

3 次元チューリングパターンの再考察

Reconsideration of Three Dimensional Turing Patterns

昌子浩登^{1*}

¹ 京都府立医大医学研究科物理学教室

Hiroto Shoji^{1*}

¹Department of Physics, Graduate School of Medicine,
Kyoto Prefectural University of Medicine, Kyoto 603-8381 JAPAN

* shoji@koto.kpu-m.ac.jp

1 はじめに

1952 年 Alan Turing [1] は, 生体のような非平衡系で周期的なパターンが自発的に形成されるためには, 拡散係数の異なる 2 種の物質が相互作用を行えば可能であるということを発表した. その後, 約 40 年近く経ってから化学反応において Turing 機構によるパターン形成の報告がなされた. 文献 [2] では, Chlorite-Iodide-Malonic Acid (CIMA) 反応を用いて, 化学物質の濃度差のある 2 種の連続流津搅拌反応容器 (CSTR) をポリアクリルアミドゲルを用いた反応セルで接続し, 濃度勾配が自然に形成される中で, ゲル上に形成されるパターンを観察した. また, この反応系で外部から光刺激を導入し, 化学反応の反応レートを変化させる系の解析も行われてきた [3]. そして近年, 可視化技術の発展により 3 次元空間中の Turing パターンの観測ができるようになってきた [4].

生体において Turing 機構によるパターン形成の研究は, Turing 論文 [1] 発表以来たくさんの研究者によって行われてきた [5]. 特に, 生体における細胞間分子相互作用等ことこまかな情報を手にとるように調べられるようになってきた近年, 様々な生体で Turing 機構がはたらいいていかどうかの検証が行われている [6].

一方で, 生体の内部システムのような非平衡系において自発的に形成される 3 次元 Turing パターンについて, これまで筆者らは基本周期のパターンの多様性の解析 [7] を行ってきた. しかし, 文献 [2] のような実際の化学反応においてみられる広大な領域で見られるパターンの特徴解析はほとんど見られない. 本稿では, 下に紹介する CIMA 反応をモデル化した 2 変数モデルである Lengyel-Epstein 反応拡散モデル [8] を用いて, 文献 [2] の化学実験系において考慮すべき特徴である化学物質の濃度勾配や反応率の空間変化を反応拡散モデルに導入した系において形成されるパターンの性質を解析する. 文献 [9] では, CIMA 反応を模した多変数モデルを用いて境界条件の違いで得られるパターンの解析を行っている. しかし, 数値計算の領域があまりにも狭すぎるし, 得られるパターンも境界条件の影響を非常に受けたものになっていて, 3 次元空間の空間濃度勾配の存在する系での Turing 3 次元パターンの性質を考察するのには十分ではない.

本稿では, 計算領域によるパターンへの影響を受けないような広大な計算領域で数値計算を行う. そのために, グラフィックプロセッシングユニット (GPU) を用いて高速に数値計算が行えるスキームを適用し, モデル系において形成パターンの性質を考察する.

2 Lengyel-Epstein モデル

2.1 モデル

Lengyel-Epstein (LE) モデル [8] は, De Kepper [2] らが Chlorite-Iodide-Malonic Acide を用いる化学反応を開放系のポリアクリルアミドゲルでチューリング構造を観測することに成功した実験系をモデル化したものである. さらに, この化学反応系を光刺激に反応するよう修正した化学反応系である Chlorine dioxide-iodine-malonic acid (CDIMA) 反応をモデル化 [3] した次のモデルものを本稿では扱う.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a - cu - \frac{4uv}{1+u^2} - \phi + \nabla^2 u, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \sigma \left(cu - \frac{uv}{1+u^2} + \phi + d\nabla^2 v \right). \quad (2)$$

ここで, a, c, σ, d 正の定数パラメータである. 変数 u, v はそれぞれアクティベータとインヒビターのローカルな濃度を表す変数である. ϕ は光刺激の強度を意味するパラメータを示す.

式 (1), (2) の定常解 $u_0 = \frac{a-5\phi}{5c}$, $v_0 = \frac{a(1+u_0^2)}{5u_0}$ として, 式 (1), (2) に $\delta u = u(x, t) - u_0$, $\delta v = v(x, t) - v_0$ に代入し, 線形解析を行う. 固有方程式は,

$$\begin{aligned} \lambda^2 - (-c - k^2 - \sigma(dk^2 + \frac{u_0}{1+u_0^2}) - \frac{4(1-u_0^2)v_0}{(1+u_0^2)^2})\lambda \\ - \sigma(dk^2 + \frac{u_0}{1+u_0^2})(-c - k^2 - \frac{4(1-u_0^2)v_0}{(1+u_0^2)^2}) + \frac{4\sigma u_0(c - \frac{(1-u_0^2)v_0}{(1+u_0^2)^2})}{1+u_0^2} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

チューリング不安定性がおこる条件は,

$$-\sigma(dk^2 + \frac{u_0}{1+u_0^2})(-c - k^2 - \frac{4(1-u_0^2)v_0}{(1+u_0^2)^2}) + \frac{4\sigma u_0(c - \frac{(1-u_0^2)v_0}{(1+u_0^2)^2})}{1+u_0^2} < 0. \quad (4)$$

と計算できる. パラメータをそれぞれ $a = 16.0$, $c = 0.6$, $d = 0.683$, $\sigma = 301.0$ に固定し, ϕ をコントロールパラメータとする. このとき, $1.190 < \phi < 2.003$ の領域でチューリングパターンが出現する. この Turing 不安定性のおこる $1.20 \leq \phi \leq 2.0$ の領域での 3 次元 Turing パターンについて探求する.

2.2 数値計算スキーム

式 (1), (2) の 3 次元空間における数値計算を次のスキームで行った. 3 次元空間を分割幅 δx のグリッドサイズ $N_x \times N_y \times N_z$ に分割した. 空間サイズ $(L_x, L_y, L_z) = (N_x \times \delta x, N_y \times \delta x, N_z \times \delta x)$ の直方体格子空間で数値計算を行う. 拡散項による発散が起きないように設定した時間分割幅 δt を用いて, オイラー法による時間発展方程式を用いて式 (1), (2) を離散化したものを解いた. 拡散の異方性を除去すべく, 拡散スキームに近傍 27 点を用いるスキームを適用し, 反応項は 4 次のルンゲクッタ法を適用した.

このスキームでの数値計算を高速に行うために, 通常の数値計算で行われる中央演算処理装置 (CPU) だけを用いた計算法ではなく, コンピュータの画像情報を処理する装置である GPU も用いた超並列計算によって計算法を適用した. GPU を用いた計算を行うために, NVIDIA 社が開発した Compute Unified Device Architecture (CUDA) を用いて, GPU での超並列計算プログラムを作成した. CUDA でのプログラミングは, 基本的には C 言語で作成されているが, いくつかの特別な発展関数を用いて GPU への制御命令を行っている. 作成したプログラムを NVIDIA の nvcc コンパイラを用いてオブジェクトコードを作成した. これらのユーティリティやライブラリー, 並びにさまざまな例を備えた Development キットはフリーで利用可能である [10].

3 一様な場での 3 次元周期パターン

空間勾配がある 3 次元系の数値計算する前に, このセクションでは式 (1), (2) で形成される基本周期の 3 次元パターンの多様性について確認する.

基本周期の 3 次元 Turing パターンは, 文献 [7] で解析したように, 空間サイズによって得られる構造が変わってくることが知られている. そのため, 空間分割幅の δx もパラメータのように変化させて, 得られるパターンを観察する. このセクションでは $N_x = N_y = N_z = 32$ に固定し, δx を $0.25 \leq \delta x \leq 5.00$ まで 0.02 ずつ変化させた空間サイズ $(L_x, L_y, L_z) = (N_x \times \delta x, N_y \times \delta x, N_z \times \delta x)$ の 3 次元立方格子空間で, 周期境界条件を課した条件のもとで数値計算を行う. それぞれの δx の値の空間サイズの 3 次元立方格子ごとに数値計算を行い, 得られるパターンを観察する.

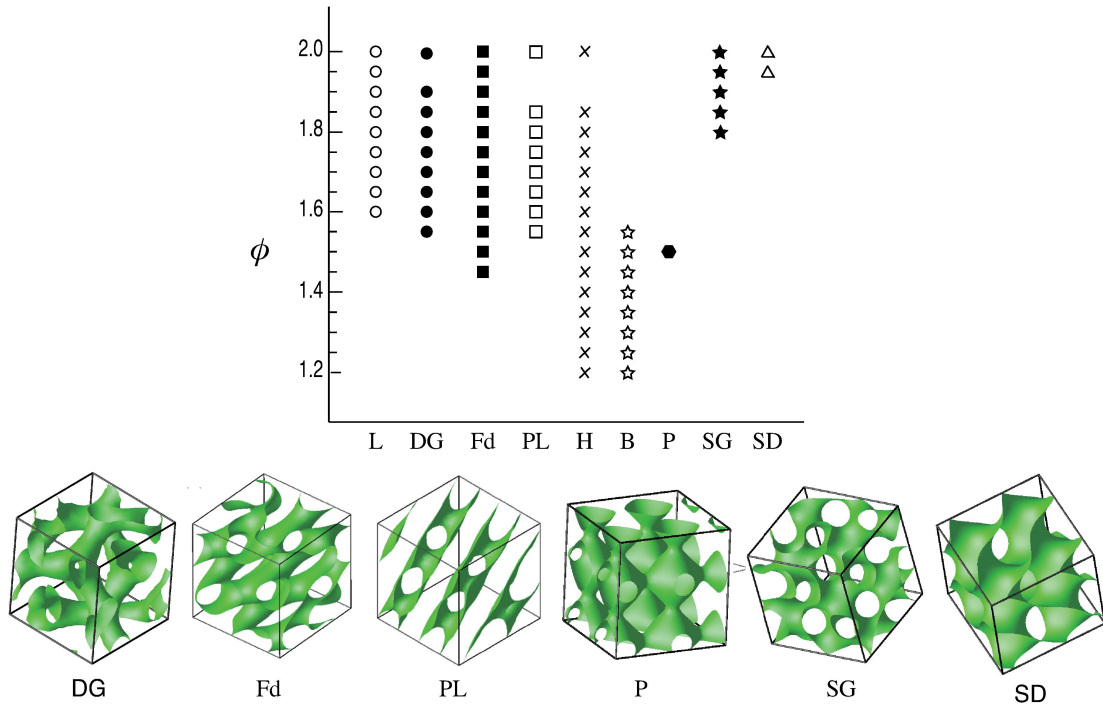


図 1: 式 (1), (2) の数値計算で得られる基本周期の Turing パターンと、それぞれの 3 次元特有パターンの等高面プロット. L, H と B はそれぞれラメラ、ヘキサゴナルシリンドラー、BCC 構造を表し、2 次元パターンから類推されるパターンである.

(u, v) の初期分布は、 (u_0, v_0) に空間相関のないホワイトノイズを加えたものを与える. また、計算ステップ毎にも空間的にも時間的にも相関の無いノイズを与えた.

ϕ , δx とステップ毎に与えるノイズの強さの 3 つのパラメーターをそれぞれ変化させ、得られた数値解として固定パターンの多様性を図 1 にまとめた. 図 1 にあるように、9 種類の省略記号で示したパターンが得られた. 省略記号 L, H, DG, Fd, PL, B, P, SG, SD はそれぞれラメラ、ヘキサゴナルシリンドラー、ダブルジャイロイド、Fddd、穴あきラメラ、BCC、P-surface、シングルジャイロイド、シングルダイヤモンド構造を示す. 文献 [6] で行った FitzHugh-Nagumo 方程式, Brusselator, Gray-Scott モデルで得られる 3 次元構造と同様の構造が得られた.

参考の為、2 次元ではどのようなパターンが得られるかを調べた. 空間サイズ $(L_x, L_y) = (N_x \times \delta x, N_y \times \delta x) = (128, 128)$, $\delta x = 0.5$ の 2 次元格子空間で、周期境界条件を課した条件のもと式 (1)-(2) の数値計算を行った. そのときの図等は省略するが、ドットパターンが $1.95 \leq \phi \leq 2.0$ と $1.20 \leq \phi \leq 1.65$ で、ストライプパターンが $1.65 \leq \phi \leq 1.95$ で、それぞれ現れた. ただし、これらの結果は u の濃度プロットしたパターンを目で判断したものである.

4 パラメータの勾配を導入したときのパターン

文献 [2] では、化学物質の濃度差のある 2 種の連続流通攪拌反応槽 (CSTR) を、ポリアクリルアミドゲルの反応セルで接続した系でパターンを観察した. このとき観察槽では、2 種類の CSTR 槽の濃度差により自然に化学物質の濃度勾配が形成される. このような実験条件をモデル化して濃度勾配のパターンに対する影響を観察するために、式 (1), (2) 中のパラメータ ϕ に勾配を導入したときのパターンを観察する.

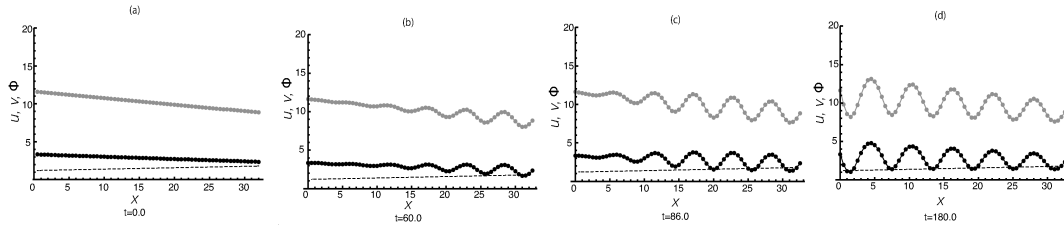


図 2: 式 (1),(2) そして, (6)-(8) を z 軸方向の 1 次元系に区切ったモデルの時間発展の様子. ただし, $\phi_{max} = 1.80$, $\phi_{min} = 1.20$ と設定した. u , v の濃度分布をそれぞれ黒色, 灰色で表した. 灰色点線は ϕ の空間勾配を表す.

4.1 z 面: Derichelet 境界条件

本セクションでは, CSTR に接する面を z 面の両端として, 化学物質濃度を固定する. そして, 反応を観察するポリアクリルアミドゲルの領域は x 面, y 面には十分広大な領域であると考え. そして, 観察層では CSTR 両槽の化学物質の濃度差の影響で化学物質の線形な勾配が自然に形成されていると考え, ϕ に z 方向の線形勾配を与える.

具体的には, 次のように設定する. 空間サイズ $(L_x, L_y, L_z) = (\delta x \times 128, \delta x \times 128, \delta x \times 64) = (64.0, 64.0, 32.0)$ を固定し, 境界条件は, z 面に対しては

$$\begin{aligned} u(t; x, y, 0) &= \frac{1 - 5\phi_{min}}{5c}, & u(t; x, y, L_z) &= \frac{a - 5\phi_{max}}{5c}, \\ v(t; x, y, 0) &= \frac{1 + u^2(t; x, y, 0)}{5u^2(t; x, y, 0)}, & v(t; x, y, L_z) &= \frac{1 + u^2(t; x, y, L_z)}{5u^2(t; x, y, L_z)}, \end{aligned} \quad (5)$$

のように Derichelet 境界条件を課した. x 面と y 面はそれぞれ周期境界条件を課した. そして, 式 (1), (2) の ϕ に対して, z 軸方向に ϕ_{min} から ϕ_{max} の線形の勾配

$$\phi(x, y, z) = \phi_{min} + (\phi_{max} - \phi_{min}) \frac{z}{L_z} \quad (6)$$

を付けた. 初期分布は, それぞれの場の $\phi(x, y, z)$ から計算される定常解の値として,

$$u_0(0; x, y, z) = \frac{a - 5\phi(x, y, z)}{5c}, \quad v_0(0; x, y, z) = \frac{1 + u_0^2(0; x, y, z)}{5u_0(0; x, y, z)} \quad (7)$$

のように与えた. このように設定した系で数値計算を行った.

3 次元空間で数値計算を行う前に, 1 次元系でのパターン形成の様子をまず見てみる. 図 2 は, 式 (1), (2) そして, (5)-(8) を z 軸方向の 1 次元系に区切ったときのモデルの時間発展の様子で, ϕ に大きな勾配 ($\phi_{max} = 1.80$, $\phi_{min} = 1.20$ で, 差が 0.5) を導入したときに形成される 1 次元空間パターンの時間発展の様子を示す. 左側から右側 (つまり, ϕ の値が大きな方から小さな方) へ順に波が形成されていくのがわかる.

それでは, 本題の 3 次元空間での数値計算結果を見てみる. 図 3 (a)-(f) は, $\phi_{max} = 1.80$, $\phi_{min} = 1.20$ に設定したときの時間発展の様子である. それぞれ, $u = 2.0$ の等高面を表示した. これを見ると, 初期パターン形成の進行具合は図 2 の 1 次元でのパターン形成と同様に ϕ の値が大きな方から小さな方へ順にパターンが形成されているのがわかる. そして, z 軸に大きな方から順に, z 軸に垂直方向な面上にスポットが現れる (図 3(a)-(c)). 形成されたスポットがつながり合って, シリンダーが 2 次元的につながりあい (図 3(c)-(d)), その後, パターンが整列する (図 3(d)-(f)).

最終パターン (図 3 (f)) を別の 3 つの方向から眺めたのが図 3(g)-(i) である. 図 3 (g) を見ると z 方向に垂直に平面が並び, 上から 2 から 4 段目には図 1 に示した PL が, その他はラメラ構造がそれぞれ配置された構造となっていることがわかる. また, 図 3 (i) を詳細に見ると, PL の穴の位置はヘキサゴナル状に配置し, その穴の直径は, z 軸に深い位置になればなるほど大きくなれば徐々に大きくなることがわかる.

今度は, ϕ の狭い範囲での空間勾配を導入したときのパターンを見てみる. 図 4 (a)-(f) は, $\phi_{min} = 1.30$ から $\phi_{max} = 1.40$ に設定したときの時間発展の様子である. それぞれ, $u = 2.0$ の等高面を表示した. 初期

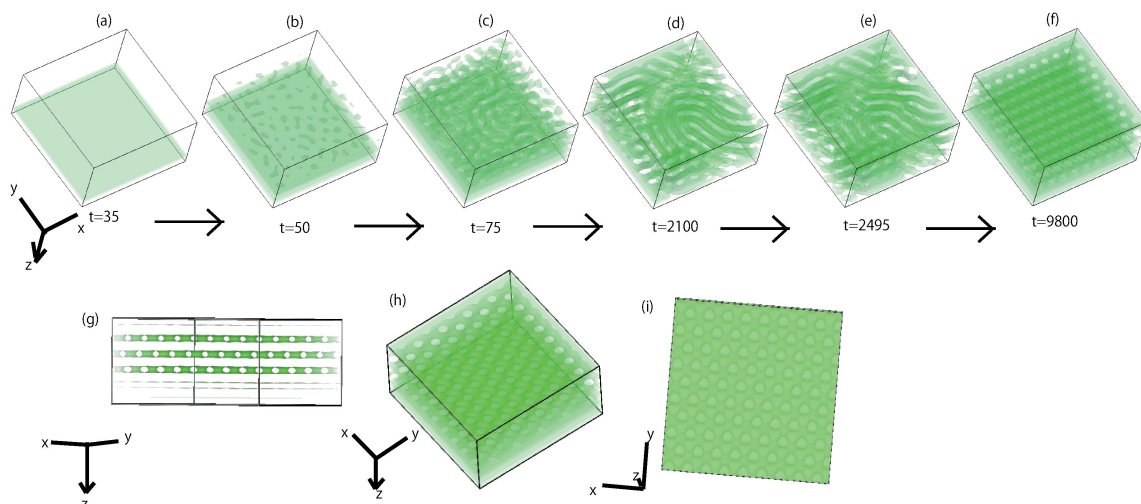


図 3: ϕ に大きな (差が 0.50) 空間勾配をつけたときに形成される空間パターン. z 軸方向に $\phi_{max} = 1.80$ から $\phi_{min} = 1.20$ の勾配をつけた. (a)-(f) パターン形成の様子. (g)-(i) 最終パターンを異なる方向から見た図. それぞれ $u = 2.0$ での等高面プロット.

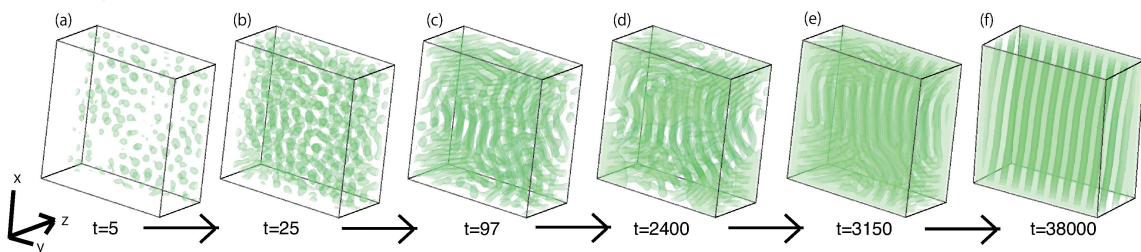


図 4: ϕ に小さな (差が 0.1) 空間勾配をつけたときに形成される空間パターン. z 軸方向に $\phi_{max} = 1.40$ から $\phi_{min} = 1.30$ の勾配をつけた. $t = 97$ までの初期のパターン形成の様子と, それ以降 $t = 38000$ までのパターンの遷移の様子をプロット. $u = 2.0$ での等高面プロットを示す.

パターン形成の進行具合は図 2 の 1 次元でのパターン形成と同様に ϕ の値が大きな方から小さな方へ順にパターンが形成されているのがわかる. そして, z 軸に大きな方から順に, z 軸に垂直方向な面上にスポットが現れる (図 4(a)-(c)). 形成されたスポットがつながり合って, シリンダーが 2 次元的につながりあい (図 4(c)-(d)), その後, パターンが整列する (図 4(d)-(f)). 最終パターンを眺めると z 方向に垂直に平面が並び, 最上面と最終面にはラメラ面が構成されている. その間には, シリンダーが z 面と垂直に並んで構造となっていることがわかる.

同様に, ϕ を $\phi_{min} = 1.60$ から $\phi_{max} = 1.80$ にして数値計算を行うと, 図は省略するが, ラメラが z 軸に垂直方向に ϕ の大きな方から小さな方へ順に形成される. このとき, 途中 PL が見られるが, 最終的にはラメラ面で構成されたものになった.

これらの結果からまとめると, z 面に Derichelet 境界条件を課すと, z 面付近にラメラを形成し, そのラメラ面の間の領域で, パラメータ領域に適合するパターンが形成されている. しかも, これらのパターンは空間勾配に対して垂直な面にラメラやシリンダー, PL といったパターンが形成されている.

4.2 z 面に Neumann 境界条件

前節では, CSTR のような濃度が固定されている槽が反応場に接しているような状況を考えた系をモデルの数値計算結果を見てきた. この節では, 仕切られたシステム内での実験系で, 反応場において外部からの光刺激を与えるような系を考える. そして, この光刺激の強度を強さを制御して, 実験槽の化学反応

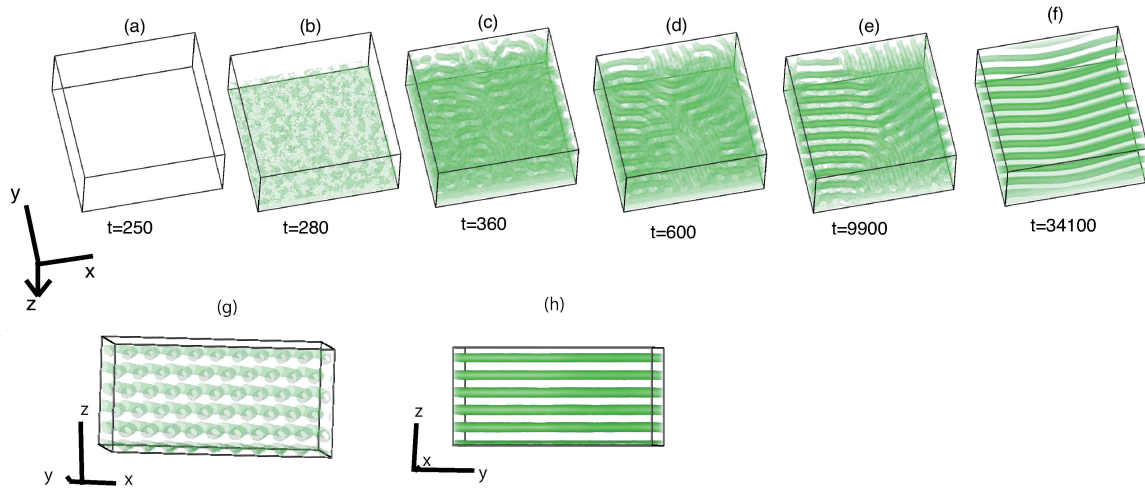


図 5: 式 (1) と (2), (6) で Neumann で Neumann 境界条件を課した系でのパターン形成の様子. $\phi_{min} = 1.20$, $\phi_{max} = 1.80$ にして, 空間勾配を大きく (差を 0.5) した. $u = 2.0$ の等高面を表す.

率をある 1 方向に空間的に変化させられるような実験系を考える. 具体的には, 空間サイズ $(L_x, L_y, L_z) = (\delta x \times 128, \delta x \times 128, \delta x \times 64) = (64.0, 64.0, 32.0)$ を固定し, 式 (1), (2) の ϕ に対して, 式 (6) のように z 軸方向にパラメータ勾配を導入する. そして, z 面の境界条件を $\partial u(t; x, y, z)/\partial z|_{z=0} = \partial u(t; x, y, z)/\partial z|_{z=L_z} = 0$, $\partial v(t; x, y, 0)/\partial z|_{z=0} = \partial v(t; x, y, z)/\partial z|_{z=L_z} = 0$ として, x 面と y 面をそれぞれ周期境界条件とする. 初期分布は, 外部刺激の光が当たっていない状況, つまり $\phi = 0.0$ のときの (u_0, v_0) の値に摂動を加えたものを与える.

前節と同様に 3 次元空間で数値計算を行う前に, 1 次元系でのパターン形成の様子をまず見てみた. 式 (1), (2), (6) を z 軸方向の 1 次元系に区切り, $\phi_{max} = 1.80$, $\phi_{min} = 1.20$ としたときのモデルの時間発展の様子を観察した. 図は省略するが, 図 2 と同じように, ϕ の値が大きな方から小さな方へ順に波が形成されていった.

3 次元空間での数値計算結果をしてみる. 図 5 (a)-(f) は, $\phi_{max} = 1.80$, $\phi_{min} = 1.20$ に設定したときの時間発展の様子である. それぞれ, $u = 2.0$ の等高面を表示した. これを見ると, 初期パターン形成の進行具合は図 2 の 1 次元系でのパターン形成と同様に ϕ の値が大きな方から小さな方へ順にパターンが形成されているのがわかる. そして, z 軸に大きな方から順に, z 軸に垂直方向な面上にスポットが現れる (図 5(a)-(c)). 形成されたスポットがつながり合って, シリンダーが 2 次元的につながりあい (図 5(c)-(d)), その後, パターンが整列する (図 5(d)-(f)).

最終パターン (図 5 (f)) を別の 2 つの方向から眺めたのが図 5(g), (h) である. 図 5 (g) を見ると z 方向に垂直に平面が並び, 上から 5 段目はシリンダーが z 軸に垂直に並んでいることがわかる. そして, (ϕ の値が大きい方の z 面に近い) 一番下の面にはラメラ構造が配置された構造となっていることがわかる. また, 図 5 (g) を詳細に見ると, シリンダーはヘキサゴナル状に配置し, その直径は, z 軸に深い位置になればなるほど大きくなれば徐々に大きくなることがわかる.

次に, $\phi_{min} = 1.30$, $\phi_{max} = 1.40$ として数値計算を行う. 図 6 のように初期パターン形成の進行具合はその他と同様に ϕ の大きな方から順に z 軸方向に垂直にシリンダーが並んだ構造になった. 時間が経つに従ってシリンダーの方向がそろってきて, 最終的に秩序の整ったシリンダーが形成された.

現在計算中であるが, $\phi = 1.70$ 周辺の値を用いて数値計算すると, Interconnected な 3 次元特有の構造が経時パターンとして見られている. パターンの収束に時間がかかるため, ここではまだ示すことができない.

Neumann 境界条件を課したときのパターンのまとめとして, (Dirichlet 境界条件のときのように) z 面付近にラメラ面を形成することは必ずしもない. また, 空間勾配に対して垂直でない面を含む Interconnected な 3 次元パターンがよく出現することからも方向性の影響が Dirichlet 境界条件を与えたときに得られるパターンより小さいように思える.

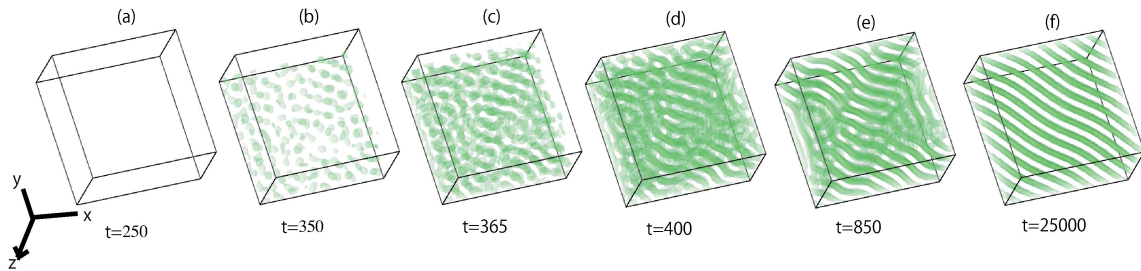


図 6: 式 (1) (2), (6) で Neumann 境界条件を課した系でのパターン形成の様子. $\phi_{max} = 1.40$ から $\phi_{min} = 1.30$ にして 0.1 の空間勾配をつけたときに形成される空間パターン. $u = 2.0$ の等高面を表す.

5 まとめと考察

LE モデルを用いてパラメータに空間勾配を導入したモデルによる 3 次元パターンの解析を行った. 図 3 や図 5 のように, 文献 [2] で見られたような化学物質の濃度勾配の方向と垂直な方向にそろったパターンがよく形成された. このパターンの方向性について, z 面に Derichelet 境界条件を導入するとほぼ必ず z 面付近でラメラ面が形成され, パターンの方向性が顕著になり, この方向性によりラメラ, PL, シリンダーがよく形成されるようである. しかし, z 面を Neumann 境界条件にすると, その影響が少なくなり, 3 次元特有のパターンが形成される可能性もあるようだ.

図 2 で示したような ϕ の値の大きな方からパターンの不安定性が起こるという遷移過程がパターンの方向性の影響が上の最終パターンの方向性に起因するのかを調べるため, ここには示していないが, 計算毎ステップ導入する空間ノイズの強度を強くして数値計算を行っている. そうするとある程度以上のノイズの強度で初期の不安定性がいろんなところで起こるようになり, 図 2 から 6 で示したような遷移過程が見られなくなる. しかし, このような場合でも, Derichelet 境界条件の場合, 最終的には z 面付近でラメラ面が形成され, その他の部分で z 面と垂直にラメラ, PL, シリンダーが形成されやすかった. Neumann 境界条件の場合は, 初期の不安定性が形成される時点から Interconnected なパターンがよく見られるようになり, z 面に垂直にパターンが制約されることが少なくなった.

本稿では, $(L_x, L_y, L_z) = (64.0, 64.0, 32.0)$ に限定して数値計算を行った結果のみを示している. が, 得られているパターンに文献 [9] でみられたような計算領域の影響がでていないかどうか調べるため, 予備的な数値計算で z 軸方向に倍のサイズである $(L_x, L_y, L_z) = (64.0, 64.0, 64.0)$ の空間で ϕ を大きくとったものも計算している. この場合でも, z 面を Derichelet 境界条件にした場合, 最終的には z 面付近でラメラ面が形成され, その他の部分で z 面と垂直にラメラ, PL, シリンダーなどが見られる. が, Neumann 境界条件の場合は Interconnected なパターンが $\phi = 1.70$ の値になる領域付近でよく形成されている. これらのことから, 本稿で採用している領域のサイズは制限を与えていないように思われる.

また注意として, パラメータ勾配を導入した空間で形成される分布は (1 次元の分布だと図 2 (d) のように) 周期分布ではない. そのため, パターンの解析について新たな解析手法が必要になる. 我々はその方法を開発しているが, ここでは紙面の都合上省略する.

数値計算法で説明した GPU も用いた計算により, CPU のみの計算と比べると 100 倍近い速さで数値計算が可能になっている. が, 本稿で考察したような実際の実験系に即するような十分広い 3 次元空間の数値計算を行うにはまだまだ時間がかかってしまう. 特に, 前章で書いたような 3 次元特有の Interconnected なパターンの収束には非常に時間がかかってしまう.

生体内部には生体分子の空間勾配やその反応の方向性によって大切な構造を作り出していることが知られている [11]. ここで紹介したような 3 次元パターンがこれらの解析に役立てば幸いである.

参考文献

- [1] A. M. Turing, Phil. Trans. R. Soc. B, **237**, 37 (1952).
- [2] V. Castets, E. Dulos, J. Boissonade, and P. De Kepper, Phys. Rev. Lett. **64** 2953 (1990).
- [3] S. Rüdiger, D.G. Míguez, A. P. Muñuzuri, F. Sagués and J. Casademunt, Phys. Rev. Lett. **90** 128301 (2003).
- [4] T. Bansagi, Jr. V. K. Vanag, I. R. Epstein, Science, **331** 1309 (2011).
- [5] J. D. Murray, "Mathematical Biology", Springer (1989).
- [6] S. Kondo, T. Miura, Science, **329** 1616-1620.
- [7] H. Shoji, K. Yamada, and T. Ohta, Phys. Rev. E, **72**, 06202(R) (2005), H. Shoji, K. Yamada, D. Ueyama, and T. Ohta, Phys. Rev. E, **75**, 046212 (2007).
- [8] I. Lengyel and I. R. Epstein, Science, **251** 650 (1991).
- [9] P. K. Moore and W. Horsthemke, Chaos, **19** 043116 (2009).
- [10] NVIDIA corporation, NVIDIA CUDA Programing guide, [http://developer.download.nvidia.com/cuda_2_1/toolkit/docs/NVIDIA_CUDA_Prgramming_Guide 2.1.pdf](http://developer.download.nvidia.com/cuda_2_1/toolkit/docs/NVIDIA_CUDA_Prgramming_Guide_2.1.pdf).
- [11] S. F. Gilbert, "Developmental Biology", Sinauer Associates Inc.,U.S.; 9th (2010).