然写像.

また K の N 次元 G -等変表現 $\{V_k, \mathbb{C}^N\}$ を与える.

$f_g = \{\varphi(g) : G \text{ 上の } \mathbb{C}^N \text{ 値函数 } \varphi \text{ であって, } a) \text{ 及び } b) \text{ を満たす}\}$

a) $(\forall k \in K) \quad \varphi(kg) = V_k \varphi(g) \quad (\text{a.a. } g)$... (31)

b) $\varphi(g) = \begin{pmatrix} \varphi_1(g) \\ \vdots \\ \varphi_N(g) \end{pmatrix} \quad |\varphi_i(g)|^2$ が Ω 上の可測函数であるから

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^N |\varphi_i(g)|^2 d\mu(\pi(g)) < +\infty$$

f_g は 内積 $\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \varphi_i(g) \overline{\psi_i(g)} d\mu(\pi(g))$ による Hilbert 空間になる.

$U_{g_0} \varphi(g) = W(\pi(g), g_0) \varphi(g g_0)$... (32)

$$W(\pi(g), g_0) = \frac{d\mu(\pi(g)g_0)}{d\mu(\pi(g))}$$

よって f_g の作用素 U_{g_0} を定義すると

$\{U_g, f_g\}$ は G の G -等変表現である. この表現を K の表現 $\{V_k, \mathbb{C}^N\}$ を G に誘導した表現と見做す.

[Th. 6 の証明] U がコンパクト群であるから, 誘導表現は非常に容易である.

D^α を誘導した U の表現を $\{T_u, f^{[\alpha]}\}$ とする.

$f^{[\alpha]}$ は i) $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_N \end{pmatrix} \quad \varphi_i \in L^2(U)$

ii) $\varphi(gu) = D^\alpha(g) \varphi(u)$... (34)

なる $\mathbb{C}^N$ 値函数 φ の全体である.

$$\|f^{[\alpha]}\|^2 = \sum_{i=1}^N \|\varphi_i\|_{L^2(U)}^2$$

(1) に関することは $f^\alpha = f^{[\alpha]}$ である.

$\mathcal{L}^{\alpha}$ は明らかである。

逆に任意の $\varphi \in \mathcal{L}^{\alpha}$ をとる。

$$\varphi(\delta u) = D^{\alpha} \varphi(u) \quad \text{for } \varphi_j \in \mathcal{L}_j^{\alpha} \quad \dots (35)$$

かつ、さらに $\mathcal{L}_j^{\alpha}$ の標準基底 C_{jP}^r $r=1, 2, \dots; P=1, 2, \dots, N_r$ を用いて

$$\varphi_j = \sum_{P,r} \gamma_{jPr}^{\alpha} C_{jP}^r \quad \text{と書ける。}$$

$$\text{故に } \varphi_j(\delta u) = \sum_{P,r} \gamma_{jPr}^{\alpha} C_{jP}^r(\delta u) = \sum_{P,r} \gamma_{jPr}^{\alpha} d_{j\ell}^{\alpha}(\delta) C_{\ell P}^r(u) \quad \dots (36)$$

$$\text{よって (35) より } \varphi_j(\delta u) = \sum_{\ell=1}^{N_j^{\alpha}} d_{j\ell}^{\alpha}(\delta) \varphi_{\ell}(u) = \sum_{\ell, P, r} d_{j\ell}^{\alpha}(\delta) \gamma_{\ell P r}^{\alpha} C_{\ell P}^r(u) \quad \dots (37)$$

(36), (37) を比較して

$$d_{j\ell}^{\alpha}(\delta) \gamma_{\ell P r}^{\alpha} = d_{j\ell}^{\alpha}(\delta) \gamma_{j P \ell}^{\alpha} \quad (\forall \delta) \quad (\forall \ell, j) \quad \dots (38)$$

$$\text{故に } \gamma_{j P r}^{\alpha} = \gamma_{j P \ell}^{\alpha} = \dots = \gamma_{j P N_j^{\alpha}}^{\alpha} \equiv \gamma_{j P}^{\alpha} \quad \text{と置く。}$$

$$\varphi = \sum_{P,r} \gamma_{P r}^{\alpha} \begin{pmatrix} C_{1P}^r \\ C_{2P}^r \\ \vdots \\ C_{N_r P}^r \end{pmatrix} \in \mathcal{L}^{\alpha} \quad \dots (39)$$

$$\text{故に } \mathcal{L}^{\alpha} = \mathcal{L}^{(\alpha)} \quad \text{かつ } \bigwedge_{\alpha} \Gamma_{\alpha}.$$

(2) については、さらに

$$T_{u_0} \varphi(u) = \varphi(u u_0)$$

$$V_{u_0} \varphi(u) = \varphi(u u_0)$$

に留意すれば明らかである。

(Q.E.D.)

定理5 および定理6に留意すれば、定理3は次のような内容を持つ。

Theorem 7 Γ の表現 D^{α} が誘導的、 U の表現 $\{V_u, \mathcal{L}^{(\alpha)}\}$

が $(\mathcal{L}^{\alpha})$ を含む度数は、 $(\mathcal{L}^{\alpha})$ から D^{α} を含む度数に等しい。

この定理は、 U を任意のコンパクト群、 Γ をその任意の開部分群として、定理3, 5, 6, 7 を全く同様にして言明できるから、明らかに成立する。

かくして我々は商空間としてのコンパクト群の誘導表現に関する Frobenius の定理 (Th. 7) を得たのである。

いま述べたように、この言明が一般のコンパクト群にも直ちに適用できるように、次の6. にある事実をかく。一般論にはなっていないから、言葉が返して見れば直ちに了解される筈である。

注意1 この§6に述べられた表現の分解や同値性の証明の方法は、かつ、一般性をもつことに注意せよ。

注意2 (1)に述べたように $SL(n, \mathbb{C})$ の非縮退基底表現を

$$G = SL(n, \mathbb{C}), \quad U = SO(n), \quad \Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix} \mid e^{i\theta_1} \cdots e^{i\theta_n} = 1 \right\}$$

と、全く同様に λ 法を再構成される。Th3, Th6 は同様に成立する。
(Th5 は自明)。

注意3. $SL(2, \mathbb{R})$ に与えられた $G = SL(2, \mathbb{R}), \quad U = SO(2), \quad \Gamma = \{\pm 1\}$

と基底表現 D_{ip}^+, D_{ip}^- を再構成される。cf[8].

6. U および Γ の既約基底表現の関数系を述べる。

U, Γ とはそれぞれ $SO(n+1)$, $\begin{pmatrix} SO(n) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と同視する。

(1°) $n = 2l+2$ のとき

$U = SO(2l+1)$ の基底表現は、

$0 \leq m_1 \leq m_2 \leq \cdots \leq m_l$ なる整数の組

$\beta = (m_1, m_2, \dots, m_l)$ と表す。

この表現 C^β は $0 \leq m_1 \leq m_1 \leq m_2 \leq \cdots \leq m_l \leq m_l$... (40)

なる整数の組 $\alpha = (m_1, m_2, \dots, m_l)$ に対応する $\Gamma = SO(l)$ の表現は 1 回ずつ含む。

$n = 2l+1$ のとき

$U = SO(2l)$ の表現は $m_1 \leq m_2 \leq \cdots \leq m_l$ なる整数の組

$\beta = (m_1, m_2, \dots, m_l)$ と表す。

表現 C^β は $m_1 \leq m_1 \leq m_2 \leq \cdots \leq m_l \leq m_l$ なる整数の組

$\alpha = (m_1, \dots, m_{l-1})$ に対応する $\Gamma = SO(l-1)$ の表現 D^α を

1 回ずつ含む。cf[2] 附録 I。

故に定理3を精密化する必要がある。

Theorem 8 $\{T_g^{(\alpha, \beta)}, \mathcal{H}_j^\alpha\}$, 従って $\{T_g, \mathcal{H}^\alpha\}$ は U の既約表現 C^β を C^β から D^α を含むときにかぎり 唯一個 含む。

また $D^\alpha (\alpha \in \Gamma)$ は基底表現 $\mathcal{H}_j^\alpha$, $\mathcal{H}^\alpha$ の標準基底は絶対値1の定数倍をのみと決定される。

§7. 2つの型の表現がユ=タリ同値であること.

同様のparameter $(\alpha; \pi)$ に対して2つの型の表現.

$\{T_g, f_g^\alpha\}$ (§4) と $\{T'_g, f'_g{}^\alpha\}$ (§5) とがユ=タリ同値であることを示す.
後者の作用素 T_g を T'_g と書いて区別する.

1. (1°) $G=LU$ における $g=l \cdot u$ と一意に分解できる.

$K=\Gamma \cdot L$ であるから $g=l \cdot u$ と分解したとき, $g=(l_2 \sigma)(\sigma^T u)$ であるから
この l_2, u は Γ の元を9.3.11で確定する. しかし, 次の積分公式が成立する.

$$\int \psi(g) d\mu(g) = c \int \psi(l_2 u) d\mu_{\mathbb{R}}(l_2) d\mu(u) \quad \dots (1)$$

$$\forall \psi(g) \in L'(G)$$

証明 (i) $d\mu(u), d\mu(\sigma)$ は $\mu(U)=1, \mu(\Gamma)=1$ であるからとてある.

$\Gamma \backslash U = \tilde{U}$ 上の不変測度 $d\mu(\tilde{u})$ が存在して.

$$\forall \phi \in L'(U) \quad \int_U \phi(u) d\mu(u) = \int_{\tilde{U}} \left[\int_{\Gamma} \phi(\sigma u) d\mu(\sigma) \right] d\mu(\tilde{u}) \quad \dots (2)$$

すなわち $\phi(\sigma u) = \phi(u)$ であるから

$$\int_U \phi(u) d\mu(u) = \int_{\tilde{U}} \phi(u) d\mu(\tilde{u}) \quad \dots (3)$$

(ii) G 上の2つの不変測度

$$d\mu(g) = d\mu_{\mathbb{R}}(l_2) \cdot d\mu(l) \quad g = l_2 \hat{u}(l)$$

$$d\mu_1(g) = d\mu_{\mathbb{R}}(l) d\mu(u) \quad g = l u \quad \text{の間には}$$

$$d\mu(g) = c d\mu_1(g) \quad c > 0 \quad \dots (4)$$

であるから (4) 式がある.

G 上の $\tilde{G}$ が2つの外積連続な関数全体の関数空間を $L(G)$ とかくと

$\psi \in L(G)$ に対して (1) と示せばよい. (4) による.

$$\int_G \psi(g) d\mu(g) = c \int_U \left[\int_L \psi(l u) d\mu_{\mathbb{R}}(l) \right] d\mu(u)$$

$$\psi'(u) = \int_L \psi(l u) d\mu_{\mathbb{R}}(l) \quad \text{である.}$$

$$\int_U \psi'(u) d\mu(u) = \int_{\tilde{U}} \int_{\Gamma} \psi(\sigma u) d\mu(\sigma) d\mu(\tilde{u})$$

$$\text{よって} \quad \int_{\Gamma} \psi(\sigma u) d\mu(\sigma) = \int \psi(l \sigma u) d\mu_{\mathbb{R}}(l) d\mu(\sigma)$$

$$= \int_K \psi(l_2 u) d\mu_{\mathbb{R}}(l_2) \quad (\S 3. (b) \text{ による})$$

$$\text{したがって} \quad \int_U \psi'(u) d\mu(u) = \int_{\tilde{U}} \left[\int_K \psi(l_2 u) d\mu_{\mathbb{R}}(l_2) \right] d\mu(\tilde{u}) = \int_U \int_K \psi(l_2 u) d\mu_{\mathbb{R}}(l_2) d\mu(u)$$

$$(2^\circ) \text{ 均質空間 } \hat{N} = K \backslash G = \Gamma \backslash L \backslash G = \Gamma \backslash U = \tilde{U} \quad \text{であるから.} \quad \text{Q.E.D.}$$

$\hat{N} \ni \eta \mapsto \Gamma \setminus U = \tilde{U}$ の元 $\tilde{u}$ は一意に定まる。 $\hat{N}$ 上の測度 $d\mu(\eta)$ により、
 $d\mu(\eta) = c(\beta^{-1}(u)) d\mu(\tilde{u})$... (5)

[証明] $\psi \in L(G)$ により

$$f(g) = \int_K \psi(hg) (\beta(hg)) d\mu(hg) = (\beta(g)) \int_K \psi(hg) d\mu(hg) \text{ とおくと, } \dots (6)$$

$f(hg) = f(g)$ により f は $\Gamma \backslash G$ 上の函数と見做す。

また $\Gamma \backslash G = \hat{N}$ と見做す。

$$f(\eta) = \int_K \psi(h\eta) d\mu(h\eta)$$

$$\int_G \psi(g) d\mu(g) = \int_{\hat{N}} f(\eta) d\mu(\eta) \quad (\S 3. (7)) \quad \dots (7)$$

つまり $\Gamma \backslash G = \tilde{U}$ と見做す。

(7) に注意して $\tilde{u} \mapsto \tilde{u}$ は変換と見做す。正値可測函数 $w(\tilde{u})$ が存在して

$$\begin{aligned} \int_{\hat{N}} f(\eta) d\mu(\eta) &= \int_{\tilde{U}} f(\tilde{u}) w(\tilde{u}) d\mu(\tilde{u}) \\ &= \int_{\tilde{U}} w(\tilde{u}) (\beta(\tilde{u})) \left[\int_K \psi(h\tilde{u}) d\mu(h\tilde{u}) \right] d\mu(\tilde{u}) \quad \dots (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{一方} \quad \int_{\hat{N}} f(\eta) d\mu(\eta) &= \int_G \psi(g) d\mu(g) \\ &= c \int_{\tilde{U}} \left[\int_K \psi(h\tilde{u}) d\mu(h\tilde{u}) \right] d\mu(\tilde{u}) \quad \dots (9) \end{aligned}$$

(8), (9) を比較して、 $\tilde{f}(\tilde{u}) = \int_K \psi(h\tilde{u}) d\mu(h\tilde{u}) \in L(\tilde{U})$ の $\tilde{u}$ ごとに
 $\tilde{f}(\tilde{u}) = c$ である。留意する。

$$w(\tilde{u}) (\beta(\tilde{u})) = c \quad \therefore w(\tilde{u}) = c(\beta^{-1}(\tilde{u}))$$

Q. E. D.

2. 参考までに必要函数を列挙する。

$$\beta(g) \stackrel{\text{def}}{=} \beta(h) = \left(\frac{g_{m+1} - g_{m,n} - g_{m,n+1} + g_{m,n}}{2} \right)^{m-2} = e^{-(m-2)t}$$

$$\chi(g) = \chi(h) = \left(\frac{g_{m+1} - g_{m,n} - g_{m,n+1} + g_{m,n}}{2} \right)^{-\rho} = e^{\rho t}$$

$$D^\alpha(g) = D^\alpha(h)$$

$$\therefore g = hg = a(t) \delta \zeta, \eta$$

$$A(g) = (\beta^{-\frac{1}{2}}(g)) \chi(g) D^\alpha(g), \quad \alpha(g) = (\beta^{-\frac{1}{2}}(g)) \chi(g) \quad \dots (10)$$

また $\{T_g, \tilde{f}_g\}$ は

$$\tilde{f}_g \mapsto f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} \quad f_i \in (L^2_g)$$

$N \in \mathbb{N}$ とおき、

$$T_g f(\eta) = A(\eta g) f(\eta g)$$

... (11)

(証明) $V T_g V^{-1} = T_g'$ を示す.

$V f(\eta) = \varphi(u)$ とおくと

$$\begin{aligned} V T_g V^{-1} \varphi(u) &= V T_g f(\eta) = (c^{\frac{1}{2}} A(u) A(\eta g) f(\eta \bar{g})) \\ &= A(u) A(\eta g) A(u \bar{g})^{-1} \varphi(u \bar{g}) \end{aligned} \quad \dots (17)$$

$\therefore \eta$ と u は K^G の同じ剰余類に属するから,

$$u = \eta \eta$$

$\dots (18)$

すなわち

$$\eta g = \eta_1 \eta \bar{g}$$

$$\therefore u g = \eta \eta_1 \eta \bar{g} = \eta \cdot u \bar{g}$$

$\dots (19)$

$\eta \bar{g}$ と $u \bar{g}$ は 同じ剰余類に属する.

$$A(\eta g) = A(\eta) A(g), \quad A(\eta) = 1_N, \quad A(u \bar{g}) = e^{\frac{1}{2}(2\eta p + n - 2)t} \cdot 1_N \quad \dots (20)$$

に注意すれば (18), (19) より

$$A(u g) = A(\eta) A(\eta_1) = A(u) A(\eta g) = A(\eta) A(u \bar{g}) \quad \dots (21)$$

$$\therefore A(u) A(\eta g) A(u \bar{g})^{-1} = A(\eta)$$

$$= \alpha(\eta) 1_N$$

$$= \alpha_1(u g) = \frac{\alpha(u \bar{g})}{\alpha(u \bar{g})} \quad \dots (22)$$

$$\text{よって} \quad V T_g V^{-1} \varphi(u) = \alpha_1(u g) \cdot \varphi(u \bar{g})$$

$$= T_g' \varphi(u)$$

$\dots (23)$

Q.E.D.

§8. I_3, I_4 の表現について.

$SL(2, \mathbb{R}), SL(2, \mathbb{C})$ はそれぞれ I_3, I_4 の 2 重表現である. $SL(2, \mathbb{R}), SL(2, \mathbb{C})$ の表現となる I_3, I_4 の spinor 表現は, [8] および [2, 13] に与えられている. これは §4 ~ §6 に $\hat{\lambda} \hat{\sigma}_2$ 構成した表現から, これらの文献に $\hat{\lambda} \hat{\sigma}_2$ であることが示されている. ユニタリ-な一重の spinor 表現を特殊な表現 (I_3 の離散系列) と対応していることを示す. これは一般の I_n に対する表現の構成方法を正当化するものである. 以下では計算は面倒で複雑であるからすべて省略する.

1. I_3 の場合.

(1°) まず $\Gamma = SL(2, \mathbb{R})$ と I_3 との対応をつける.

これを上半平面の変換群と見て対応させるのである.

$$\Gamma \ni a = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad \text{は} \quad a(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad (1)$$

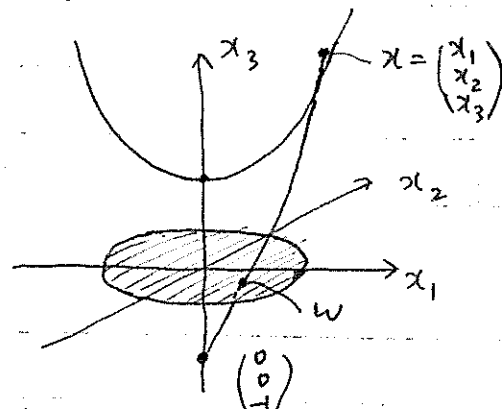
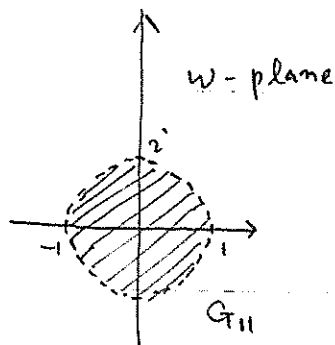
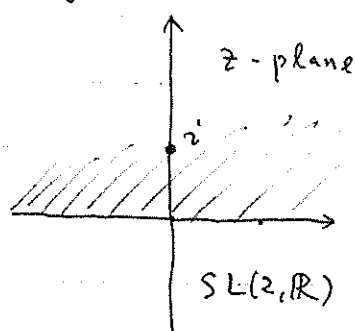
複素平面の上半平面の変換 (分数変換) に対応する. Γ は分数変換群である.

$\hat{a} = T a T^{-1} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$ である. これは単位円を用いた分数変換群 G_{II} に対応する.

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \zeta \\ \bar{\varepsilon} & \bar{\zeta} \end{pmatrix} \quad |\varepsilon|^2 - |\zeta|^2 = 1 \quad \hat{a}(w) = \frac{\varepsilon w + \zeta}{\bar{\varepsilon} w + \bar{\zeta}} \quad (2)$$

この単位円の変換 $\hat{a}$ を図のように投影し, 3次元空間 $\mathbb{R}^3$ 中の二葉双曲面 $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1 \quad (x_3 > 0)$ の変換 $g = (g_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$

$g(x) = gx$ に対応する.



すなわち, $\Gamma \ni a \rightarrow g \in I_3$ なる 2 対 1 の対応が与えられるのである. 技術的問題のため, さらに,

$$g \rightarrow g' = T' g T'^{-1} \quad T' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{と変換} \quad 1, 2$$

01 $\rightarrow a \rightarrow g' \in \mathcal{I}_3$ なる文字列をとける. 計算結果行 (2) の文字列を後に必要に応じて表にまとめる.

$$a \quad \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{t}{2}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \zeta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \eta & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g' \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = u(\theta)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cosh t & \sinh t \\ & \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} = a(t)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\zeta & \zeta \\ \zeta & 1 - \frac{1}{2}\zeta^2 & \frac{1}{2}\zeta^2 \\ \zeta & -\frac{1}{2}\zeta^2 & 1 + \frac{1}{2}\zeta^2 \end{pmatrix} = \eta(\zeta)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \eta & \eta \\ \eta & 1 - \frac{1}{2}\eta^2 & -\frac{1}{2}\eta^2 \\ \eta & \frac{1}{2}\eta^2 & 1 + \frac{1}{2}\eta^2 \end{pmatrix} = \hat{n}(\eta)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = v_0$$

(2°) §4.2 構成した $\mathcal{I}_3$ の表現 $\{T_g, \mathcal{Q}_\eta^2\}$ は $\mathcal{N}$ から一次元空間 $\mathbb{R}$ と (10) のようにあるから

$$T_g f(\eta) = \alpha(\eta g) f(\eta \bar{g})$$

$$\alpha(g) = \left(\frac{g_{22} - g_{23} - g_{32} + g_{33}}{2} \right)^{-\frac{1}{2}(2\gamma p + 1)}$$

と (1):

$$T_{v_0} f(\eta) = f(\eta + \eta_0)$$

$$T_{a(t)} f(\eta) = e^{\frac{1}{2}(2\gamma p + 1)t} f(e^t \eta)$$

$$T_\zeta f(\eta) = |1 + \zeta \eta|^{-2\gamma p - 1} f\left(\frac{\eta}{1 + \zeta \eta}\right) \quad \dots (3)$$

$$T_{v_0} f(\eta) = |\eta|^{-2\gamma p - 1} f\left(-\frac{1}{\eta}\right)$$

(3°) 01 $\pm \frac{3}{4}$ 表現 (連立 $\frac{3}{4}$ 表現) のうち $\mathcal{I}_3$ の一組の表現と与えるは $\mathcal{D}_{\gamma p}^+ = \{V_a, L^2(X)\}$ ($X = \mathbb{R}^1$) である.

$$L^2(X) \ni f(x)$$

$$V_a f(x) = |ax + a|^{-\gamma p - 1} f\left(\frac{ax + a}{ax + a}\right) \quad \dots (4)$$

$$\therefore \quad a = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

(1') $\mathfrak{l}_3$ の $\mathfrak{l}_2$ と $\mathfrak{l}_3$ との交換作用素 V_a 1 = $\mathfrak{l}_2$ 2 (4) $\mathfrak{l}_3$ 2 $\mathfrak{l}_2$ を $\mathfrak{l}_2$ とおき
 か $\mathfrak{l}_3$ = $\mathfrak{l}_2$ 1 = $\mathfrak{l}_2$ (3) と比較して.

$\mathfrak{D}_{-2ip}^+$ に交換作用素 V_a か

$\mathfrak{D}_{ip}$ に交換作用素 T_g 1 = $\mathfrak{l}_2$ とおき.

$g = \hat{m}(t), \hat{u}(t), \hat{v}(t), \hat{v}_0$ のとき T 1 = $\mathfrak{l}_2$ かめらる.

と $\mathfrak{l}_3$ は $\mathfrak{l}_2$ の元で生成されるから. $\mathfrak{l}_2$ の g に交換
 T_g と V_a とは $\mathfrak{l}_2$ とおき.

Theorem 9 $SL(2, \mathbb{R})$ の表現 $\mathfrak{D}_{ip}^+$ と $\mathfrak{l}_3$ の表現 $\mathfrak{l}_2$ と
 $\mathfrak{D}_{-2ip}^+$ と $\mathfrak{D}_{ip}$ は $\mathfrak{l}_2$ の元で生成される.

2. $\mathfrak{l}_4 \cong \mathfrak{l}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$

(1') $\mathfrak{M} = SL(2, \mathbb{C})$ と $\mathfrak{l}_4$ との交換作用素 $\mathfrak{l}_2$ を
 作る 4次元空間の表現群と $\mathfrak{l}_2$ と

$$a(p) = a^* p a \quad \text{と} \quad \dots (5)$$

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ \bar{P}_{12} & P_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 + x_3 & x_1 + i x_2 \\ x_1 - i x_2 & x_4 - x_3 \end{pmatrix} \quad 1 = \mathfrak{l}_2 \quad \dots (6)$$

P と $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ と $\mathfrak{l}_4$ との交換作用素 $\mathfrak{l}_2$ を
 $\mathbb{R}^4$ の表現群 g が $\mathfrak{l}_4$ との交換作用素 $\mathfrak{l}_2$ と
 $\mathfrak{l}_2$ の元で生成される. 必要ならば P の表現に注意.

$$a \quad g \quad \begin{pmatrix} e^{\frac{i\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\theta}{2}} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \gamma(\theta)$$

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{t}{2}} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & \cosh t & \sinh t \\ & \cosh t & \sinh t \end{pmatrix} = a(t)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = v_0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ z & 1 \end{pmatrix} \quad \lambda = \xi_1 + i\xi_2 \quad \Delta = \xi_1^2 + \xi_2^2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\xi_1 & \xi_1 \\ & 1 & -\xi_2 & \xi_2 \\ \xi_1 & \xi_2 & 1 - \frac{1}{2}\Delta & \frac{1}{2}\Delta \\ \xi_1 & \xi_2 & -\frac{1}{2}\Delta & 1 + \frac{1}{2}\Delta \end{pmatrix} = n(\xi_1, \xi_2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ z & 1 \end{pmatrix} \quad z = \eta_1 - i\eta_2 \quad \Delta = \eta_1^2 + \eta_2^2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & \eta_1 & \eta_1 \\ & 1 & \eta_2 & \eta_2 \\ -\eta_1 & -\eta_2 & 1 - \frac{1}{2}\Delta & -\frac{1}{2}\Delta \\ \eta_1 & \eta_2 & \frac{1}{2}\Delta & 1 + \frac{1}{2}\Delta \end{pmatrix} = \hat{n}(\eta_1, \eta_2)$$

2° §4.2 構成した $\mathcal{I}_4$ の表現 $\mathcal{O}_{m,ip} = \{T_g, L^2(\hat{N})\}$ は $\mathcal{I}_5$ の $\hat{N}$ は 2次元空間 $\mathbb{R}^2$ であるから

$$L^2(\hat{N}) \ni f(\eta) = f(\eta_1, \eta_2)$$

$$T_g f(\eta) = \alpha(\eta g) f(\eta g) \quad \dots (7)$$

$$\alpha(g) = \alpha(\eta g) = e^{(ip+1)t} e^{im\theta} \quad g = \frac{1}{2} \eta = a(t) r(\theta) \frac{1}{2} \cdot \eta$$

§3.1 の公式 (1), (2), (3) を用いて

$$e^{i\theta} = \frac{(g_{14} - g_{13}) + i(g_{24} - g_{23})}{(g_{33} - g_{34})(g_{41} + i g_{42}) + (-g_{43} + g_{44})(g_{31} + i g_{32})} \quad \dots (8)$$

を用いて §4.2 の公式 (5) - (8) を $\mathcal{O}_{m,ip}$ の L^2 表現 $T_g f(\eta)$ から g から $\eta(g), a(t)$ を $\eta(\eta), r(\theta), \nu_0$ として具体的に求める。

$$\hat{N} \ni \eta = (\eta_1, \eta_2) \rightarrow z = \eta_1 - i\eta_2 \in \mathbb{C} \quad 1 \neq z \neq 2$$

$\hat{N}$ と複素平面 $\mathbb{C}$ とは同型である。 T_g は

$$T_{\eta_0} f(z) = f(z + z_0) \quad \eta_0 = (\eta_1^0, \eta_2^0) \quad z_0 = \eta_1^0 - i\eta_2^0$$

$$T_{a(t)} f(z) = e^{(ip+1)t} f(e^t z)$$

$$T_{r(\theta)} f(z) = e^{im\theta} f(e^{i\theta} z)$$

$$T_{\frac{1}{2}} f(z) = |1 + \gamma z|^{-2ip+2m-2} (1 + \gamma z)^{-2m} f\left(\frac{z}{1 + \gamma z}\right) \quad \dots (9)$$

$$T_{\nu_0} f(z) = (-1)^m |z|^{-2ip+2m-2} z^{-2m} f\left(\frac{1}{z}\right)$$

である。

3° $SL(2, \mathbb{C})$ の $\mathcal{I}_4$ の表現は

$$\mathcal{O}_{m,ip} = \{V_a, L^2(\mathbb{C})\}$$

[III] 補系列の表現

§9. class 1 の補系列の表現

$\mathcal{G}$ を N 上の適当な函数空間とし G の表現

$$f \in \mathcal{G} \quad T_g f(\eta) = \alpha(\eta g) f(\eta \bar{g}) \quad \dots (1)$$

$$\alpha(g) = \left(\frac{g_{m+1,m+1} - g_{m+1,m} - g_{m,m+1} + g_{m,m}}{2} \right)^{-\frac{1}{2}(2ip+m-2)} \quad p \in \mathbb{C} \quad \dots (2)$$

を考へる.

p が実数るときは $\mathcal{G} = L^2(N)$ ととり、自然な内積によつて $\mathcal{G}$ を Hilbert 空間と考へれば $\{T_g, \mathcal{G}\}$ は 既約ユニタリ表現 (class 1) であつた. 一般に $p \in \mathbb{C}$ に對して、適当な函数空間と、 $\mathbb{C}$ に定義された適当な内積によつて T_g がユニタリ表現になるものを求める.

1. ~~$\mathcal{G}' = \{f: \int \int K(\eta, \eta') |f(\eta)| |f(\eta')| d\eta d\eta' < +\infty\}$~~ 積分核 $K(\eta, \eta')$ を用ひて.

$$\mathcal{G}' = \{f: \int \int K(\eta, \eta') |f(\eta)| |f(\eta')| d\eta d\eta' < +\infty\} \quad \text{に}$$

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int \int K(\eta, \eta') f_1(\eta) \overline{f_2(\eta')} d\eta d\eta' \quad \text{によつて内積を導入し}$$

たとき

$$(A) \quad \langle T_g f_1, T_g f_2 \rangle = \langle f_1, f_2 \rangle$$

$$(B) \quad \langle f, f \rangle \geq 0 \quad \forall f \in \mathcal{G}'$$

なる条件をみたすような $K(\eta, \eta')$ の形を求める.

まず条件(A) を書き下しておくと.

$$\begin{aligned} & \int \int K(\eta, \eta') \alpha(\eta g) f_1(\eta \bar{g}) \overline{\alpha(\eta' g) f_2(\eta' \bar{g})} d\eta d\eta' \\ &= \int \int K(\eta, \eta') f_1(\eta) \overline{f_2(\eta')} d\eta d\eta' \\ &= \int \int K(\eta \bar{g}, \eta' \bar{g}) f_1(\eta \bar{g}) \overline{f_2(\eta' \bar{g})} \alpha(\eta \bar{g}) \overline{\alpha(\eta' \bar{g})} d\eta d\eta' \end{aligned}$$

$$\text{故に } (\forall g) \quad (a. a(\eta, \eta'))$$

$$K(\eta, \eta') \alpha(\eta g) \overline{\alpha(\eta' g)} = K(\eta \bar{g}, \eta' \bar{g}) \alpha(\eta \bar{g}) \overline{\alpha(\eta' \bar{g})} \quad \dots \dots (3)$$

今 $g = \eta_0$ とおけば

$$K(\eta, \eta') = K(\eta + \eta_0, \eta' + \eta_0)$$

$$\text{故に } K(\eta, \eta') = K(\eta - \eta', 0) \equiv K_1(\eta - \eta') \quad \text{また (3) は}$$

$$K_1(\eta \bar{g} - (\eta' \bar{g})) = K_1(\eta - \eta') \alpha(\eta g) \overline{\alpha(\eta' g)} \alpha(\eta \bar{g}) \overline{\alpha(\eta' \bar{g})} \quad \dots (4)$$

となる. K は既約ユニタリ表現に對しては必ずしも確定してゐる上、操作は許されずとする. 即ちこれによつて、かかる表現がユニタリであることは、別の立場

から示すればならぬからである。

$$i) \quad g = \delta \quad \text{と} \quad \eta' = 0 \quad \text{と} \quad \delta < \epsilon$$

$$K_1(\eta \delta) = K_1(\eta)$$

... (5)

$$ii) \quad g = a(t) \quad \text{と} \quad \eta \neq 0$$

$$K_1(e^t \eta) = e^{(\eta \rho - \eta \bar{\rho} - n + 2)t} K_1(\eta)$$

... (6)

$$iii) \quad g = \zeta \quad \text{と} \quad \eta \neq 0$$

$$\eta g = \eta \zeta = \delta a(t) \hat{\zeta} \cdot \hat{\eta} \quad \text{と} \quad \delta < \epsilon$$

$$e^{-t} = \frac{1 + 2\langle \eta, \zeta \rangle + |\eta|^2 |\zeta|^2}{1 + |\eta|^2 |\zeta|^2}$$

... (7)

$$\hat{\eta} = \frac{\eta + |\eta|^2 \zeta}{1 + 2\langle \eta, \zeta \rangle + |\eta|^2 |\zeta|^2} = \eta \bar{\zeta}$$

... (8)

$$\text{したがって} \quad \eta' = 0 \quad \text{と} \quad \delta < \epsilon \quad \text{より} \quad (4) \text{より}$$

$$K_1(\eta \bar{\zeta}) = K_1(\eta) (1 + 2\langle \eta, \zeta \rangle + |\eta|^2 |\zeta|^2)^{\eta \rho - \frac{n}{2} + 1}$$

...

$$\therefore \eta = \zeta \quad \text{と} \quad \delta < \epsilon$$

$$K_1\left(\frac{\zeta}{1 + |\zeta|^2}\right) = K_1(\zeta) (1 + |\zeta|^2)^{2\eta \rho - n + 2}$$

... (9)

$$\text{また} \quad (4) \text{より} \quad \eta = 0 \quad \text{と} \quad \delta < \epsilon$$

$$K_1(-\eta \bar{\zeta}) = K_1(-\eta') (1 + 2\langle \eta', \zeta \rangle + |\eta'|^2 |\zeta|^2)^{-\frac{\eta' \rho}{2} - \frac{n}{2} + 1}$$

$$\therefore \eta' = \zeta \quad \text{と} \quad \delta < \epsilon \quad K_1\left(\frac{-\zeta}{1 + |\zeta|^2}\right) = K_1(-\zeta) (1 + |\zeta|^2)^{-2\eta \rho - n + 2}$$

$$\therefore K_1\left(\frac{\zeta}{1 + |\zeta|^2}\right) = K_1(\zeta) (1 + |\zeta|^2)^{-2\eta \rho - n + 2}$$

... (10)

$$(9), (10) \text{を} (1) \text{に代入して} \quad \eta \rho = -\eta \bar{\rho} \quad \text{より} \quad \eta \rho = \sigma \quad \text{は} \quad \text{実数である。}$$

$$(5), (6) \text{より} \quad K_1(\eta) = C |\eta|^{2\sigma - (n-2)}$$

$$\therefore K(\eta, \eta') = C |\eta - \eta'|^{2\sigma - (n-2)}$$

... (11)

よって示すべし。

逆に (11) の形の $K(\eta, \eta')$ に $\eta = \eta'$ とおくと g に $\eta = \eta'$ とおくと (3) が成立する。よって検証正である。これは $\eta g = \delta a(t) \zeta \cdot \eta \bar{g}$, $\eta' g = \delta' a(t') \zeta \cdot \eta' \bar{g}$ とおいて

$$|\eta \bar{g} - \eta' \bar{g}|^2 = e^t e^{t'} |\eta - \eta'|^2$$

... (12)

$$\text{よって} \quad \eta = \eta' \quad \text{と} \quad \delta = \delta'$$

δ' が δ より大きいとき $\delta > 0$ である。よって $\delta > 0$ である。

$$C = 1 \quad \text{と} \quad \delta = 0$$

$$K(\eta, \eta') = |\eta - \eta'|^{2\sigma - (n-2)}$$

... (13)

とある。

2. 条件(B)を調べる.

函数空間 (S_p) と次の条件 (i) (ii) を含む N 上の函数の全体とする.

(i) $\text{class } C^\infty$ (ii) $|h| \rightarrow \infty$ のとき f および f の任意の偏導函数はどんな整数 N をとって $\frac{1}{|h|^N} f$ は 0 に近づく.

任意の $\sigma > 0$ に対して (S_p) は $\mathcal{S}'$ に含まれている. したがって (B) を調べるには内積 $\langle f_1, f_2 \rangle$ が (S_p) に制限して与えられるべきである.

$$f_1, f_2 \in (S_p)$$

$$\begin{aligned} \langle f_1, f_2 \rangle &= \iint |h-h'|^{2\sigma-(n-2)} f_1(h) \overline{f_2(h')} dh dh' \\ &= \int |h|^{2\sigma-(n-2)} [f_1(h+h') \overline{f_2(h')} dh'] dh \\ &= \int |h|^{2\sigma-(n-2)} f_1 * f_2^*(h) dh \end{aligned} \quad \dots (14)$$

$$\begin{aligned} \therefore f_2^*(h) &= \overline{f_2(-h)} \quad f_1 * f_2(h) \text{ は } f_1 \text{ と } f_2 \text{ の convolution である.} \\ &= \int |h|^{2\sigma-(n-2)} \left[\int \varphi_1(x) \overline{\varphi_2(x)} e^{2\pi i \langle h, x \rangle} dx \right] dh \end{aligned} \quad \dots (15)$$

$$\therefore \varphi_i(x) = \int f_i(h) e^{-2\pi i \langle h, x \rangle} dh$$

簡単のため $n=1$ のとき $n-2$ 次元のかわりに n 次元のときに計算する.

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int |h|^{2\sigma-n} \left[\int \varphi_1(x) \overline{\varphi_2(x)} e^{2\pi i \langle h, x \rangle} dx \right] dh$$

計算上 $n=1$ のときは持たない場合と $n \geq 2$ と同時には扱えない.

11. しかし $n \geq 2$ の場合の結果は、そのまゝ適用できることが容易に証明できる.

21. $\therefore$ $n \geq 2$ の場合だけ計算しなくてはならない.

直交座標 $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ のかわりに曲座標 $(r, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})$ を導入する.

$$\eta_n = r \cos \theta_{n-1}$$

$$\eta_{n-1} = r \sin \theta_{n-1} \cos \theta_{n-2}$$

.....

$$\eta_2 = r \sin \theta_{n-1} \cdots \sin \theta_2 \sin \theta_1$$

$$\eta_1 = r \sin \theta_{n-1} \cdots \sin \theta_2 \cos \theta_1$$

$$\text{したがって } dh = r^{n-2} dr d\omega \quad \dots (16)$$

$$\therefore d\omega = \sin^{n-2} \theta_{n-1} \cdots \sin \theta_2 d\theta_{n-1} \cdots d\theta_2 d\theta_1 \quad \dots (17)$$

$$0 \leq \theta_1 \leq 2\pi, \quad i=2, 3, \dots, n-1 \text{ に対して } 0 \leq \theta_i \leq \pi.$$

は $n-1$ 次元球面 Ω の表面積要素である. したがって Ω の表面積は

$$\Omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \text{ である.}$$

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_0^\infty r^{2\sigma-1} \left\{ \int_{\Omega} \left[\varphi_1(x) \overline{\varphi_2(x)} e^{2\pi i r \langle \omega, x \rangle} dx \right] d\omega dr \right. \quad \dots (18)$$

$\varphi_1(x) \overline{\varphi_2(x)} e^{2\pi i r \langle \omega, x \rangle}$ は (ω, x) に $P_{\frac{n}{2}}$ の可積分な $2n$ があるから、積分順序を交換してよい。

積分順序を交換してよい。

$$I_n = \int_{\Omega} e^{2\pi i r \langle \omega, x \rangle} d\omega \quad \text{は } x \text{ の } E_0 \text{ 上 } r, 1 \text{ に関する } \text{depend} \text{ する。}$$

$x = (0 \cdots 0, r_1)$ とすれば

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^\pi e^{2\pi i r r_1 \cos \theta_{n-1}} \sin^{n-2} \theta_{n-1} d\theta_{n-1} \cdot \int_{\Omega_{n-1}} \quad (n \geq 2) \\ &= \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_0^\pi \cos(2\pi r r_1 \cos \theta) \sin^{n-2} \theta d\theta \\ &= 2\pi \int_{\frac{n-1}{2}} J_{\frac{n-1}{2}}(2\pi r r_1) (r r_1)^{-\frac{n}{2}+1} \end{aligned}$$

$\therefore 2n$ Poisson の $\hat{u}$ を用いて T_2 .

$$J_n(z) = \frac{(\frac{z}{2})^n}{\sqrt{\pi} \Gamma(n+\frac{1}{2})} \int_0^\pi \cos(z \cos \theta) \sin^{2n} \theta d\theta \quad \dots (19)$$

$$\langle f_1, f_2 \rangle = 2\pi \int_0^\infty r^{2\sigma-1} \left\{ \int_{\frac{n-1}{2}} J_{\frac{n-1}{2}}(2\pi r r_1) (r r_1)^{-\frac{n}{2}+1} \varphi_1(x) \overline{\varphi_2(x)} dx \right\} dr \quad \dots (20)$$

$$\text{漸近展開} \quad J_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{(2\nu+1)\pi}{4}\right) \quad \dots (21)$$

$1 \leq 2$ $0 < 2\sigma < \frac{n-1}{2}$ のとき上の積分は (r, x) に $P_{\frac{n}{2}}$ の $2n$ があるから、積分順序を交換してよい。

$$\begin{aligned} &2\pi \int_0^\infty J_{\frac{n-1}{2}}(2\pi r r_1) (r r_1)^{-\frac{n}{2}+1} r^{2\sigma-1} dr \\ &= 2\pi r_1^{-\frac{n}{2}+1} \int_0^\infty J_{\frac{n-1}{2}}(2\pi r r_1) r^{2\sigma-\frac{n}{2}} dr \quad \cdot 8 \end{aligned}$$

Lemma (Weber の $\hat{u}$)

$$\operatorname{Re} \nu > -\operatorname{Re} \mu - \frac{3}{2} \text{ のとき}$$

$$\int_0^\infty x^{\mu-1} J_\nu(ax) dx = \frac{2^{\mu+1} \Gamma(\frac{\mu+\nu}{2})}{a^\mu \Gamma(\frac{\nu-\mu+1}{2})} \quad \dots (22)$$

$$\text{ここで } (\mu = 2\sigma - \frac{n}{2} + 1, \quad \nu = \frac{n}{2} - 1)$$

$$\cdot 8 = \pi^{-2\sigma+\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\sigma)}{\Gamma(\frac{n}{2}-\sigma)} r_1^{-2\sigma} \quad \text{と得る。}$$

$$\text{したがって} \quad \langle f_1, f_2 \rangle = \pi^{-2\sigma+\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\sigma)}{\Gamma(\frac{n}{2}-\sigma)} \int \varphi_1(x) \overline{\varphi_2(x)} r_1^{-2\sigma} dx \quad \dots (23)$$

今この式は $0 < 2\sigma < \frac{n-1}{2}$ なる σ に対して成立する。両辺が σ の関数と見れば、 $0 < 2\sigma < n$ まで成立する。 $n=1$ の場合は $0 < 2\sigma < 1$ なる σ に対して成立する。

また σ が n 未満の整数であるとき、

$$\begin{aligned} \langle f_1, f_2 \rangle &= \iint |h-h'|^{2\sigma-(n-2)} f_1(h) \overline{f_2(h')} dh dh' \\ &= \pi^{-2\sigma+\frac{n}{2}-1} \frac{\Gamma(\sigma)}{\Gamma(\frac{n}{2}-1-\sigma)} \int \varphi_1(x) \overline{\varphi_2(x)} r_1^{-2\sigma} dx \quad \dots (24) \end{aligned}$$

さらに $K(\eta, \eta') = |\eta - \eta'|^{2\sigma - (n-2)}$ は $0 < 2\sigma < n-2$ の正定値内積を与える。

この内積に關して (S_η) を完備化すれば Hilbert 空間 $\mathcal{H}_\sigma$ が得られる。

$\mathcal{H}_\sigma$ は函数空間として実現される

$$T_g f(\eta) = \alpha(\eta, g) f(\eta g) \quad \alpha(g) = \left(\frac{g_{m+1} - g_{m+1} - g_{m+1} + g_{m+1}}{2} \right)^{-\sigma - \frac{n}{2} + 1} \quad (25)$$

Theorem 11

$\mathcal{D}_\sigma = \{T_g, \mathcal{H}_\sigma \mid (0 < \sigma < \frac{n}{2} - 1)\}$ は class 1 の既約ユニタリ表現である。

証明 ユニタリ表現であることは (25) に於て示される。

class 1 であることは $\hat{N} = \mathbb{R}^G$ と $\hat{U} = \mathbb{R}^U \cong \mathbb{R}^G$ の交換作用による変数変換により、 $\mathcal{D}_\sigma$ が $\hat{U}$ 上の函数空間として実現されることは明らかである。したがって $\mathcal{H}_\sigma$ の $\hat{U}$ による変換により、 $\mathcal{H}_\sigma$ の函数空間へ移すことも同じである。

既約であることは Fourier 変換による。上の交換作用を用いて

$$\mathcal{H}_\sigma \ni f(\eta) \rightarrow \varphi(x) \rightarrow \psi(x) = c^{\frac{1}{2}} \varphi(x) |x|^{-\sigma} \in L^2(X)$$

$$c = \pi^{-2\sigma + \frac{n}{2} - 1} \frac{\Gamma(\sigma)}{\Gamma(\frac{n}{2} - \sigma)}$$

なる isometric onto な変換を考え、表現 $\{T_g, \mathcal{H}_\sigma\}$ を $\{\tilde{T}_g, L^2(X)\}$ にうつす。この表現を相対変換群 S に制限したとき、 $\mathcal{H}_\sigma$ 上の既約表現であることは、

$$\hat{T}_{h_0} \psi(x) = e^{2\pi i \langle h_0, x \rangle} \psi(x)$$

$$\hat{T}_{a(t)} \psi(x) = e^{(h_0 + H)t} \psi(e^{-t} x)$$

$$\hat{T}_\delta \psi(x) = \psi(x\delta)$$

と、 $\hat{N}$ 上

(Q.E.D.)

主系列表現に關して §7 にのべたと同様に、[3], [8] の本稿にあるように L_2 , L_4 の補系列表現は $\mathcal{H}_\sigma$ 上に存在する。以下では L_4 の場合は、変換 T_g の非可換性から $\mathcal{H}_\sigma$ 上の parameter ρ を複素化して t_2 としてあるから自明である。

本稿の本稿は $\eta = (\eta_1, \eta_2) \rightarrow z = \eta_1 - i\eta_2$ による交換作用による

$$|\eta - \eta'|^{2\sigma - 2} = |z - z'|^{2\sigma - 2} \text{ と } \mathcal{H}_\sigma \text{ からある。 (3) p185.}$$

§10. 不変な不定符号内積を有する表現の構成と、その内積の構造.

(S₁) に内積 (1) を導入する.

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \left(\int |h-h'|^{2\sigma-(n-2)} f_1(h) \overline{f_2(h')} dh dh' \right) \quad \dots (1)$$

(S₁) は Fourier 変換 $\varphi(x) = \int f(h) e^{-2\pi i \langle h, x \rangle} dh \quad 1=f, 2$

(S₂) にうつす.

$0 < 2\sigma < n-2$ のとき

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \pi^{-2\sigma+\frac{n}{2}-1} \frac{\Gamma(\sigma)}{\Gamma(\frac{n}{2}-1-\sigma)} \int \varphi(x) \overline{\varphi_2(x)} |x|^{-2\sigma} dx \quad \dots (2)$$

よって $\langle f_1, f_2 \rangle$ は正定値内積であった.

一般に次のことが言えるかどうかの問題がある.

(I) $2\sigma = n-2 + 2m \quad (m=0, 1, 2, \dots)$ のとき

(S₁) を含む適当な函数空間に (1) による内積を導入すると、 Σ に不変な不定符号内積を有する有限次元表現がえられるか. その表現の構造に、適当な内積を導入して、そのユニタリ表現が得られるかどうか.

(II) $2\sigma > n-2$ のとき (I) の場合とは反対に

(S₁) を含む函数空間で表現 T_g が考えられる. Σ に Σ に T_g の不変な不定符号内積が存在するか. その signature はどうかあるか.

(I), (II) のいずれの場合に於いても indefinite metric の考察は一般の表現の値. 離散級数の表現などに対して、重要であると思われる.

(I), (II) に関連して、また完全な結果は得られないが、非常に不満足な結果が得られるから、それを述べる. ここに述べる方法は多分に発見的方法であって、最終的な結果はもっと整った形で表現されるであろうと思われる.

1.

(1.0) まず $hg = a(t)$ とし、 $h\bar{g}$ とする

$$\begin{pmatrix} g_{m+1, m+1} & g_{m+1, m} \\ g_{m, m+1} & g_{m, m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \text{ とおくと } \S 3. 1. \quad 1 = g^{-1} T_2 \neq 0.$$

$$e^{-t} = h(g^3 - g^2) + \frac{1-|h|^2}{2}(\alpha - \beta) + \frac{1+|h|^2}{2}(-\gamma + \delta) \quad \dots (3)$$

$$e^{-t} h\bar{g} = h g'' + \frac{1+|h|^2}{2} g_{21} + \frac{1+|h|^2}{2} g_{31} \quad \dots (4)$$

(3) (4) から

$$e^{-t} |\eta \bar{g}|^2 = \eta (g^{13} + g^{12}) + \frac{-1 + |\eta|^2}{2} (\alpha + \beta) + \frac{1 + |\eta|^2}{2} (\delta + \delta') \quad \dots (5)$$

$$\text{よって } \eta \bar{g} \cdot g^{-1} = a(t) \delta^{-1} \cdot \xi^{-1} \cdot \eta \quad g^{-1} \equiv g' \quad t = t_2$$

$$e^t = \eta \bar{g} (g'^{13} - g'^{12}) + \frac{1 - |\eta \bar{g}|^2}{2} (\alpha' - \beta') + \frac{1 + |\eta \bar{g}|^2}{2} (-\delta' + \delta') \quad \dots (6)$$

$$e^t \eta = \eta \bar{g} \cdot g'^{11} + \frac{-1 + |\eta \bar{g}|^2}{2} g'^{12} + \frac{1 + |\eta \bar{g}|^2}{2} g'^{13} \quad \dots (7)$$

$$e^t |\eta|^2 = \eta \bar{g} (g'^{31} + g'^{12}) + \frac{-1 + |\eta \bar{g}|^2}{2} (\alpha' + \beta') + \frac{1 + |\eta \bar{g}|^2}{2} (\delta' + \delta') \quad \dots (8)$$

また (6), (7), (8) より

$$|\eta \bar{g} - \eta' \bar{g}'|^2 = e^t e^{t'} |\eta - \eta'|^2 \quad \dots (9)$$

$$\therefore \eta' \bar{g}' = a(t') \delta' \cdot \xi' \cdot \eta \bar{g}$$

2. $2\sigma = n-2+2\tau \quad \tau \geq 0$ に対応する表現

$$T_g f(\eta) = \alpha(\eta g) f(\eta \bar{g})$$

$$\alpha(\eta g) = e^{\frac{1}{2}(2\sigma + n-2)t} = e^{\tau t} \beta^{\tau}(\eta g) \quad \dots (10)$$

[定義4] $R_{\tau} = \{f: \int |f(\eta)| d\eta < +\infty, \int |f(\eta)| |\eta|^{2\tau} d\eta < +\infty\}$

$$R_{\tau} \text{ は } \|f\| = \frac{1}{2} \int |f(\eta)| d\eta + \frac{1}{2} \int |f(\eta)| |\eta|^{2\tau} d\eta \quad \dots (11)$$

つまり $Banach$ 空間になる。 τ の正整数値に限る。(i) T_g は R_{τ} 上で変換である。[証明] $\alpha(\eta g) = e^{\tau t} \beta^{\tau}(\eta g) = e^{\tau t} \frac{d(\eta \bar{g})}{d\eta}$ であるから、

$$\int |T_g f(\eta)| d\eta = \int e^{\tau t} f(\eta \bar{g}) d(\eta \bar{g}) \quad \text{よって}$$

$$\text{すなわち } a_1, a_2, \dots, a_p \quad a_1 + \dots + a_p \geq 0, \quad \tau \geq 0 \text{ に対応する}$$

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_p)^{\tau} \leq p^{\tau} (|a_1|^{\tau} + \dots + |a_p|^{\tau}) \quad \dots (12)$$

に注意すれば (b) に対応する。定数 c, c_1, c' は適当にとれる。

$$\|f\| \leq c \int |f(\eta)| d\eta + \sum_{i=1}^{n-2} c_i \int |\eta|^{2\tau} |f(\eta)| d\eta + c' \int |\eta|^{2\tau} |f(\eta)| d\eta$$

となる。 $f \in R_{\tau}$ なるものは有限である。

同様に (8) を用いて

$$\int |T_g f(\eta)| |\eta|^{2\tau} d\eta = \int (e^t |\eta|^2)^{\tau} |f(\eta \bar{g})| d(\eta \bar{g}) < +\infty \quad \text{から分かる。} \quad \text{Q.E.D.}$$

(ii) $f_1, f_2 \in R_{\tau}$ ならば

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int \int |\eta - \eta'|^{2\tau} f_1(\eta) f_2(\eta') d\eta d\eta' \text{ は絶対収束する。} \quad f_1, f_2 \text{ に関する連続性がある。}$$

[証明] $|h-h'|^2 = |h|^2 - 2\langle h, h' \rangle + |h'|^2 \leq 2(|h|^2 + |h'|^2)$

$$\therefore |h-h'|^{2\tau} \leq 4^\tau (|h|^{2\tau} + |h'|^{2\tau})$$

Q.E.D.

$$(iii) \langle T_g f_1, T_g f_2 \rangle = \langle f_1, f_2 \rangle$$

... (13)

[証明] $\langle T_g f_1, T_g f_2 \rangle = \iint |h-h'|^{2\tau} e^{\tau t} e^{\tau t'} f_1(h\bar{g}) \overline{f_2(h'\bar{g})} \rho^t(hg) \rho^{t'}(h'g) dh dh'$
 $= \iint |h\bar{g}-h'\bar{g}|^{2\tau} f_1(h\bar{g}) \overline{f_2(h'\bar{g})} d(h\bar{g}) d(h'\bar{g}) \quad (g_1 = \bar{g}_1)$
 $= \langle f_1, f_2 \rangle$

Q.E.D.

$$(iv) \quad 0 \leq \tau \leq \tau' \text{ かつ } \sum_{i=1}^n \tau_i \leq 1$$

$$R_{\tau'} \subseteq R_\tau \subseteq R_0 = (L_1)$$

... (14)

$$(v) \quad \bigcup_{0 \leq \tau} (S_\tau) \subseteq R_\tau$$

... (15)

Theorem 12

表現 $\{T_g, R_\tau\}$ には T_g -不変な両連続不定符号内積が存在する。

3. その内積の構造を調べる。

$$(1^0) \text{ まず, はじめに } T = 2m, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2\sigma = n-2+2m) \text{ かつ}$$

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int |h|^{2m} f_1 \times f_2^*(h) dh = \iint |h-h'|^{2m} f_1(h) \overline{f_2(h')} dh dh' \quad \dots (16)$$

$$|h-h'|^{2m} = (|h|^2 - 2\langle h, h' \rangle + |h'|^2)^m$$

$$= \sum_{p+q+s=m} \frac{(-2)^s}{p! q! s!} |h|^{2p} |h'|^{2q} \langle h, h' \rangle^s$$

$$\therefore |h-h'|^{2m} = \sum_{p+q+i_1+\dots+i_{n-2}=m} \frac{(-2)^{i_1+i_2+\dots+i_{n-2}}}{p! q! i_1! \dots i_{n-2}!} |h|^{2p} |h'|^{2q} (h, h')^{i_1} \dots (h_{n-2}, h'_{n-2})^{i_{n-2}} \quad \dots (17)$$

$$L_{(p; i_1 \dots i_{n-2})} f = (f(h) |h|^{2p} h_1^{i_1} \dots h_{n-2}^{i_{n-2}}) dh \text{ は} \quad \dots (18)$$

R_m の連続な基底型汎函数類である $(p+i_1+\dots+i_{n-2} \leq m)$

$$C_{p; i} = \frac{(-2)^{i_1+i_2+\dots+i_{n-2}}}{p! q! i_1! \dots i_{n-2}!} \quad i = (i_1 \dots i_{n-2}) \quad \text{とおく}$$

$$(17) \text{ より } \langle f_1, f_2 \rangle = \sum_{p+q+i=0} C_{p; i} \cdot L_{(p; i)} f_1 \cdot \overline{L_{(q; i)} f_2} \quad |i| = i_1 + \dots + i_{n-2} \quad \dots (19)$$

注意 $L_{(p; i)}$ は $\eta_{n-2}^2 = |h|^2 - h_1^2 - \dots - h_{n-2}^2$ に留意される

$i = (i_1 \dots i_{n-2}, 0)$ 及び $i = (i_1 \dots i_{n-2}, 1)$ の場合の i の一次型と

と表わされる。 ~~これは~~ これは一次型である。この基底は

$(m+1)(m+2) \dots (m+n-3)(2m+n-2)$ である。 §12 にある L_m の

parameter $(0 \dots 0; \frac{m}{2} - 1 + m)$ に対応する class 1 の有限次元表現の次元と

等しい。この事実はいくつかの意味から示唆に富むことが注目される。

この内積を上の一次独立な基底関数を用いて表わす。この内積に
対応する対称行列を調べれば内積の signature なども明らかになる。
内積の構造については §13 で全く異なった方法で調べることができるから、省略す
る。異、 t_2 2つの方法による結果がうまく一致していることは §§11, 12
の議論を正当化し、具体的に構成した表現の parameter と Infinitesimal
method による決定した表現の parameter の一致を示すことに示す。
113.

$$(2^\circ) \quad R^{(m)} = \{ f : f \in R_m \quad \forall L_{(p,i)} f = 0 \} \text{ は } T_g \text{ で不変である。} \quad \dots (20)$$

$$\begin{aligned} \text{これは } L_{(p,i)}(T_g f) &= \int |h|^{2p} \eta_1^{2i_1} \dots \eta_{n-2}^{2i_{n-2}} e^{m't} f(h\bar{g}) d(h\bar{g}) \\ &= (e^t |h|^2)^p (e^t \eta_1)^{2i_1} \dots (e^t \eta_{n-2})^{2i_{n-2}} e^{m't} f(h\bar{g}) d(h\bar{g}) \\ m' &= m - (p + 2i_1 + \dots + 2i_{n-2}) \geq 0 \end{aligned}$$

(6)(7)(8) による。これは同じ開きの $L_{(b,j)}$ による基底関数の一次結合であることが分かる。 $\forall L_{(b,j)} f = 0$ であるから

$$L_{(p,i)}(T_g f) = 0 \quad \therefore T_g f \in R^{(m)}$$

$$\tilde{R}_m = R_m / R^{(m)} \text{ は有限次元である。} \quad \{ \tilde{T}_g : \tilde{R}_m \} \text{ は不変な内積が存在している。}$$

$$\text{例 1.1. } m=0 \quad \langle f_1, f_2 \rangle = \int f_1(h) d\eta \cdot \overline{\int f_2(h) d\eta} \quad \dots (21)$$

$$R^{(0)} = \{ f : \int f(h) d\eta = 0 \} \text{ は不変 } \tilde{R}_0 \text{ 1次元。}$$

$$\int T_g f_1(h) d\eta = \int f_1(h) d\eta \quad \text{よって}$$

$$T_g f(h) = \alpha(h\bar{g}) f(h\bar{g}) \quad \alpha(g) = \left(\frac{g_{m+1,m} - g_{m,m} - g_{m,m+1} + g_{m,m}}{2} \right)^{m-2}$$

$$\text{と } \tilde{R}_0 \text{ 上で } \tilde{T}_g = 1.$$

$$\text{例 1.2. } m=1.$$

$$\langle f_1, f_2 \rangle = a_0^{(1)} \overline{a_n^{(2)}} - 2 \sum_{i=1}^{n-2} a_i^{(1)} \overline{a_i^{(2)}} + a_n^{(1)} \overline{a_0^{(2)}} \quad \dots (22)$$

$$a_0^{(k)} = \int f_k(h) d\eta, \quad a_i^{(k)} = \int f_k(h) \eta_i d\eta, \quad a_n^{(k)} = \int f_k(h) |h|^2 d\eta$$

故に $\tilde{R}_1$ は m -次元の内積の matrix は

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ -2 & \ddots & & \\ & \ddots & 1 & \\ 1 & & & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -2 \end{pmatrix}$$

signature は $+$ が 1 個 $-$ が $m-1$ 個。

$\{\tilde{T}_g, R_1\}$ は G の恒等表現 $g \rightarrow g: \lambda \mapsto \lambda$ である (512).

${}^t g I g = I \quad I = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \quad \forall g \in G$ なる性質は I に $\lambda \mapsto \lambda^{-1}$ と $\lambda \mapsto \lambda$ である。

1313. $m=3$ の場合。

$$2\sigma = n-2+2m = 2m+1$$

$$\begin{aligned} \langle f_1, f_2 \rangle &= \iint (h-\eta)^{2m} f_1(h) \overline{f_2(\eta)} d\eta dh \\ &= \sum_{p+q=2m} (-1)^q a_p^{(1)} \overline{a_q^{(2)}} \end{aligned} \quad \dots (23)$$

$$\therefore a_p^{(1)} = L_p f_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(h) h^p dh$$

よって表現 $\{\tilde{T}_g, R_m\}$ は $2m+1$ 次の $\mathbb{C}$ である。

内積の signature は $+$, $-$ がある。この m に対して $m+1$ の $+$ がある。

(3) R_m の内積は Fourier 変換によって

$$\begin{aligned} \langle f_1, f_2 \rangle &= \int |h|^{2m} f_1 * f_2^*(h) dh \\ &= \frac{1}{(-2\pi i)^{2m}} \Delta^m(\varphi_1, \varphi_2)(0) = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle \quad \text{と } \varphi_i \end{aligned} \quad \dots (24)$$

$$\hat{L}_{(p,i)} \varphi = \Delta^p \frac{\partial^{i_1+\dots+i_{m-2}}}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_{m-2}^{i_{m-2}}} \varphi(0) \times \frac{1}{(-2\pi i)^{2p+i_1+\dots+i_{m-2}}} \quad \text{と } \varphi$$

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \sum_{p+i_1+\dots+i_{m-2}=m} \langle \hat{L}_{(p,i)} \varphi_1, \hat{L}_{(p,i)} \varphi_2 \rangle \quad \dots (25)$$

と i_2 全く同様に signature の計算も内積の構造も言われる。

しかし R_m の Fourier 変換によって $\mathbb{C}$ の空間が $\mathbb{R}$ の空間になる。これは $\mathbb{R}$ の空間から $\mathbb{C}$ の空間になる。

4. σ は -1 の場合を考察する。

(1) $f_1, f_2 \in (S_\eta)$ である。 $0 < 2\sigma < m-2$ である。 $\mathbb{C}$ である。

$$\begin{aligned} \langle f_1, f_2 \rangle &= \iint |h|^{2\sigma-(m-2)} f_1 * f_2^*(h) dh \\ &= \pi^{-2\sigma+\frac{m-1}{2}} \frac{\Gamma(\sigma)}{\Gamma(\frac{m-1}{2}-\sigma)} \int \varphi_1(x) \overline{\varphi_2(x)} |x|^{-2\sigma} dx \end{aligned} \quad \dots (26)$$

と表わされる。

$$f_1 \in (S_\eta), f_2 \in R_\tau \text{ ならば } f_1 * f_2^* \in (S_\eta) \quad \therefore \varphi_1(x) \overline{\varphi_2(x)} \in (S_x)$$

よって (26) は $f_1 \in (S_\eta), f_2 \in R_\tau$ である。 $\mathbb{C}$ である。

よって (26) の右辺 $\varphi_1(x) \overline{\varphi_2(x)}$ は $\mathbb{C}$ の関数 $\pi^{-2\sigma+\frac{m-1}{2}} \Gamma(\sigma) \frac{|x|^{-2\sigma}}{\Gamma(\frac{m-1}{2}-\sigma)}$

に作用して $\mathbb{C}$ の関数になる。 $\sigma > 0$ である。 $\mathbb{C}$ である。

右辺 σ の解析的延長と $\mathbb{C}$ の関数 $\pi^{-2\sigma+\frac{m-1}{2}} \Gamma(\sigma) \frac{|x|^{-2\sigma}}{\Gamma(\frac{m-1}{2}-\sigma)}$ は $\mathbb{C}$ の関数である。

ある。

(2) 超函数類は $n+2$ 次元空間。

Proposition 8 n 次元空間 R^n にある超函数類 r^λ , $\lambda \in \mathbb{C}$
 $r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ は λ の超函数類 r^λ $\lambda \neq -n-2m$ ($m=0, 1, 2, \dots$)
 を $n+2$ 次元空間に拡張し, $\lambda = -n-2m$ ($m=0, 1, 2, \dots$) には 1 位の極点
 がある。

超函数類 $f_\lambda(x) = \frac{r^\lambda}{\Omega_n \Gamma(\frac{\lambda+n}{2})}$ は 全複素平面に正則である。

$$f_\lambda|_{\lambda=-n-2m} = \frac{(-1)^m \Delta^m \delta(x)}{2^m m(m+2) \dots (m+2m-2)} \quad \dots (27)$$

$-n-2m+2 < \operatorname{Re} \lambda < -n-2m$ かつ $\varphi \in (S_x)_{1 \leq x \leq n}$.

$$\langle f_\lambda, \varphi(x) \rangle = \frac{2}{\Gamma(\frac{\lambda+n}{2})} \int_0^\infty r^{\lambda+n-2} \left[S_\varphi(r) - \sum_{p=0}^m \frac{\Delta^p \varphi(0) r^{2p}}{2^p p! m(m+2) \dots (m+2p-2)} \right] dr \quad \dots (28)$$

$$\therefore S_\varphi(r) = \frac{1}{\Omega_n} \int_{\Omega} \varphi(r\omega) d\omega \quad \dots (29)$$

すなわち, これを用いて, m を $m-2$, λ を -2σ であることに注意して

$$\text{超函数類 } h_\sigma = \frac{2 r^{-2\sigma}}{\Omega_{n-2} \Gamma(\frac{n}{2} - 1 - \sigma)} \quad \text{と置く。}$$

$$\langle h_\sigma, \varphi \rangle|_{2\sigma=n-2+2m} = \frac{\Delta^m \varphi(0)}{2^m (m-2)m \dots (m+2m-4)} \quad \dots (30)$$

$m-2+2m < 2\sigma < m-2+(2m+2)$ かつ

$$\langle h_\sigma, \varphi \rangle = \frac{2}{\Gamma(\frac{n}{2} - 1 - \sigma)} \int_0^\infty r^{-2\sigma+n-3} \left[S_\varphi(r) - \sum_{p=0}^m \frac{\Delta^p \varphi(0) r^{2p}}{2^p p! (m-2)m \dots (m+2p-4)} \right] dr \quad \dots (31)$$

$$\text{よって } \langle f_1, f_2 \rangle = \pi^{-2\sigma+\frac{n}{2}-1} \Gamma(\sigma) \langle h_\sigma, \varphi_1 \bar{\varphi}_2 \rangle \quad \text{は}$$

$2\sigma = n-2+2m$ ($m=0, 1, 2, \dots$) かつ

$$\langle f_1, f_2 \rangle = (|h|^{2m} f_1 * f_2^*(h)) dh = \frac{1}{(-2\pi i)^{2m}} \Delta^m (\varphi_1 \bar{\varphi}_2)(0) \quad \dots (32)$$

$m-2+2m < 2\sigma < m-2+(2m+2)$ かつ

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{2\pi^{-2\sigma+\frac{n}{2}-1} \Gamma(\sigma)}{\Gamma(\frac{n}{2} - 1 - \sigma)} \int_0^\infty r^{-2\sigma+n-3} \left[S_{\varphi_1 \bar{\varphi}_2}(r) - \sum_{p=0}^m \frac{\Delta^p (\varphi_1 \bar{\varphi}_2)(0) r^{2p}}{2^p p! (m-2)m \dots (m+2p-4)} \right] dr \quad \dots (33)$$

$$f_1 \in (S_\eta), \quad f_2 \in R_\tau$$

この式 (33) を φ と (S_η) から与えられる R_τ の不変部分空間 R'_τ 全体
 に φ を f_1 と f_2 とし, これから $\langle f_1, f_2 \rangle$ の構造が明瞭
 になる。超函数類 f_1 と f_2 の構造が明瞭になる。 (カレリゲートな

問題は未解決であるから R_T まで拡張できない。

(3) $n-2+2m < 2\sigma < n-2+(2m+2)$ かつ $R_T \subset R_m$

$$(S_n^{(m)}) = (S_n) \cap R^{(m)} \text{ とおす}$$

$$\forall f_1 \in (S_n^{(m)}) \quad \forall f_2 \in R_T$$

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \pi^{-2\sigma + \frac{n}{2} - 1} \frac{\Gamma(\sigma)}{\Gamma(\frac{n}{2} - 1 - \sigma)} \int |x|^{-2\sigma} \varphi_1(x) \overline{\varphi_2(x)} dx \quad \dots (34)$$

従って $(S_n^{(m)})$ に制限すれば 内積 $\langle f_1, f_2 \rangle$ は定符号である。(34)より
 少くとも $R_T \cap R^{(m)}$ には拡張できる。 R_T の内積 $\langle f_1, f_2 \rangle$ は
 codimension 有限の部分空間に於て定符号であることが分かる。
 (34) を拡張するとは (33) を拡張する問題の一部である。

(33) が R_T まで拡張できれば $2\sigma = n-2+2m$ かつ

$R^{(m)} \cap R_m$ に新しく不変な定符号内積を導入でき、従って $\mathbb{R} = \mathbb{C} = \mathbb{H}$ の表現が与えられる。(注意1を見よ)。 (T_g, R_m) が有限次元表現 $(T_g, \tilde{R}_m)$ と同値な表現とに分解することから分かるようにある。かなりな程度まで様子が分かるがそれ以上立ち入らない。 t_1, t_2 不変な定符号内積の構造に関しては §13 で再び論ずる。

【注意1】 例えは $f_1, f_2 \in (S_n^{(m)})$ かつは 新しく内積を

$$(f_1, f_2) = \lim_{2\sigma \rightarrow n-2+2m-0} \frac{\Gamma(\frac{n}{2} - 1 - \sigma)}{\Gamma(\frac{n}{2} - 1 + m)} \langle f_1, f_2 \rangle_\sigma \quad \dots (35)$$

$$= \pi^{-2m - \frac{n}{2} + 1} \frac{\Gamma(\frac{n}{2} - 1 + m)}{\Gamma(\frac{n}{2} - 1 + m)} \int |x|^{-2m - n + 2} \varphi_1(x) \overline{\varphi_2(x)} dx \quad \dots (36)$$

によって定義する。

$m \geq 1$ かつは (36) の積分は、 $\forall f_1, f_2 \in R^{(m)}$ に対して 4 変数から
 (36) による $R^{(m)}$ に内積を定義できるか。それが (35) による定義で
 どうか。 従って T_g 不変かどうか やはり問題である。

(IV) Infinitesimal method による表現の決定.

§11. L_n の Lie $\mathbb{R}$ と L_n の表現の微係数作用素.

1. L_n は $\frac{n(n-1)}{2}$ 次元である. 今 1-parameter 部分群 γ と γ_2 .

$$g_{ij}(t) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \sin t \\ & -\sin t & 1 \end{pmatrix} \quad 1 \leq j < i \leq n-1$$

$$g_{h2}(t) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \sinh t \\ & \sinh t & 1 \end{pmatrix} \quad h=1, 2, \dots, n-1$$

γ と γ_2 .

$$a_{ij} = \frac{d}{dt} g_{ij}(t) \Big|_{t=0} = e_{ij} - e_{ji} \quad l_{h2} = \frac{d}{dt} g_{h2}(t) \Big|_{t=0} = l_{h21} + l_{h2n}$$

$$\therefore l_{ij} = (U_{ijmn}) \quad U_{ijmn} = \delta_{im} \delta_{jn}$$

$$[a_{ij}, a_{ij_2}] = \delta_{j_2 i_2} a_{ij_2} + \delta_{ij_2 i_2} a_{ji_2} - \delta_{j_2 i_2} a_{i_2 j_2} - \delta_{i_2 j_2} a_{j_2 i_2} \quad \dots (1)$$

$$[a_{ij}, l_{h2}] = \delta_{j_2 h} l_{hi} - \delta_{ih} l_{hj} \quad \dots (2)$$

$$[l_{h1}, l_{h2}] = a_{h_1 h_2} \quad (h_1 \neq h_2) \quad \dots (3)$$

L_n の Lie $\mathbb{R}$ の base γ と γ_2 a_{ij}, l_{h2} からなる.

$SO(n)$ は $\frac{n(n-1)}{2}$ 次元である. 独立な 1-parameter 部分群 γ と γ_2 と γ_3 .

$g_{ij}(t)$ $1 \leq j < i \leq n$ と γ_2 と γ_3 の Lie $\mathbb{R}$ は (1) と γ_2 .

$$[a_{ij}, a_{h_1 h_2}] = \delta_{j_2 h_1} a_{hi} - \delta_{ih_1} a_{hj} \quad \dots (2')$$

$$[a_{h_1 h_2}, a_{h_3 h_4}] = -a_{h_1 h_4} \quad \dots (3')$$

さらに $l_{h2} = -i a_{h2}$ とおけば

(1) (2) (3) と (1) (2') (3') と比較して見れば分かるように a_{ij} $1 \leq j < i \leq n-1$

l_{h2} は γ_2 によって張られる線型 Lie $\mathbb{R}$ は L_n の Lie $\mathbb{R}$ と同型である. $\therefore$

事実 L_n と $SO(n)$ からなる $SO(n, \mathbb{C})$ の実形であることはよく知られている.

さらに $L_n \cap SO(n) = U$ である. 共通のコンパクト部分群 U を持つという事実には注目して §12 に n の結果を得た.

2. $\{T_g, R\}$ は L_n の連続表現である. さらに一般に Banach 空間 V の

表現と考へよう。

1-parameter 部分群 $a(t)$ により

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T_{a(t)}x - x}{t} \quad (\text{強収束}) \text{ により } R \text{ の作用素}$$

の 1-parameter 部分群 $T_{a(t)}$ の微分係数作用素を定義する。

R に次の性質を持つ T_g の不変な稠密部分空間 $\mathcal{D}$ が存在する [10]

1) $\mathcal{D}$ の微分係数作用素と R の有限個の積が $\mathcal{D}$ で定義され $\mathcal{D}$ を $\mathcal{D}$ にうつす。

2) $\forall x \in \mathcal{D}$ $T_g x$ は無限回可微分な G 上の函数である。

$$3) \forall x \in \mathcal{D} \quad \forall a(t) \quad \frac{d}{dt} T_{a(t)}x = A T_{a(t)}x = T_{a(t)}Ax$$

仮定(A) $\forall x \in \mathcal{D} \quad \forall a(t)$

$$T_{a(t)}x = e^{tA}x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(tA)^i}{i!}x$$

$$T_{a(t)}x = x + tAx + \frac{t^2}{2}A^2x + \frac{t^3}{3!}\tilde{A}(t)A^3x$$

$\therefore \tilde{A}(t)$ は有界区間に於て一様有界である。

仮定(B) 表現 $\{T_g, R\}$ は U の各既約表現を高々 1 回しか含まない。

すると

4) U の既約表現 ρ の値域部分空間 R^ρ は $\mathcal{D}$ に含まれる。

仮定(A), (B) を満たす既約表現 $\{T_g, R\}$ の微分係数作用素を求めよう。

$$A_{ij} = \left. \frac{d}{dt} T_{g_i}(t) \right|_{t=0}, \quad B_{ij} = \left. \frac{d}{dt} T_{g_j}(t) \right|_{t=0} \text{ を } \mathcal{D} \text{ に於て考へる。}$$

仮定(A) により A_{ij}, B_{ij} は a_{ij}, b_{ij} と同一の交換関係を満たす。

さらに表現 T_g は A_{ij}, B_{ij} により一意に決まる。

A_{ij}, B_{ij} を求めるには $A_{21} \cdots A_{m-1, m-2}, B = B_{m-1}$ を求めるに十分である。この際 $m-1$ 個の作用素の交換関係式は

$$[A_{i, i-1}, A_{j, j-1}] = 0 \quad 2 \leq j < i-1 \leq m-2$$

$$[A_{i, i-1}, A_{i-1, i-2}] = A_{i-1, i-2}$$

$$[A_{i, i-1}, A_{i-1, i-2}] A_{i-1, i-2} = -A_{i, i-1} \quad i = 3, \dots, m-1$$

$$[B, A_{i, i-1}] = 0 \quad i = 2, \dots, m-1$$

$$[A_{m-1, m-2}, [B, A_{m-1, m-2}]] = B$$

$$[B, [B, A_{m-1, m-2}]] = A_{m-1, m-2}$$

2) を満たす。すなわち、この (4) ~ (7) を満たす $A_{i, i-1}, B$ が用いられる。

for $A_{i,j}$, B_n is

$$A_{i,i-2} = [A_{i,i-1}, A_{i-1,i-2}] \cdots A_{i,j} = [A_{i,j+1}, A_{j+1,j}]$$

$$B_{n-1} = B \quad B_n = [B_{n-1}, A_{n+1,n}] \quad \text{と定義して}$$

LEMMA (1), (2), (3) が成り立つことは容易に示される。

この Lemma は $a_{i,j}$, B_n 1: に対して成り立つ。 j は L_m と $SO(m)$ の Lie 環の i に対して成り立つ。 $SO(m)$ の Lie 環の性質を示すことは容易。

$$[a_{i,i-1}, a_{j,j+1}] = 0 \quad j < i-1 \in m-1 \quad \dots (8)$$

$$[a_{i,i-2}, a_{i,i-1}] = a_{i-1,i-2}, \quad [a_{i,i-2}, a_{i-1,i-2}] = -a_{i,i-1} \quad \dots (9)$$

$$a_{i,j} = [a_{i,j+1}, a_{j+1,j}] \quad i > j+1 \quad \dots (10)$$

から (1), (2'), (3') が成り立つことは容易に示される。

[証明] n は L_m の i に対して成り立つ。

$n=3$ のときは容易に示される。

今 $n-1$ のときは成り立つと仮定する。 n のときは成り立つことを示す。

$a_{i,j}$ と $i < j$ に対して C_j と仮定する。

$$(1) \quad [C_{n-1}, a_{i,i-1}] = 0 \quad i=2, \dots, n-2 \quad \dots (5')$$

$$[C_{n-2}, a_{n+1,n-2}] = -C_{n-1} \quad \dots (6')$$

$$[C_{n-2}, C_{n-1}] = a_{n+1,n-2} \quad \dots (7')$$

$$[C_{n-1}, a_{n+1,j}] = C_j \quad \dots (8')$$

から (2'), (3') が成り立つことは容易に示される。

Lemma $[a, [b, c]] = [[a, b], c] + [b, [a, c]]$

また (2') を示す。

$$(i) \quad i < n-1 \text{ のときは } [C_{n-1}, a_{i,j}] = 0$$

$$① \quad [C_{n-1}, a_{i,i-2}] = [C_{n-1}, [a_{i,i-1}, a_{i-1,i-2}]] = 0.$$

$$\text{よって } [C_{n-1}, a_{i,j}] = [C_{n-1}, [a_{i,j+1}, a_{j+1,j}]] \quad i=j. \quad ((1')(5') \text{ を用いる})$$

$$(ii) \quad [C_{n-2}, a_{n+1,n}] = 0 \quad n < n-2.$$

$$① \quad (6') \text{ の右辺から } a_{n-2,n-3} \text{ を乗ずると}$$

$$[[C_{n-1}, a_{n+1,n-2}], a_{n+1,n-3}] + [[C_{n-1}, a_{n+1,n-3}], a_{n+1,n-2}] = 0.$$

$$[C_{n-2}, a_{n+1,n-3}] + [C_{n-2}, a_{n+1,n-2}] = 0 \quad \therefore [C_{n-1}, a_{n+1,n-3}] = 0.$$

$$\text{よって } [C_{n-2}, a_{n+1,n}] = [C_{n-2}, [a_{n+1,n+1}, a_{n+1,n}]] \quad i=j.$$

(iii) $i_2 < m-1$ とする

$$\begin{aligned}
 [C_m, a_{i,i-1}] &= [[C_{m-1}, a_{m-1,i_2}], a_{i,i-1}] \\
 &= [[C_{m-1}, a_{i,i-1}], a_{m-1,i_2}] + [C_{m-1}, [a_{m-1,i_2}, a_{i,i-1}]] \\
 &= \begin{cases} \sigma_{i,i_2} C_{i-1} - \sigma_{i-1,i_2} C_i & i < m-1 \\ -\sigma_{m-2,i_2} C_{m-1} & i = m-1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

(iv) $[C_m, a_{i,j}] \quad i > j+1$

$$\begin{aligned}
 i < m-1 \text{ かつ } j &= [[C_{m-1}, a_{m-1,i_2}], a_{i,j}] \\
 &= [C_{m-1}, [a_{m-1,i_2}, a_{i,j}]] + [[C_{m-1}, a_{i,j}], a_{m-1,i_2}] \\
 &= \sigma_{i,i_2} C_j - \sigma_{i,j} C_i
 \end{aligned}$$

$$i = m-1 \text{ かつ } j = [C_{m-1}, [a_{m-1,m-2}, a_{m-2,j}]] = \sigma_{m-2,j} C_{m-1}$$

以上 (i) ~ (iv) 1 = 2 (2') から $\bar{a}_i \neq \bar{a}_{i_2} t_2$. かつ $i = (3')$ と $\bar{a}_i$ あり.

$$(v) [C_{m-1}, C_m] = a_{m-1,i_2}$$

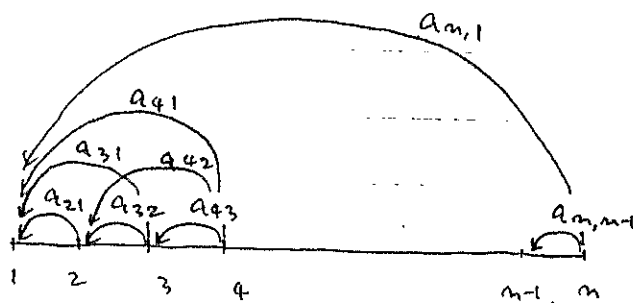
... (10).

① (7') の t_2 により $a_{m-2,m-3}$ と乗算する

$$[C_{m-1}, C_{m-3}] = -a_{m-1,m-3} \quad \text{以下同様.}$$

$$\begin{aligned}
 (vi) [C_{m-1}, C_{m-2}] &= [[C_{m-1}, a_{m-1,i_2}], C_{m-2}] \\
 &= -[a_{m-1,i_2}, a_{m-1,i_2}] \\
 &= a_{i_2,i_2}
 \end{aligned}$$

Q.E.D.



§12. L_n の既約表現: 対する微分系と作用素の決定と既約表現の分類
 1. $SO(n)$ の既約表現: 対する微分系と作用素は求めた (2)
 $n-1$ 個の $A_{21}, A_{32}, \dots, A_{n,n-1}$ が与えらる。

(I) $n=2h+2$ ($h=1, 2, \dots$)

既約表現は $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_{h+1}$ なる整数の組で与えられる。

図式 $\lambda = \left[\begin{array}{cccc} m_{2h,1} & m_{2h,2} & \dots & m_{2h,h} \\ & m_{2p,1} & \dots & m_{2p,p} \\ & m_{2p+1,1} & \dots & m_{2p+1,p} \\ & & \dots & \\ & & m_{21} & \\ & & m_{11} & \end{array} \right] \quad \dots (1)$

と表す。

$\therefore m_{ij}$ は整数で $0 \leq m_{ij} < \infty$ である。

$$m_1 \leq m_{2h,1} \leq m_2 \leq \dots \leq m_{2h,h} \leq m_{h+1}$$

$$\left. \begin{array}{l} |m_{2p+1,1}| \leq m_{2p,1} \leq m_{2p+1,2} \leq \dots \leq m_{2p,p} \leq m_{2p+1,p+1} \\ |m_{2p-1,1}| \leq m_{2p,1} \leq m_{2p-1,2} \leq \dots \leq m_{2p-1,p} \leq m_{2p,p} \end{array} \right\} \dots (2)$$

上の条件を満たす値を重みとする。

(II) $n=2h+1$

既約表現は $0 \leq m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_h$ なる整数の組で与えられる。

図式 $\lambda = \left[\begin{array}{cccc} m_{2h+1,1} & m_{2h+1,2} & \dots & m_{2h+1,h} \\ & \dots & & \\ & m_{2p,1} & \dots & m_{2p,p} \\ & m_{2p+1,1} & \dots & m_{2p+1,p} \\ & & \dots & \\ & & m_{21} & \\ & & m_{11} & \end{array} \right] \quad \dots (3)$

と表す。

$\therefore m_{ij}$ は整数で $0 \leq m_{ij} < \infty$ である。

$$|m_{2h+1,1}| \leq m_1 \leq m_{2h+1,2} \leq \dots \leq m_{2h,h} \leq m_h$$

および (2) と同じ値を重みとする。

§12. 既約表現 $\{T_j, R\}$ に $\lambda \leq 2$

各図式 λ に対して R の n 個の $\lambda(\lambda)$ が与えられる。 $\lambda(\lambda)$ は R の基底をなす。 $A_{2p+2, 2p+1}$ と $A_{2p+1, 2p}$ とが $\lambda(\lambda)$ に作用するから書ける。
 今 $\lambda_{2p}^{+}, \lambda_{2p}^{-}$ は λ の λ 図式に $\lambda \leq 2$ $m_{2p,j}$ と $m_{2p,j+1}$ とは $m_{2p,j} - 1$ であるから λ 図式を示す。 $\lambda_{2p+1}^{+}, \lambda_{2p+1}^{-}$ とは λ に λ とする。

$$A_{2p+2, 2p+1} \{ \lambda \} = i \sum_{j=1}^p B_{2p}^j(\lambda) \{ \lambda_{2p}^{j+} \} + i C_{2p}(\lambda) \{ \lambda \} + i \sum_{j=1}^p B_{2p}^j(\lambda_{2p}^{j-}) \{ \lambda_{2p}^{j-} \} \dots (4)$$

$$A_{2p+1, 2p} \{ \lambda \} = i \sum_{j=1}^p A_{2p-1}^j(\lambda) \{ \lambda_{2p-1}^{j+} \} + i \sum_{j=1}^p A_{2p-1}^j(\lambda_{2p-1}^{j-}) \{ \lambda_{2p-1}^{j-} \} \dots (5)$$

(4), (5) に $\{ \lambda \}$ に対する $\{ \lambda_{2p}^{j+} \}$ と $\{ \lambda_{2p-1}^{j+} \}$ の定義を次のようにする。

$$l_{2p+1, i} = m_{2p, i} + i \quad l_{2p-1, i} = m_{2p-1, i} + (i-1)$$

このとき $\{ \lambda_{2p}^{j+} \}$ と $\{ \lambda_{2p-1}^{j+} \}$ の定義は

$$m = 2h+2 \text{ のときは } m_1, m_2, \dots, m_{h+1} \text{ と } m_{2h+1, 1}, m_{2h+1, 2}, \dots, m_{2h+1, h+1}$$

$$m = 2h+1 \text{ のときは } m_1, m_2, \dots, m_h \text{ と } m_{2h, 1}, m_{2h, 2}, \dots, m_{2h, h}$$

と $\{ \lambda \} \subset \mathbb{C}^n$ である。このとき $\{ \lambda_{2p}^{j+} \}$ の F は

$$A_{2p-1}^j(\lambda) = \frac{1}{2} \left[\prod_{v=1}^{p-1} (l_{2p-2, v} - l_{2p-1, j} - 1) (l_{2p-2, v} + l_{2p-1, j}) \right]^{\frac{1}{2}} \\ \times \left[\prod_{v=1}^p (l_{2p, v} - l_{2p-1, j} - 1) (l_{2p, v} + l_{2p-1, j}) \right]^{\frac{1}{2}} \\ \times \left\{ \prod_{v \neq j} \frac{l_{2p-1, v}^2 - l_{2p-1, j}^2}{l_{2p-1, v}^2 - (l_{2p-1, j} + 1)^2} \right\}^{-\frac{1}{2}} \dots (11)$$

$$B_{2p}^j(\lambda) = \left\{ \frac{\prod_{v=1}^p (l_{2p-1, v}^2 - l_{2p, j}^2) \cdot \prod_{v=1}^{p+1} (l_{2p+1, v}^2 - l_{2p, j}^2)}{l_{2p, j}^2 (4l_{2p, j}^2 - 1) \prod_{v \neq j} (l_{2p, v}^2 - l_{2p, j}^2) [(l_{2p, v} - 1)^2 - l_{2p, j}^2]} \right\}^{\frac{1}{2}} \dots (12)$$

$$C_{2p}(\lambda) = \frac{\prod_{v=1}^p l_{2p-1, v} \prod_{v=1}^{p+1} l_{2p+1, v}}{\prod_{v=1}^p l_{2p, v} (l_{2p, v} - 1)} \dots (13)$$

このとき $\{ \lambda \} \subset \mathbb{C}^n$ である。このとき $\{ \lambda_{2p}^{j+} \}$ の F は

$SO(m-1)$ の既約表現が $\mathfrak{so}(m)$ の既約表現と見做せる場合には

$C = A_{m, m-1}$ と見做せる。このとき $\{ \lambda \}$ に対する $\{ \lambda_{2p}^{j+} \}$ は

$$[C, A_{i, i-1}] = 0 \quad i=2, 3, \dots, m-2. \dots (14)$$

$$[A_{m-1, m-2}, [C, A_{m-1, m-2}]] = C \dots (15)$$

$$[C, [C, A_{m-1, m-2}]] = -A_{m-1, m-2} \dots (16)$$

と見做せる。

$m = 2h+2$ のときは $\mathfrak{so}(m)$ の既約表現 $\mathfrak{U}$ は $\mathfrak{so}(h)$ の既約表現 $\mathfrak{V}$ と見做せる。このとき $\{ \lambda \} \subset \mathbb{C}^n$ である。このとき $\{ \lambda_{2p}^{j+} \}$ の F は

$$m_i = \sup_{\lambda \in \mathfrak{U}} m_{2h, i} \quad i=1, 2, \dots, h \quad \text{と} \quad (14), (15), (16) \text{ には } \dots$$

$$m_{h+1} = \sup_{\lambda \in \mathfrak{U}} m_{2h, h} \quad \text{と} \quad (14), (15), (16) \text{ には } \dots$$

全 $\mathfrak{C}$ の基底 $\{ \lambda \}$ に対して $\mathfrak{U}$ の既約表現 $\mathfrak{V}$ の基底 $\{ \lambda_{2p}^{j+} \}$ と見做せる。このとき $\{ \lambda_{2p}^{j+} \}$ の F は

素数 c が連続 parameter とは表われる。2. ある L_n の既約表現 ρ は ρ に対応する (A), (B) を含む表現に対応する微分係数作用素 L_3 , L_4 のときは、より計算し、みよと一般の n の場合の素数 c が類推される。これにより $SO(n)$ の $A_{n,n-1}$ から L_n の $B = B_{n-1}$ が求まる。

2. L_n の既約表現 ρ (A), (B) に対応する既約表現 ρ について考える。

[I] $n = 2k+2$.

L_n の表現 ρ は $U = SO(2k+1)$ に制限すると U の既約表現 $\rho = (m_{2k,1}, m_{2k,2}, \dots, m_{2k,k})$ が与えられる。表現 ρ に対応する R の部分空間 R^ρ は $\mu = \begin{pmatrix} m_{2k,1} & \dots & m_{2k,k} \\ & \dots & \\ & m_{21} & \\ & & m_{11} \end{pmatrix}$ で番号づけ

られる標準基底が存在し $\lambda = \lambda_1 A_{21} A_{32} \dots A_{2k,2k-1}$ は公式 (4) (5) により与えられる。 R は R^ρ の直和である。 [3]

[定義] R から R の部分空間 $R_1, R_2, \dots$ の直和であるとは、

1) R は $\{x_1 + x_2 + \dots + x_m : m=1, 2, \dots, x_i \in R_i\}$ の closure である。

2) $x^{(m)} = x_1^{(m)} + x_2^{(m)} + \dots + x_m^{(m)}$
 $x^{(m)} \rightarrow 0$ のときは $(\forall i) \quad x_i^{(m)} \rightarrow 0$.

故に: 各 R^ρ の基底を集めると $\lambda = \begin{pmatrix} \rho \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{2k,1} & \dots & m_{2k,k} \\ & \dots & \\ & m_{21} & \\ & & m_{11} \end{pmatrix}$ により、

番号づけられる。上の定義の意味で R の基底 $\{\lambda\}$ を得る。この基底に

関し $A_{21} \dots A_{2k,2k-1}$ は λ の $2, \dots, k$ から $B = B_{2k+1}$ が求まる。5.11.

与えられた関数 λ は §11. の (5) (6) (7) である。

$$[B, A_{i,i-1}] = 0 \quad i=2, \dots, n-2 \quad \dots (17)$$

$$[A_{n-1,n-2}, (B, A_{n-1,n-2})] = B \quad \dots (18)$$

$$[B, [B, A_{n-1,n-2}]] = A_{n-1,n-2} \quad \dots (19)$$

(17) (15), (16) と (17) (18), (19) の交換性。および $SO(4)$ と L_4 との既約表現の交換性を考慮し $SO(2k+2)$ の $A_{2k+2,2k+1}$ には $\lambda \leq 2$ $m_i = \inf m_{2k,i}$.

$i=1, 2, \dots, k$ により与えられた m_i を代入し、 $A_{2k+2,2k+1}$ を連続 parameter

$$|m_1| + 1 \leq |C| < m_2 + 1$$

(i) の場合は $|m_1| \leq m_{2k_1,1} \leq m_2 \leq \dots \leq m_k \leq m_{2k_2,k} < +\infty$

なる $\cup$ の表現 $\rho = (m_{2k_1,1} \dots m_{2k_2,k})$ 、また Γ の表現 $\alpha = (n_1 \dots n_k)$ を含む。 ρ が α の 1 回ずつ含まれている。この表現を $\rho(\alpha; c)$ と表わす。

(ii) の場合は $m_{k+1} = |C| - k$ とおくと

$$|m_1| \leq m_{2k_1,1} \leq \dots \leq m_k \leq m_{2k_2,k} \leq m_{k+1}$$

なる ρ が α を k 回ずつ含む。従って表現は有限次元である。

これを $\mathcal{S}(n_1, n_2, \dots, n_{k+1})$ ($n_1 = \text{sgn}(c) \cdot |m_1|$) と表わす。

偏係数作用素の対応によつて $\mathcal{L}_m$ の有限次元の既約表現と $\mathcal{SO}(m)$ の既約表現は 1-1 に対応している。

(iii) の場合は $p = |C| - j_0$ とおくと

$$|m_1| \leq m_{2k_1,1} \leq \dots \leq n_{j_0} \leq m_{2k_2,j_0} \leq p < n_{j_0+1} \leq \dots \leq m_k \leq m_{2k_2,k} < +\infty$$

なる ρ が α を j_0 回ずつ含む。これは Γ の表現 α を含む α の表現 ρ かつ ρ 。この表現は無限次元である。これを $\mathcal{D}(n_1, \dots, n_k; p)$ と書く。 $n_1 = \text{sgn}(c) \cdot |m_1|$ 、 $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_{j_0} \leq p < n_{j_0+1} \leq \dots \leq n_k$ 。

これらのうち $|m_1| \leq p < n_2$ の場合も含めると解釈 (2) によって α の $\mathcal{L}_m$ 表現は $\mathcal{S}$ によって表わされる。

(2°) tail representation

$\mathcal{S}(n_1, \dots, n_{k+1})$ の tail representation とは、表現 ρ が Γ の表現 α を含む $\cup$ の表現 ρ を含む。その一部分だけしか含まないことはない。ことから考へられる。表現 T_ρ を $|m_1| \leq m_{2k_1,1} \leq \dots \leq m_k \leq m_{2k_2,k}$ なる $\cup$ の表現全体から作られる。図式 $\lambda = \left(\begin{smallmatrix} \rho \\ \alpha \end{smallmatrix} \right)$ に対応する基底 $\mathcal{B}(\lambda)$ によつて表わされる空間 R に (4), (5), (20) によつて定義されていると考へたとき、それは既約である。 $\mathcal{S}(n_1, \dots, n_{k+1})$ と他の既約表現に分解する。かくして与えられた既約表現 ρ に対応する。 (§ 6 の表現 $\langle T'_\rho, \mathcal{B}^\alpha \rangle$ には $(\alpha; c)$ によつて表わされる表現 T'_ρ が (4) におよび α を含む $\cup$ の表現 ρ が α の 1 回ずつ含まれていることに留意せよ)

簡単なため $c \geq 0$ とする。 $c < 0$ のときは n_1, c と $-n_1, -c$ に置きかえれば

$A_{2p+1, 2p} = 0$ かつ $B_{2p+1, 2p} = 0$

$$A_{2p+1}^{\delta}(\lambda) = A_{2p+1}^{\delta}(\lambda)$$

--- (25)

$B_{2p+1} = 0$ かつ

$$B_{2p+1}^{\delta}(\lambda) = -B_{2p+1}^{\delta}(\lambda)$$

--- (26)

$$C_{2p+1}(\lambda) = -C_{2p+1}(\lambda)$$

--- (27)

これは $\lambda = 0$ かつ p, j, λ が 2 に λ 対して 2 の λ である。

(24)(25) は B_{2p+1} に対して成立している。また (27) は $\lambda = 0$ である。

$$(i) \quad \exists \lambda \quad C_{2p+1}(\lambda) \neq 0 \quad \text{ならば} \quad C = 2p$$

$$(ii) \quad \forall \lambda \quad C_{2p+1}(\lambda) = 0 \quad \text{ならば} \quad m_1 = 0 \quad \text{または} \quad C = 0$$

つまり (26) は $\lambda = 0$ である。

Lemma 2 λ_{2p+1}^{δ} が存在するならば $\lambda = 0$ かつ $B_{2p+1}^{\delta}(\lambda) \neq 0$ 。

これは Lemma 1 を用いて示される。

Lemma 3 $B_{2p+1}^{\delta}(\lambda)$ が $B_{2p+1}^{\delta}(\lambda)$ の $C^2 - l_{2p+1, j}^2$ を $\lambda = 0$ かつ $\lambda = 0$ かつ $\lambda = 0$ である。

$$(i) \quad C = 2p \quad C^2 - l_{2p+1, j}^2 = -(p^2 + l_{2p+1, j}^2) < 0$$

$B_{2p+1}^{\delta}(\lambda)$ は $\lambda = 0$ かつ $\lambda = 0$ かつ $\lambda = 0$ である。

$\mathcal{D}(\alpha; \lambda)$ は $\lambda = 0$ かつ $\lambda = 0$ である。

$$(ii) \quad m_1 = 0, \quad \sum_{j=0}^{\infty} m_j = \dots = m_{j_0} = 0 < m_{j_0+1}$$

$$\text{つまり} \quad m_1 = \dots = m_{j_0} = 0 \quad (j_0 = 0) \quad \text{である}$$

$$B_{2p+1}^{\delta}(\lambda) \equiv 0, \dots, B_{2p+1}^{\delta}(\lambda) \equiv 0$$

$$\text{したがって} \quad C^2 - l_{2p+1, j}^2 \leq 0 \quad j = j_0, j_0+1, \dots, \infty, \quad \text{つまり} \quad \lambda = 0 \quad \text{である}$$

$$l_{2p+1, j_0} = j_0 \quad \text{かつ} \quad C = 0 \quad (\text{実数}) \quad |0| \leq j_0$$

$\lambda = 0$ かつ $\lambda = 0$

Theorem 12 表現 $\mathcal{D}(\alpha; C), D_{(m_1, \dots, m_{j_0}, p)}^{\delta}, \mathcal{S}_{(m_1, \dots, m_{j_0})}$ のうち

1) $\lambda = 0$ かつ $\lambda = 0$ である。

$\mathcal{D}(\alpha; \lambda)$ は $\lambda = 0$ かつ $\lambda = 0$ である。

$$j_0 = 1, 2, \dots, \infty$$

$\mathcal{D}(0, \dots, 0, m_{j_0+1}, \dots, m_{j_0}, \sigma)$ ($m_{j_0+1} > 0$) $|0| < j_0$ 補系列

$$j_0 = 1, 2, \dots, \infty-1$$

$D_{(0, \dots, 0, m_{j_0+1}, \dots, m_{j_0}, 0)}^{\delta}$ 主系列 (離散散列)

$$\mathcal{S}(0, \dots, 0)$$

単位表現

1) にかき。 $\lambda = 0$ かつ $\lambda = 0$ である。補系列表現の端点である。

2) $\mathcal{V}$ に $\lambda = 0$ かつ $\lambda = 0$ である。 $m_1 = m_2 = \dots = m_{j_0} = 0$ である。

$$D(0 \dots 0; c) \quad S(0 \dots 0, n_{h+1})$$

$1 = h+1$

$$\alpha = (m_1 \dots m_h) \quad m_1 > 0$$

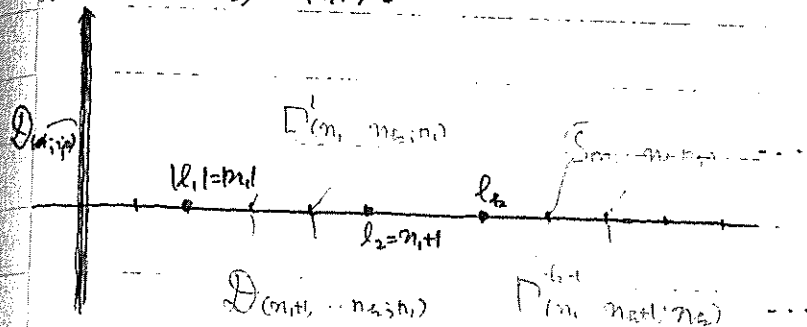


图 1.

$$\alpha = (0 \dots 0, n_{j_0+1} \dots n_h) \quad n_{j_0+1} > 0$$

$$j_0 = 1, 2, \dots, h-1$$

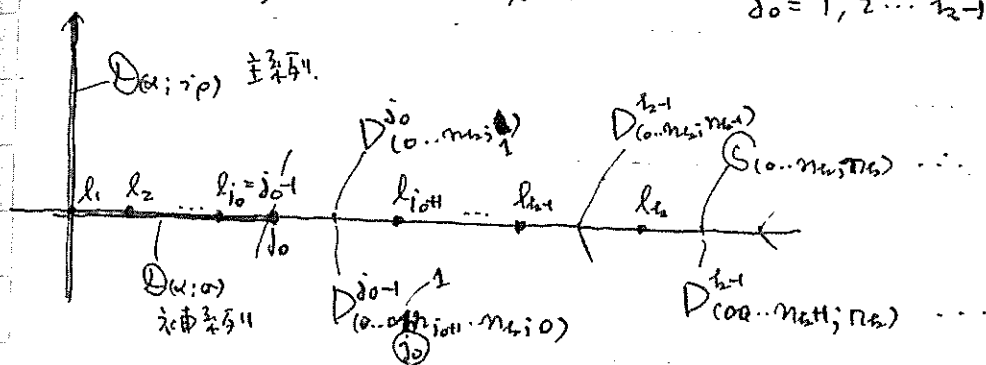


图 2.

$$\alpha = (0 \dots 0)$$

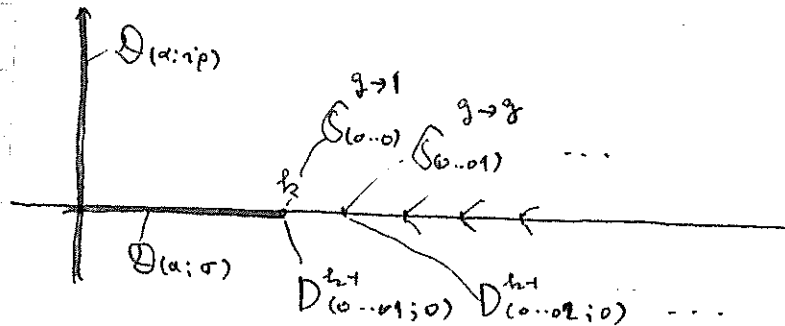


图 3.

3. [II] $n=2k+1$. ($k=1, 2, \dots$)

$$U = SO(2k), \quad \Gamma = SO(2k-1)$$

[I] と全く同様で議論によつて既約表現 $\{T, R\}$ には R には $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$ によつて番号づけられる標準基底が存在する. $\therefore$ $\mu = (m_{2k-1,1}, \dots, m_{2k-1,k})$ は U の既約表現の parameter, $\mu = \begin{bmatrix} m_{2k-2,1} & \dots & m_{2k-2,k-1} \\ & \ddots & \\ & & m_{2k-1,k} \end{bmatrix}$ である.

[I] と全く同様:

表現 $\{T, R\}$ の微分係数作用素が基底 $\{\lambda\}$ に (λ) 次の I により決定される. I は $A_{2k-1,1}, A_{2k-1,2}, \dots, A_{2k-1,2k-1}$ は (4) (5) により与えられる.

B は今度は I の場合と完全に合致する. したがって根拠の下に次のように仮定される.

$$B \{ \lambda \} = \sum_{j=1}^k A_{2k+1}^j(\lambda) \{ \lambda_{2k+1}^j \} + \sum_{j=1}^k A_{2k+1}^j(\lambda_{2k+1}^j) \{ \lambda_{2k+1}^j \} \dots (28)$$

$$A_{2k+1}^j(\lambda) = \frac{1}{2} \left\{ \prod_{r=1}^k (l_{2k+1,r} - \frac{1}{2})^2 - (l_{2k+1,j} + \frac{1}{2})^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ \left\{ \prod_{r=1}^{k-1} [l_r^2 - (l_{2k+1,j} + \frac{1}{2})^2] \cdot [c^2 - (l_{2k+1,j} + \frac{1}{2})^2] \right\}^{\frac{1}{2}} \\ \left\{ \prod_{r=j}^k (l_{2k+1,r} - l_{2k+1,j}) [l_{2k+1,r} - (l_{2k+1,j} + 1)^2] \right\}^{-\frac{1}{2}} \dots (29)$$

$$\therefore l_r = n_r + r - \frac{1}{2} \quad m_r = \inf m_{2k+1,r+1} \quad r=1, 2, \dots, k-1$$

これは $SO(2k+1)$ の微分係数作用素 $A_{2k+1,2k}$ によつて $l_{2k+1,r} - \frac{1}{2} = l_r$ と ($r=1, 2, \dots, k-1$), $l_{2k+1,k} - \frac{1}{2}$ がかかり $c \in \mathbb{C}$ として $\lambda \in \Gamma_2$ である.

(28), (29) より I の表現は discrete parameter $\alpha = (n_1, \dots, n_{k-1})$ $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_{k-1}$ と連続 parameter c によつて決定される. α は実は Γ の既約表現を定める parameter である.

(29) から分かるように $(\alpha; c)$ と $(\alpha; -c)$ は同一の表現を与える.

以下整数 $\pm \frac{1}{2}$ の桁の数と半整数 $\pm \frac{1}{2}$ の桁の数とを ν とし、 ν の全体を $\sum \frac{1}{2}$ と表す.

(4°) Lemma 1'

$$A_{2k+1}^j(\lambda) = 0 \Leftrightarrow m_{2k-2,j} = m_{2k-1,j} \quad m_{2k+1,j+1} = m_{2k+1,j} \\ n_j = m_{2k+1,j}$$

$$c \in \sum \frac{1}{2} \text{ である } |c| = |m_{2k+1,j} + j - \frac{1}{2}| \text{ である.}$$

故に次の3つの場合に分けられる.

(3°) $z = \sigma$ の表現(I) と同様にして $z = \sigma$ の表現の条件として作用素 $B = z + c_2$.

$$A_{2k+1}^j(\lambda) = -A_{2k+1}^j(\lambda) \quad j=1, 2, \dots, k. \quad (\forall \lambda) \quad (30)$$

2° あり.

lemma 2' $\exists \lambda_{2k+1}^j$ ならば $A_{2k+1}^j(\lambda) \neq 0$.lemma 3' $A_{2k+1}^j(\lambda)$ の本値の非零 $c^2 - (l_{2k+1,j} + \frac{1}{2})^2 \leq 0$ のとき $l_{2k+1,j}$ は + 2° あり.(30) より $A_{2k+1}^j(\lambda)$ は純虚数 2° ありから c^2 は実数 2° あり.(i) $c = ip$ または $c = \sigma$ (p, σ 実数)(i) $c = ip$ $\mathcal{D}(\alpha; ip)$ は $z = \sigma$ の表現 2° あり. 主系列と異なる.(ii) $c = \sigma$ $\mathcal{D}(\alpha; \sigma)$ を考えよ. $n_1 = \dots = n_{j_0-1} = 0 < n_{j_0}$ かつ $(n_{j_0} > 0 \text{ かつ } j_0 = 1 \text{ と解する})$ $A_{2k+1}^1(\lambda) \equiv 0, \dots, A_{2k+1}^{j_0-1}(\lambda) \equiv 0, \exists A_{2k+1}^{j_0}(\lambda) \neq 0$.故に $\sigma^2 - (l_{2k+1,j} + \frac{1}{2})^2 \leq 0 \quad j = j_0, j_0+1, \dots, k$ 2° かつ $l_{2k+1,j}$ は $n_{2k+1,j_0} = 0$ 故に $l_{2k+1,j_0} + \frac{1}{2} = j_0 - \frac{1}{2}$ かつ $|\sigma| \leq j_0 - \frac{1}{2}$

故に

 $\mathcal{D}(0 \dots 0 n_{j_0} \dots n_{k+1}; \sigma) \quad n_{j_0} > 0 \quad |\sigma| < j_0 - \frac{1}{2}$ は $z = \sigma$ の表現 2° 主系列と異なる. $\mathcal{S}(n_1 \dots n_k), D_{(n_1 \dots n_{k+1})}^{j_0}, D_{(p, n_1 \dots n_{k+1})}^+, D_{(p, n_1 \dots n_{k+1})}^-$ によって同様に考えれば. 次の定理を得る.Theorem 13 $n = 2k+1$ のとき L_n の表現の $z = \sigma$ のものは.

$$\mathcal{D}(\alpha; ip), \mathcal{D}(0 \dots 0 n_{j_0} \dots n_{k+1}; \sigma) \quad n_{j_0} > 0 \quad |\sigma| < j_0 - \frac{1}{2}$$

$$D_{(0 \dots 0 n_{j_0} \dots n_{k+1}; 0)}^{j_0} \quad n_{j_0} > 0$$

$$D_{(p, n_1 \dots n_{k+1})}^+, D_{(p, n_1 \dots n_{k+1})}^-$$

} 離散表現.

$$\mathcal{S}(0 \dots 0) \quad \text{単位表現}$$

class 1 の表現は $\alpha = (0 \dots 0)$ に対応する

$$\mathcal{S}(0 \dots 0 n_k) \quad \mathcal{D}(0 \dots 0; c) \quad \text{に} \text{ 対応する}$$

1 = 3° あり.

注意 n が偶数にしかかからない $\mathcal{S}(0 \dots 0 1)$ は L_n の $g \rightarrow g$ なる恒等表現

2" $L_3 = L_1$ かつ $A_{21} \dots A_{m-1, m-2}$, B の $\hat{u}$ 式から L_2 にかゝる L_3 .

$\alpha = (n_1 \dots n_{m-1}) \quad n_i > 0$

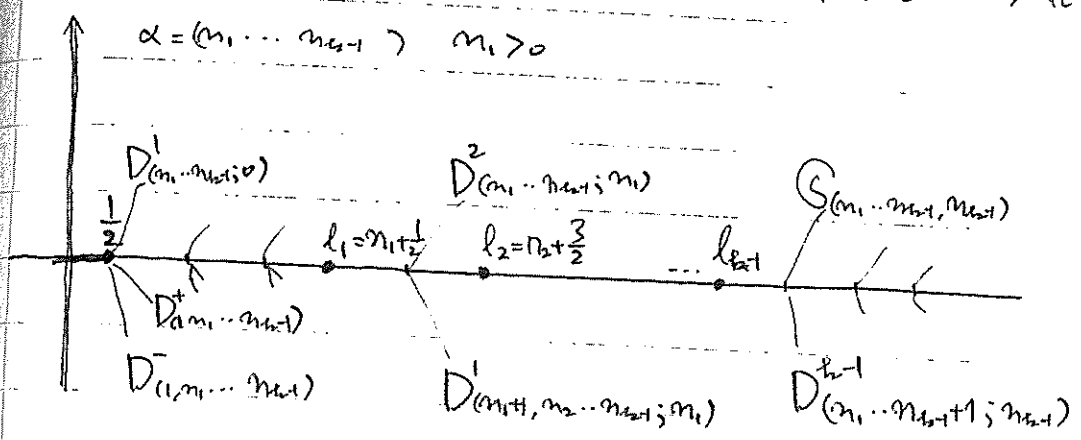


図 4.

$\alpha = (0 \dots 0 n_{j_0} \dots n_{m-1}) \quad n_{j_0} > 0$

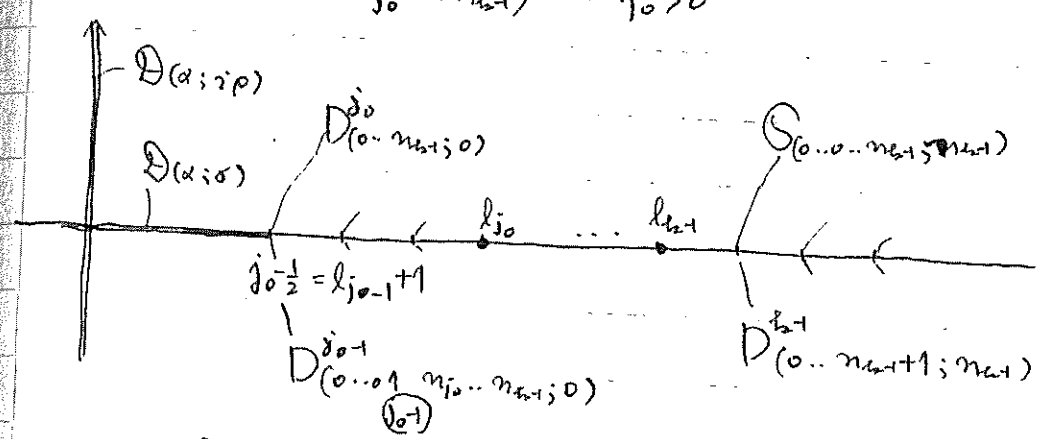


図 5.

$x < 1: L_3$ かつ $\hat{u}$ plane は $\hat{u}$ 式から L_2 .

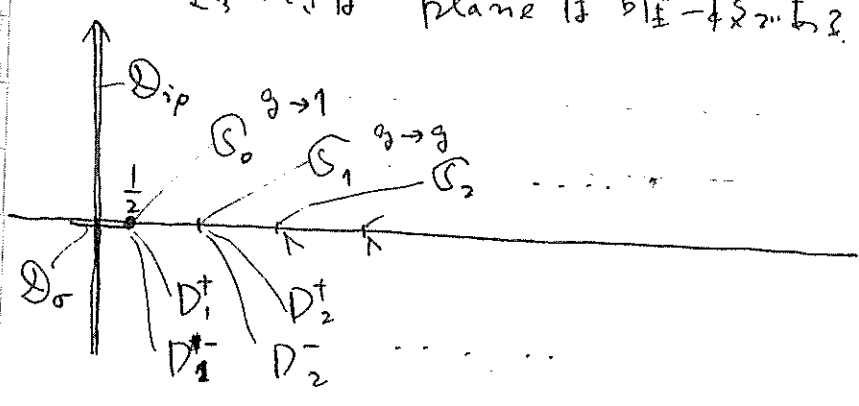


図 6.

4. 上に微分係数作用素を用いて決定した表現 $\{T_g, R\}$ の既約性に關於する定理は重要なものである。

今上に決定した微分係数作用素 $A_{i, i-1}, B$ に対応する表現 $\{T_g, R\}$ が本当に存在したとしよう。すると、

Theorem 14 $\{T_g, R\}$ に関する。ある 2 の T_g と可換な R の有界作用素は恒等算子 E の定数倍に過ぎる。

証明 (§13.1 を参照せよ)

有界作用素 H が $HT_g = T_g H$ ($\forall g \in G$) を満たす。 $G = \cup A \cup 1$ による (31) は

$$HT_u = T_u H \quad \dots (32)$$

$$H T_{ab} = T_{ab} H \quad \dots (33)$$

に同値である。(32) の両辺に $\sum_{i=1}^{N_0} C_{ii}^{(u)} E^i$ を乗じて $\cup$ 上を積分すると $HE^i = E^i H$ となる。 H は R^i を不変にするから基底 $\{e_i\}$ に関する matrix を表現できる。しかも (32) から

$$H = \|h_{\lambda\lambda'}\| \quad h_{\lambda\lambda'} = h(\lambda) \delta_{\lambda\lambda'} \quad \lambda = \begin{pmatrix} \beta \\ \mu \end{pmatrix} \quad \dots (34)$$

(32) は (34) と同値である。(33) は次の (35) と同値である。

$$B H \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = H B \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \quad (\forall \lambda) \quad \dots (35)$$

(35) から

$$n=2k+2 \text{ のとき } h(\beta) B_{2k}^{\beta}(\lambda) = h(\beta^0) B_{2k}^{\beta^0}(\lambda) \quad \dots (36)$$

$$n=2k+1 \text{ のとき } h(\beta) A_{2k+1}^{\beta}(\lambda) = h(\beta^0) A_{2k+1}^{\beta^0}(\lambda) \quad \dots (37)$$

からわかる。 Lemma 1, 1' による

$$h(\beta) \equiv h \quad (\text{定数}) \quad \text{である}$$

Corollary $A_{i, i-1}, B$ による表現 $\{T_g, R\}$ に関する。 Q.E.D.

- 1) $\{T_g, R\}$ が 2 -重表現であるならば既約である。
- 2) $\{T_g, R\}$ が有限次元表現であるならば、その完全既約性に留意せよ。 Th. 14 から既約性がわかる。

5. §§4-10. に於て構成した表現は parameter $(\alpha; c)$ によるもので、 α は 2 つある。2 つの Infinitesimal method による表現は parameter $(\alpha; c)$ によるもので、 α は 2 つある。2 つの parameter から一般化するかどうかは重要な問題である。2.3. 2.4 の場合はたしかに一般化しているものがあるが、一般の m の場合には、新しい困難さが増加する。来るべき検証はたしかにない。この方向の研究はまた「 α と c 」を手を付けたい。class 1 の場合には、 α の $\frac{1}{2}$ の D は α の $\frac{1}{2}$ である。

$\Delta = \sum_{i,j} A_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{n-1} B_i^2$ は α と B_i, A_{ij} と可換である。
今 $\hat{N}$ 上の適当な函数空間 $\mathcal{H}$ 上に作用する表現 $\{T_g, f_g\}$

$$T_g f(\eta) = \alpha(\eta g) f(\eta \bar{g})$$

$$\alpha(\eta g) = (e^{-t})^{-c - \frac{m}{2} + 1} \quad c \in \mathbb{C} \quad \text{且 } \mathcal{H}_5 \ni ? \quad \dots (38)$$

$$c = 1: \eta g = \alpha(t) \times \eta \bar{g} \quad \text{と} \quad \eta \bar{g} = \eta' \text{ とおくと,}$$

$$e^{-t} = \sum_{j=1}^{n-2} \eta_j (g_{j,n} - g_{j,n-1}) + \frac{1-|\eta|^2}{2} (g_{n-1,n} - g_{n-1,n}) + \frac{1+|\eta|^2}{2} (-g_{n,n-1} + g_{n,n})$$

$$e^{-t} \eta'_i = \sum_{j=1}^{n-2} \eta_j g_{ji} + \frac{1+|\eta|^2}{2} g_{n-1,i} + \frac{1-|\eta|^2}{2} g_{ni} \quad \dots (39)$$

$$i=1, 2, \dots, n-2. \quad \dots (40)$$

$$(i) \quad g = g_{ij}(\theta) \quad 1 \leq j < i < n-1$$

$$A_{ij} f(\eta) = \frac{d}{d\theta} T_{g_{ij}(\theta)} f(\eta) \Big|_{\theta=0} \text{ は (39), (40) を用いる.}$$

$$A_{ij} f(\eta) = \left(\eta_i \frac{\partial}{\partial \eta_j} - \eta_j \frac{\partial}{\partial \eta_i} \right) f(\eta)$$

$$(ii) \quad g = g_{n-1,j}(\theta) \quad j=1, 2, \dots, n-2 \quad \dots (41)$$

$$A_{n-1,j} f(\eta) = - \left[\left(c + \frac{m}{2} - 1 \right) \eta_j + \eta_j \sum_{k=1}^{n-2} \eta_k \frac{\partial}{\partial \eta_k} + \frac{1-|\eta|^2}{2} \frac{\partial}{\partial \eta_j} \right] f(\eta) \quad \dots (42)$$

$$(iii) \quad g = g_{n-1}(\theta)$$

$$B_{n-1} f(\eta) = \left[\left(c + \frac{m}{2} - 1 \right) + \sum_{k=1}^{n-2} \eta_k \frac{\partial}{\partial \eta_k} \right] f(\eta) \quad \dots (43)$$

$$(iv) \quad g = g_j(\theta) \quad j=1, 2, \dots, n-2.$$

$$B_j f(\eta) = - \left[\left(c + \frac{m}{2} - 1 \right) \eta_j + \eta_j \sum_{k=1}^{n-2} \eta_k \frac{\partial}{\partial \eta_k} - \frac{1+|\eta|^2}{2} \frac{\partial}{\partial \eta_j} \right] f(\eta) \quad \dots (44)$$

これより

$$\sum_{1 \leq j < i \leq n-2} A_{ij}^2 = |\eta|^2 \Delta - \sum_{i,j=1}^{n-2} \eta_i \eta_j \frac{\partial^2}{\partial \eta_i \partial \eta_j} - (n-3) \sum_{i=1}^{n-2} \eta_i \frac{\partial}{\partial \eta_i} \quad \dots (45)$$

$$\sum_{j=1}^{n-2} A_{n-1,j}^2 - \sum_{j=1}^{n-2} B_j^2 = (n-2) \left(c + \frac{m}{2} - 1 \right) - |\eta|^2 \Delta + 2 \sum_{i,j=1}^{n-2} \eta_i \eta_j \frac{\partial^2}{\partial \eta_i \partial \eta_j}$$

$$- (n-2) \sum_{j=1}^{n-2} h_i \frac{\partial}{\partial h_i} + 2 \left(c + \frac{n}{2} - 1 \right) \sum_{j=1}^{n-2} h_j \frac{\partial}{\partial h_j}$$

... (46)

$$-B_{n-1}^2 = - \left(c + \frac{n}{2} - 1 \right)^2 - \sum_{i,j=1}^{n-2} h_i h_j \frac{\partial^2}{\partial h_i \partial h_j} - 2 \left(c + \frac{n}{2} - 1 \right) \sum_{i=1}^{n-2} h_i \frac{\partial}{\partial h_i} - \sum_{i=1}^{n-2} h_i \frac{\partial}{\partial h_i} \quad \dots (47)$$

したがって

$$\Delta = - \left[c^2 - \left(\frac{n}{2} - 1 \right)^2 \right]$$

... (48)

例1. $n=3$. $\mathbb{I}_3$ に対して

離散散列の $\mathbb{I}_3$ の $\mathbb{C}$ 上の表現. および有限次元表現に就いて.

$$\Delta = A_{21}^2 - B_1^2 - B_2^2 = - \left[c^2 - \frac{1}{4} \right]$$

1-5.2 表現の parameter を与えることが T_2 にかからぬ

... (49)

例2. $n=4$. $\mathbb{I}_4$.

class 1-2. T_2 の場合 $\mathbb{I}_4$ の $\mathbb{C}$ 上の表現. および有限次元表現に就いて.

$$\Delta = - [c^2 + n_1^2 - 1]$$

$$\Delta' = A_{32} B_1 + A_{21} B_3 + A_{13} B_2 \quad \text{と } A_{ij}, B_k \text{ と可換}$$

... (50)

$$\Delta' = i n_1 c$$

... (51)

これらの値は構成された表現についての微分作用素として計算したとき、
Infinitesimal method から計算したとき、 Δ と Δ' は (50), (51) に与えられている。
これらの表現の parameter を与えることが T_2 にかからぬ。

cf [3] p104, p144.

§13 不変な Hermitian 内積の構成

§12. 2 分類した L_n の表現 (T_g, R) に対して.

Hermitian 内積 $\langle f_1, f_2 \rangle$ を

- (i) 両連続 (f_1, f_2 2 変数の函数として連続)
 (ii) 非縮退

条件を求め、その内積の形を求めよ。 T_g の 2 つの性質を持つ内積が存在する

1. 表現 (T_g, R) は U に制限するとその既約成分 $\{C^0, R^0\}$ の直和になる。 §12 の記号を用いて標準基底を $\{ \lambda \}$ と書く、 $h_{\lambda\lambda'} = \langle \{ \lambda \}, \{ \lambda' \} \rangle$ とおくとこの内積は両連続であるから、行列 $H = \| h_{\lambda\lambda'} \|$ は、2 対称行列

T_g 不変であるというとは $G = UAU$ により、2 次の (1), (2) と同値である

$$\forall u \in U \quad \langle T_u f_1, T_u f_2 \rangle = \langle f_1, f_2 \rangle$$

$$\forall a(t) \in A \quad \langle T_{a(t)} f_1, T_{a(t)} f_2 \rangle = \langle f_1, f_2 \rangle \quad \dots (1)$$

さらにこの f_1, f_2 を標準基底とすると $t=0$ 付近で成り立つ。

(1) (1) より $\langle T_u f_1, f_2 \rangle = \langle f_1, T_u f_2 \rangle$ この両辺に $N_0 \sum_{i=1}^{N_0} \overline{C_{ii}^{(0)}(u)}$ を乗じて U 上の積分すると $E^0 = N_0 \int \sum_{i=1}^{N_0} \overline{C_{ii}^{(0)}(u)} T_u du$ とおくと

$$\langle E^0 f_1, f_2 \rangle = \langle f_1, E^0 f_2 \rangle$$

(*) β' に対して $E^0 [R^{\beta'}] = 0$ であるから

$$f_1 = \{ \lambda \} \quad \lambda = \begin{pmatrix} \beta \\ \mu \end{pmatrix}, \quad f_2 = \{ \lambda' \} \quad \lambda' = \begin{pmatrix} \beta' \\ \mu' \end{pmatrix} \quad \text{とおいておく}$$

$$h_{\lambda\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'} h_{\lambda\lambda'} \quad \text{従って} \quad H = \begin{pmatrix} \square & & 0 \\ & \square & \\ 0 & & \square \end{pmatrix} \quad \text{の形である。}$$

$$\text{さらに (1) から} \quad H T_u = T_u H$$

$$\therefore h_{\lambda\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'} h(\beta)$$

(2) により (2) より

$$\frac{1}{t} \langle T_{a(t)} f_1, T_{a(t)} f_2 - f_2 \rangle + \frac{1}{t} \langle T_{a(t)} f_1 - f_1, f_2 \rangle = 0 \quad f_1, f_2 \in \mathcal{D}$$

$t \rightarrow 0$ のとき連続性から

$$\langle f_1, B f_2 \rangle + \langle B f_1, f_2 \rangle = 0$$

逆に (5) が成り立つと (2) が成り立つ。

... (5)

§ 1.2 (4), (5) はそれぞれ (1), (2) と同値である。

2. (I) $m = 2h + 2$

(5) $1 \leq j \leq 2$ $f_1 = \zeta(\lambda)$, $f_2 = \zeta(\lambda_{2h}^{j+})$, $\zeta(\lambda)$, $\zeta(\lambda_{2h}^{j-})$ は λ の関数。

$$B \zeta(\lambda) = \sum_{j=1}^{2h} B_{2h}^j(\lambda) \zeta(\lambda_{2h}^{j+}) + C_{2h}(\lambda) \zeta(\lambda) + \sum_{j=1}^{2h} B_{2h}^j(\lambda_{2h}^{j-}) \zeta(\lambda_{2h}^{j-}) \quad \dots (6)$$

$$B \zeta(\lambda_{2h}^{j+}) = \sum_{l=1}^{2h} B_{2h}^l(\lambda_{2h}^{j+}) \zeta(\lambda_{2h}^{j+l+}) + C_{2h}(\lambda_{2h}^{j+}) \zeta(\lambda_{2h}^{j+})$$

$$B \zeta(\lambda_{2h}^{j-}) = \sum_{l=1}^{2h} B_{2h}^l(\lambda_{2h}^{j-}) \zeta(\lambda_{2h}^{j-l+}) + \sum_{l=1}^{2h} B_{2h}^l(\lambda_{2h}^{j-}) \zeta(\lambda_{2h}^{j-l-}) + C_{2h}(\lambda_{2h}^{j-}) \zeta(\lambda_{2h}^{j-}) \quad \dots (7)$$

$$T_2 T_2^{-1} \zeta(\lambda_{2h}^{j+l+}) = (\lambda_{2h}^{j+l+})_{2h}^{l+} \zeta(\lambda_{2h}^{j+l+}) \quad \dots (8)$$

§ 1.2 条 (4) と (2) $j=1, 2, \dots, 2h$ と $\zeta(\lambda) = \zeta(\lambda_{2h}^{j+})$

$$h(\beta) \overline{B_{2h}^j(\lambda)} + h(\beta^{j+}) B_{2h}^j(\lambda) = 0$$

$$h(\beta) \overline{C_{2h}(\lambda)} + h(\beta) C_{2h}(\lambda) = 0 \quad \dots (9)$$

$$h(\beta) \overline{B_{2h}^j(\lambda_{2h}^{j-})} + h(\beta^{j-}) B_{2h}^j(\lambda_{2h}^{j-}) = 0 \quad \dots (10)$$

$$\beta^{j+} \text{ は } \lambda_{2h}^{j+} \text{ と (2) 条の } \frac{1}{2} \leq \frac{p}{q} \text{ である。} \quad \dots (11)$$

§ 1.2 条 (3) $\beta = \lambda_{2h}^{j+}$ (ii) β は $h(\beta) \neq 0$

$$(10) \text{ より } \overline{C_{2h}(\lambda)} + C_{2h}(\lambda) = 0$$

$$(11) \text{ は 常に成り立つ } h(\beta) \overline{B_{2h}^j(\lambda)} + h(\beta^{j+}) B_{2h}^j(\lambda) = 0 \quad \dots (12)$$

$$(9), (12) \text{ より } B_{2h}^j(\lambda)^2 - \overline{B_{2h}^j(\lambda)}^2 = 0 \quad \dots (13)$$

$$(12) \text{ より } C = ip \text{ または } m_1 = 0, (13) \text{ より } C = ip \text{ または } C = \sigma \text{ (実数)} \quad \dots (13)$$

§ 1.2

Proposition 8 $m = 2h + 2$, $(m_1, \dots, m_{2h+2}(c))$ に対応する表現 $\{T_j, R_j\}$ は不変内積が存在するとは次の場合にかたず

(i) $C = ip$ (ii) $m_1 = 0$ $\&$ $C = \sigma$ (複素列の存在する実軸)

(1°) $h(\beta)$ の符号は？

$$h(\beta^{j+}) = - \frac{B_{2h}^j(\lambda)}{B_{2h}^j(\lambda)} h(\beta)$$

§ 12. Lemma 1, 2, 3 $1 \leq j \leq 2$ $C^2 - \lambda_{2h,j}^2 > 0$ のとき $B_{2h}^j(\lambda)$ は

実数であるから $h(\beta^{j+}) = -h(\beta)$

$c^2 - l_{2n,j}^2 < 0$ のとき $B_{2n}^j(\lambda)$ は $2n$ 階虚数 λ であるから $h(\lambda\delta^+) = h(\lambda)$
 $\lambda \in i = 2$ のとき表現 λ は $h(\lambda) \equiv h(\lambda\delta^+)$ である。 $H = h \cdot \|\omega_{\lambda}\|$

従って $2 = \lambda$ のとき $I_0 \cap I_0 \cap I_0 \cap I_0$ は λ である。

(1) $c = 2\rho$ のとき $\mathcal{D}(\alpha; 2\rho)$ は $2 = \lambda$ の表現である。

(2) $n_1 = 0$ ($c = \sigma$ のとき)

$\sigma^2 - l_{2n,j}^2 > 0$ は $|\sigma| > l_{2n,j}$ と $|\sigma| < l_{2n,j}$ の場合。

$|\sigma| > l_{2n,j} - 1$ のときは $h(\lambda) = h(\lambda\delta^-)$

$|\sigma| < l_{2n,j} - 1$ のときは $h(\lambda) = -h(\lambda\delta^-)$

また $l_j, |\sigma| \leq l_{j+1}$ ($l_j = n_j + j - 1$) のとき
 $h(\lambda) = h \cdot (-1)^{\sum_{j=1}^{j_0} m_{2n,j}} + [|\sigma|]_{\wedge} (l_{2n,j_0} - 1)$

(i) $n_j \leq m_{2n,j} \leq n_{j+1} \therefore l_j \leq l_{2n,j} - 1 \leq l_{j+1} - 1$

($i = 2$ のとき $|\sigma| \geq l_{2n}$ のときは $j_1 = l_2$ と解する)

また $c < l_{2n}$ のとき表現は

(i) $\mathcal{D}(0 \dots 0 n_{j_0+1} \dots n_{2n}; \sigma)$ $n_{j_0+1} > 0$ $|\sigma| < j_0$ unitary
~~parameter~~ parameter $(0 \dots n_{2n}; \sigma)$

(ii) $\mathcal{D}_{j_0}^{j_0}(0 \dots n_{2n}; p)$ parameter $(0 \dots n_{2n}; p + j_0)$ ($j_0 \geq 2$)
 $h(\lambda) = h \cdot (-1)^{\sum_{j=1}^{j_0} m_{2n,j}}$ ($j_0 = 1, 2, \dots, l_2 - 1$) ... (15)

(iii) $\mathcal{C}(0 \dots n_{2n} n_{2n+1})$ ($0 \dots n_{2n} n_{2n+1} + l_2$)
 $h(\lambda) = h \cdot (-1)^{\sum_{j=1}^{l_2} m_{2n,j}}$... (16)

これは R^0 の signature であるから λ は $\bar{\lambda}$ である。

(iv) $\mathcal{C}$ の $I_0 \cap I_0$

$\mathcal{D}(0 \dots n_{2n}; \sigma)$ $n_1 = \dots = n_{j_0} = 0 < n_{j_0+1}$ のとき

$n_{j_1+j_1-1} < |\sigma| \leq n_{j_1+j_1+1}$ ($j_1 = j_0+1, \dots, l_2$) のとき ($l_{j_1}-1 < |\sigma| < l_{j_1+1}$)
 $h(\lambda) = (-1)^{\sum_{j=j_0}^{j_1-1} m_{2n,j}}$... (17)

$n_{j_1+j_1+1} < |\sigma| < n_{j_1+j_1+2}$ ($l_{j_1+1} < |\sigma| < l_{j_1+2} - 1$)
 $h(\lambda) = h \cdot (-1)^{\sum_{j=j_0}^{j_1-1} m_{2n,j}} + [|\sigma|]_{\wedge} (l_{2n,j_1} - 1)$... (18)
 $(j_1 = j_0, j_0+1, \dots, l_2)$

(i) ~ (iv) による λ の表現は

codimension 有限の部分空間に於て、内積が定符号となるのは、
 二重表現と有限次元表現を "class 1 の表現 $D_{(0, \dots, 0, \sigma)}$ " に
 かき"る。

3. [II] $m = 2h+1$

$$B \zeta(\lambda) = \sum_{j=1}^h A_{2h+1}^j(\lambda) \zeta(\lambda_{2h+1}^{j+}) + \sum_{j=1}^h A_{2h+1}^j(\lambda_{2h+1}^{j-}) \zeta(\lambda_{2h+1}^{j-}) \quad \dots (19)$$

$$B \zeta(\lambda_{2h+1}^{j+}) = \sum_{l=1}^h A_{2h+1}^l(\lambda_{2h+1}^{j+}) \zeta(\lambda_{2h+1}^{j+l+}) + \sum_{l=1}^h A_{2h+1}^l(\lambda_{2h+1}^{j+l-}) \zeta(\lambda_{2h+1}^{j+l-}) \quad \dots (20)$$

$$B \zeta(\lambda_{2h+1}^{j-}) = \sum_{l=1}^h A_{2h+1}^l(\lambda_{2h+1}^{j-}) \zeta(\lambda_{2h+1}^{j+l-}) + \sum_{l=1}^h A_{2h+1}^l(\lambda_{2h+1}^{j+l-}) \zeta(\lambda_{2h+1}^{j+l-}) \quad \dots (21)$$

(5) $\lambda \in \Sigma_2$ $f_1 = \zeta(\lambda)$, $f_2 = \zeta(\lambda_{2h+1}^{j+})$, $\zeta(\lambda_{2h+1}^{j-})$ と λ (2 (19) (21))
 と用いられる。

$$h(\lambda) \overline{A_{2h+1}^j(\lambda_{2h+1}^{j+})} + h(\lambda_{2h+1}^{j+}) \overline{A_{2h+1}^j(\lambda)} = 0 \quad \dots (22)$$

$$h(\lambda) \overline{A_{2h+1}^j(\lambda_{2h+1}^{j-})} + h(\lambda_{2h+1}^{j-}) \overline{A_{2h+1}^j(\lambda)} = 0 \quad \dots (23)$$

[I] と全く同様に (2 (22) (23)) より

$$\overline{A_{2h+1}^j(\lambda)}^2 - A_{2h+1}^j(\lambda)^2 = 0 \quad \dots (24)$$

したがって $c = ip$ または $c = \sigma$ となる。

Proposition 9 $m = 2h+1$. 表現 $\{T_g, R\}$ に不変な内積が存在
 するとは $(\alpha; ip)$ または $(\alpha; \sigma)$ に対応する表現 π は Σ の faithful
 representation である。

$h(\lambda)$ の性質を述べよう。

$$h(\lambda_{2h+1}^{j+}) = - \frac{A_{2h+1}^j(\lambda)}{A_{2h+1}^j(\lambda)} h(\lambda) \quad \dots (25)$$

§12 の Lemma 1', 2', 3' と
 参考 (2). $c^2 - (2h+1 + \frac{1}{2})^2$ の正負に依り $A_{2h+1}^j(\lambda)$ は実数または
 純虚数である。したがって $h(\lambda_{2h+1}^{j+}) = -h(\lambda)$ または $h(\lambda_{2h+1}^{j+}) = h(\lambda)$ である。
 と $c = 2$ の表現では $A_{2h+1}^j(\lambda)$ はすべて純虚数であるから
 $h(\lambda) = h(\lambda_{2h+1}^{j+})$ となる。
 $H = h(\|\alpha_\lambda\|)$ と得る。

(1) $c = ip$ $\oplus (\alpha; ip)$ unitary
 $D_{(p, m_1, \dots, m_{h+1})}^+$, $D_{(p, m_1, \dots, m_{h+1})}^-$ は unitary

(2) $c = \sigma$ のときは

$$l_j = n_j + j - \frac{1}{2} \text{ とある.}$$

$$n_{j-1} \leq m_{2l_{j-1}, j} < n_j \quad \therefore l_{j-1} \leq l_{2l_{j-1}, j} - \frac{1}{2} \leq l_j - 1 \text{ である.}$$

$$\sigma^2 - (l_{2l_{j-1}, j} - \frac{1}{2})^2 \geq 0 \quad \text{よって } h(\beta) = \mp h(\beta\sigma^-)$$

注意する

$$l_{j-1} \leq |\sigma| < l_j, \quad j=2, \dots, l-1 \text{ かつ}$$

$$h(\beta) = h \cdot (-1)^{\sum_{j=1}^{l-1} m_{2l_{j-1}, j} + (|\sigma| + \frac{1}{2}) \wedge l_{2l_{l-1}, l}}$$

... (26)

$$|\sigma| < l_1 = n_1 + \frac{1}{2} \text{ かつ } l_{l-1} \leq |\sigma| \text{ かつ } j_1 = 1, \text{ とある.} \quad (26) \text{ から}$$

$$(i) \quad n_1 = \dots = n_{j_0-1} = 0 < n_{j_0} \quad |\sigma| < j_0 \quad j_0 = 1, 2, \dots, l-1$$

$$D(\alpha; \sigma) \text{ unitary}$$

$$(ii) \quad D_{(n_1, \dots, n_{l-1}; p)}^{\delta_0} \quad (n_1, \dots, n_{l-1}; p + j_0 - \frac{1}{2}) \quad (l \geq 2)$$

$$h(\beta) = h \cdot (-1)^{\sum_{j=1}^{j_0} m_{2l_{j-1}, j}}$$

... (27)

$$(iii) \quad S(n_1, \dots, n_{l-1}) \quad (n_1, \dots, n_{l-1}; n_l + l - \frac{1}{2})$$

$$h(\beta) = h \cdot (-1)^{\sum_{j=1}^l m_{2l_{j-1}, j}}$$

... (28)

$$(iv) \quad \sum_{j=1}^l \alpha_j \in \mathbb{R} \quad D(\alpha; \sigma)$$

$$\frac{1}{2} < |\sigma| < l_1 = n_1 + \frac{1}{2} \text{ かつ}$$

$$h(\beta) = h \cdot (-1)^{m_{2l_{l-1}, 1} \wedge (|\sigma| + \frac{1}{2})}$$

... (29)

$$l_{j_0-1} < |\sigma| < l_{j_0} + 1 \text{ かつ}$$

$$h(\beta) = h \cdot (-1)^{\sum_{j=1}^{j_0} m_{2l_{j-1}, j} \wedge (|\sigma| + \frac{1}{2}) \wedge l_{2l_{j_0}, j_0}}$$

... (30)

$$(j_0 = 1, 2, 3, \dots, l-1)$$

$$l_{j_0-1} + 1 < |\sigma| < l_{j_0} - 1 \text{ かつ}$$

$$h(\beta) = h \cdot (-1)^{\sum_{j=1}^{j_0-1} m_{2l_{j-1}, j} + (|\sigma| + \frac{1}{2}) \wedge l_{2l_{j_0}, j_0}}$$

... (31)

$$(i) \sim (iv) \text{ による}$$

2-表現と有限次元表現の間に

codimension 有限の $\mathbb{R}$ の空間に $\beta \leq 2$ の内積が定義され β は T_2 の β である

class 1 の表現 $D(0, \dots, 0; \sigma)$ にかたがと β である

引 用 文 献

- [1] I. M. Gelfand - M. A. Neumark
Unitäre Darstellungen der klassischen Gruppen. Akademie-Verlag. Berlin 1957.
- [2] И. М. Гельфанд и др.: Представления группы вращений и группы Лоренца: Физматгиз. Москва 1958.
- [3] М. А. Наймарк: Линейные представления группы Лоренца Физматгиз Москва 1958.
- [4] Pontrjagin: 連続群論, 上, F 岩波書店 1957.
- [5] И. М. Гельфанд и М. И. Граев:
Геометрия однородных пространств, представления группы в однородных пространствах и Труды. М. М. Д. том 8 1959. pp 321 - 390.
- [6] A. Weil: L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications. Actuel. Sci. Ind. Hermann. Paris.
- [7] G. W. Mackey: Induced representations of locally compact groups I. Ann. Math. vol 55 1952. pp 101 - 139.
- [8] V. Bergmann: Inducible unitary representations of the Lorentz group: Ann. Math. vol 48. 1947. pp 568 - 640.
- [9] И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилор.: Обобщенные функции и действия над ними. Физматгиз. Москва 1959.
- [10] L. Gårding: Note on continuous representation of Lie groups proceedings of the Nation. Acad. of Sci. U. S. A. vol 33. 1947.
- [11] 数学公式 III - 特殊函数 - 岩波全書. 1960.