

液層の流れの回転力による安定化

慶大 エ 長谷川英治
岩崎 安雄

鉛直壁を流れ落ちる液層の流れの発生についての実験は、機構上の容易さのためあって、円筒壁上に沿って液体を流すことにより行うのが普通である。この流れは非常に乱れ易く、乱れの発生しはじめの状況を実際に調べる事は大変困難であって、事実過去の研究でも乱れの発生する臨界レイノルズ数は1から10の範囲にちらばっている⁽¹⁾。この様な流れの線型の範囲内での安定性の計算からは、平面壁に沿う流れの臨界レイノルズ数は零であり⁽²⁾、壁面に曲率のある場合には流れは益々不安定化される⁽³⁾ことが予想されている。そんな訳で鉛直壁に沿う流れで、極く小さい乱れの範囲での実験、殊に臨界レイノルズ数を求めることはもともと無理であった様である。

一方、円筒壁に沿う流れは、化学工業上重要な工程でよく用いられている流れであり、それらの場合に工程の完全な制

御を行うには、十分性質の知られた流れ、即ち層流状態に保つことが望しい場合が多い。

ここでは円筒を回転させて、液層を円筒壁に押しつけることにより流れを安定化させ乱れの発生と初期段階の乱れの状態を調べることにした。その結果回転による流れの安定化の程度と壁面の曲率との兼ね合いの様子を線型安定論による計算とそれに対応した実験とを行い比較検討した。

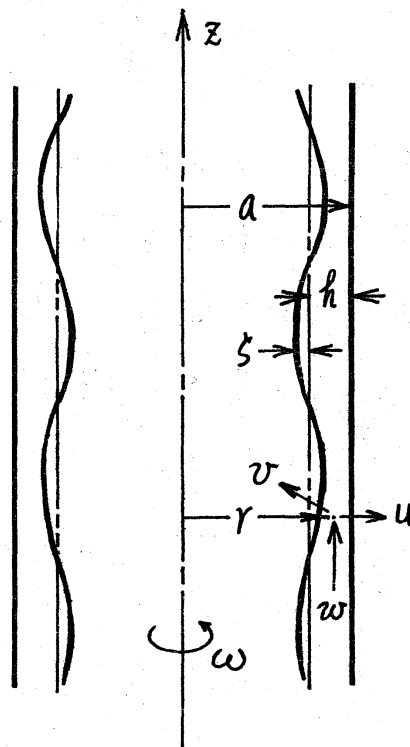
1. 基礎の流れ

回転する無限に長い鉛直円筒の内壁を重力の作用のもとに流れ落ちる液層の層流解は、回転円筒の軸を z 軸とする円筒座標 (r, θ, z) をとり、それに対応する速度成分を (u, v, w) とすれば、

$$u = 0,$$

$$v = \omega r,$$

$$w = \frac{g}{2\nu} \left\{ \frac{1}{2}(r^2 - a^2) - (a - h)^2 \log \frac{r}{a} \right\},$$



$$p = p_0 + \frac{1}{2} \rho \omega^2 \left\{ r^2 - (a-h)^2 \right\} - \frac{T}{a-h}.$$

である。ここで a : 円筒内半径, h : 液膜の厚さ, ω : 回転数, ρ : 密度, ν : 動粘性係数, g : 重力加速度, T : 表面張力係数, p_0 : 大気圧 である。なお、自由表面上での軸方向の速度の大きさを w_0 は

$$w_0 = \frac{g h^2}{2\nu} \cdot \frac{1}{\beta} \quad \text{である。}$$

ただし、

$$\frac{1}{\beta} = (k-1)^2 \log \frac{k-1}{k} - \frac{1}{2} \left\{ (k-1)^2 - k^2 \right\},$$

$$k = \frac{a}{h}.$$

2. 乱れの方程式

以下では軸対称擾乱のみに限定し、乱れのある場合の速度成分と圧力を前述の定常解と擾動量との和で表し、非圧縮、粘性流体の連続の方程式と運動方程式とに代入し、擾動量について線型化すれば、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + w \frac{\partial u}{\partial z} - 2\nu \frac{v}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) u$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left(v' + \frac{1}{r} \right) u + w \frac{\partial v}{\partial z} = \nu \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) v$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + W'u + W \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{\partial}{\partial z}(rw) = 0$$

となる。これより $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ である。

上の式に対する境界条件はまず円筒壁面上での粘着の条件

$$r = a; \quad u = v = w = 0$$

である。次に自由表面上の条件としては、面に垂直方向の力の釣合いの式

$$r = a - h; \quad p + p'\zeta = 2\mu \frac{\partial u}{\partial r} + T \left(\frac{\zeta}{(a-h)^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} \right)$$

と接線方向の釣合いの式

$$r = a - h; \quad W''\zeta + \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

$$r = a - h; \quad \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = 0$$

とである。ここで、 μ : 粘性係数, $'$: r についての微分を
示す。

長さ h で、時間 h/ω で、速度は ω_0 で、圧力は $\rho\omega_0^2$

を無次元化し.

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

なる流れ関数を導入し、 z 方向の流れの場の一様性を考慮して

$$\begin{aligned} \psi(t, r, z) &= \phi(r) e^{i\alpha(z-ct)} \\ v(t, r, z) &= \chi(r) e^{i\alpha(z-ct)} \end{aligned}$$

の形に表せば、流れについての次の方程式系を得る.

$$\begin{aligned} (W-c) \left(\phi'' - \frac{1}{r} \phi' - \alpha^2 \phi \right) - D^2 W \phi - 2\Omega r \chi \\ = \frac{1}{i\alpha R} \left\{ \phi'''' - \frac{2}{r} \phi''' - \left(2\alpha^2 - \frac{3}{r^2} \right) \phi'' \right. \\ \left. + \frac{1}{r} \left(2\alpha^2 - \frac{3}{r^2} \right) \phi' + \alpha^4 \phi \right\} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} (W-c) \chi + \frac{2\Omega}{r} \phi \\ = \frac{1}{i\alpha R} \left\{ \chi'' + \frac{1}{r} \chi' - \left(\alpha^2 + \frac{1}{r^2} \right) \chi \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

境界条件

$$r = k: \quad \phi = \phi' = \chi = 0 \quad (3)$$

$$r = k-1;$$

$$\phi''' - \frac{1}{k-1} \phi'' - \left\{ 3\alpha^2 - \frac{1}{(k-1)^2} - i\alpha R(c+1) \right\} \phi' = 0$$

$$+ \left(\frac{2\alpha^2}{k-1} + \frac{i\alpha R}{c+1} \left[\Omega^2(k-1) + S_t \left\{ \alpha^2 - \frac{1}{(k-1)^2} \right\} \right] \right) \phi = 0, \quad (4)$$

$$\phi'' - \frac{1}{k-1} \phi' + \left(\alpha^2 + \frac{2\beta}{1+c} \right) \phi = 0, \quad (5)$$

$$\chi' - \frac{1}{k-1} \chi = 0. \quad (6)$$

ここで、' は r についての微分、 $D^2 = \partial^2 / \partial r^2 - 1/r \cdot \partial / \partial r$,
 $W = \{ (r^2 - k^2) / 2 - (k-1)^2 \log(r/k) \} \beta$, $\Omega = \omega h / \omega_0$,
 $R = \omega_0 h / \nu$, $S_t = T / \rho \omega_0^2 h$, α : 波数, c : 位相速度を
 表す。

上式で回転のない場合には ($\Omega = 0$), ϕ の方程式は円筒
 内壁に沿う流れの方程式系に一致する⁽³⁾。

3. 平面壁の場合

液層の厚さに対し、円筒半径が非常に大きい場合には ($k \rightarrow \infty$), (1), (3), (4), (5) は

$$(W - c)(\phi'' - \alpha^2 \phi) - W'' \phi = \frac{1}{i\alpha R} (\phi'''' - 2\alpha^2 \phi + \alpha^4 \phi),$$

$$\phi''' - \{ 3\alpha^2 - i\alpha R(1+c) \} \phi' = 0$$

$$+ \frac{i\alpha R}{1+c} \left(\frac{2}{R} \gamma + S_t \alpha^2 \right) \phi = 0, \quad (\text{自由表面上で})$$

$$\phi'' + \left(\alpha^2 + \frac{2}{1+c} \right) \phi = 0,$$

$$\phi = \phi' = 0 \quad (\text{円筒壁上で})$$

となり、これは傾斜角 $\theta = \cot^{-1}(\gamma)$ なる斜面を重力のもとに流れ落ちる液層の流れの方程式系と全く同じである⁽⁴⁾。但し、 $\gamma = \omega^2 a / g$ である。即ち、遠心力と重力とを斜面に垂直方向への重力の成分と接線方向への成分でそれぞれ置きかえたものに等しい。従って、この場合の臨界レイノルズ数 R_c は

$$R_c = \frac{5}{4} \gamma \quad (7)$$

となる。

4. レイノルズ数が小さい場合

遠心力と表面張力とを表わす無次元量 Ω と S_t とはそれぞれレイノルズ数 R により

$$\Omega^2 = \frac{\omega^2 h^4}{\nu^2} \cdot \frac{1}{R^2}, \quad S_t = \frac{T h}{\rho \nu^2} \cdot \frac{1}{R^2}$$

の様に書き換えられる。従って、 R の逆中で展開する = により固有値問題を解いたものとは、固有値はもっとも次数

の低い、自由表面での垂直方向の力の釣り合い式の最後の項より

$$\frac{\omega^2 h^4}{v^2} (k-1) + \frac{T h}{\rho v^2} \left\{ \alpha^2 - \frac{1}{(k-1)^2} \right\} = 0$$

となり、臨界波数 α_c が

$$\alpha_c = \frac{1}{k-1} \sqrt{1 - \Gamma} \quad (8)$$

$$\text{ただし、} \quad \Gamma = \frac{\rho \omega^2 (a-h)^3}{T}$$

となる。ここで $\Gamma = 0$ とすれば、回転のない円筒壁に沿う流れの場合に一致する³⁾。回転の効果は自由表面での遠心力と表面張力の比 Γ で表され、回転数の増大は臨界波数を小さくし、 $\Gamma = 1$ で中主曲線は $\alpha-R$ 面の厚さを通りことになる。

5. 波数が小さい場合

波数 α で

$$\phi = \phi_0 + \alpha \phi_1 + \alpha^2 \phi_2 + \dots$$

$$\chi = \chi_0 + \alpha \chi_1 + \alpha^2 \chi_2 + \dots$$

$$c = c_0 + \alpha c_1 + \alpha^2 c_2 + \dots$$

の様に展開すれば、零次近似の式として

$$\phi_0'''' - \frac{2}{r} \phi_0'''' + \frac{3}{r^2} \phi_0'' - \frac{3}{r^3} \phi_0' = 0$$

$$\chi_0'' + \frac{1}{r} \chi_0' - \frac{1}{r^2} \chi_0 = 0$$

$$r = k-1 ;$$

$$\phi_0'''' - \frac{1}{k-1} \phi_0'' + \frac{1}{(k-1)^2} \phi_0' = 0$$

$$\phi_0'' - \frac{1}{k-1} \phi_0' + \frac{2\beta}{1+c_0} \phi_0 = 0$$

$$\chi_0' - \frac{1}{k-1} \chi_0 = 0$$

$$r = k ;$$

$$\phi_0 = \phi_0' = \chi_0 = 0$$

を得る。この解は

$$c_0 = -2 \tag{9}$$

$$\phi_0 = \frac{k^2}{2} - \frac{2 \log k + 1}{2} r^2 + r^2 \log r \tag{10}$$

$$\chi_0 = 0 \tag{11}$$

である。

(11) 式より、第一近似では χ に関係なく ϕ は

$$\begin{aligned} \phi_1'''' - \frac{2}{r} \phi_1'''' + \frac{3}{r^2} \phi_1'' - \frac{3}{r^3} \phi_1' \\ = iR \left\{ (W - c_0) \left(\phi_0'' - \frac{1}{r} \phi_0' \right) - D^2 W \phi_0 \right\} \end{aligned}$$

$$r = k - 1 :$$

$$\begin{aligned}\phi_1''' - \frac{1}{k-1} \phi_1'' + \frac{1}{(k-1)^2} \phi_1' \\ = -iR(c_0+1) \phi_0' - \frac{iR}{c_0+1} \left[\Omega^2(k-1) + S_+ \left\{ \alpha^2 - \frac{1}{(k-1)^2} \right\} \right] \phi_0.\end{aligned}$$

$$\phi_1'' - \frac{1}{k-1} \phi_1' + \frac{2\beta}{1+c_0} \phi_1 = \frac{2\beta c_1}{(1+c_0)^2} \phi_0.$$

$$r = k :$$

$$\phi_1 = \phi_1' = 0$$

から決定される。この方程式系は比較的複雑なため、 k の逆
中で諸量を展開し、液層が薄い場合について調べてみた。そ
の結果、 k^2 の程度の近似で、

$$\begin{aligned}c_1 = \frac{iR}{3} \left\{ 2 \left(\frac{4}{5} - \frac{\sigma}{R} \right) + \frac{1}{3k} \left(\frac{4\sigma}{R} - \frac{11}{7} \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{45k^2} \left(\frac{\sigma}{R} + \frac{83}{14} \right) \right\} \quad (12)\end{aligned}$$

を得た。(9)式と(12)式より、臨界レイノルズ数 R_c をお
めると

$$R_c = \frac{5}{4} \left(1 - \frac{19}{56} \frac{1}{k} - \frac{829}{47040} \frac{1}{k^2} \right) \sigma \quad (13)$$

となる。これより、第一項は平面壁(7)式に一致し、⁽⁵⁾曲率は
流れを不安定化することになる。

6. 一般の場合

任意の波数、レイノルズ数の場合には、自由表面と円筒壁面上より各々三個ずつの独立な級数解を作り、液層の中央でそれ等の線型結合により表された解がなめらかに接続するための条件、即ち、適合性の条件より数値的に中立曲線を得た。

7. 計算の結果

20°Cの水の場合を例にとり、計算した中立安定曲線を図

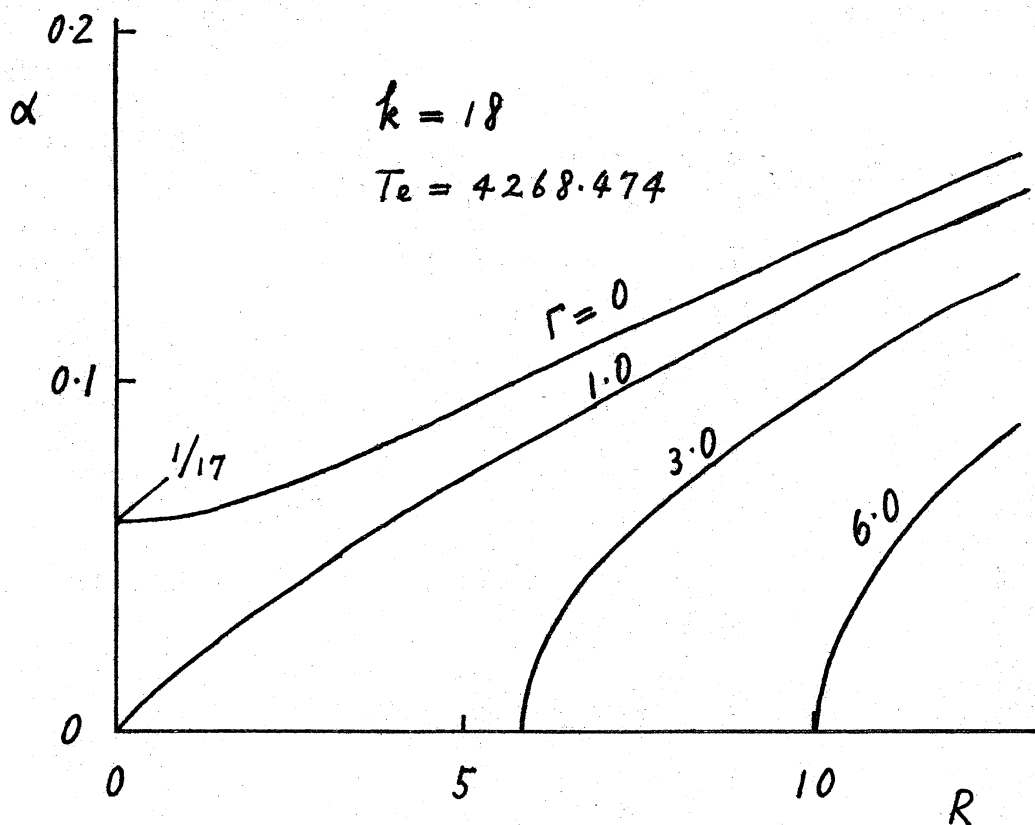


図 - 1

-1, 図-2に示す。曲線の上方が安定領域、下方が不安定領域である。ただし、 T_e は $S_t = T_e \beta^{1/3} / R^{5/3}$, $T_e = T/\rho \cdot (2/g\nu^4)^{1/3}$ である。それ等に対する位相速度のグラフが図-3, 図-4である。

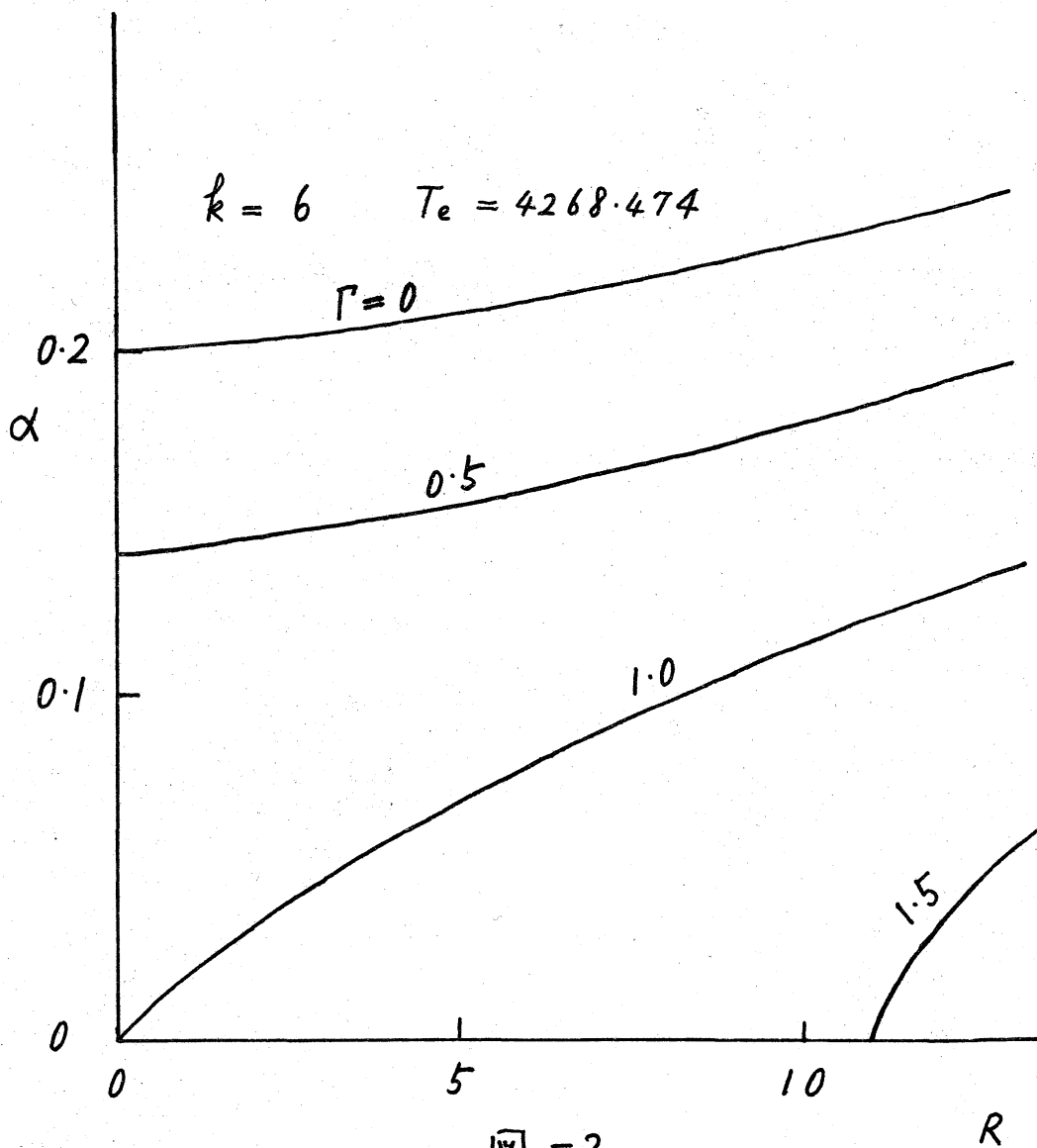


図-2

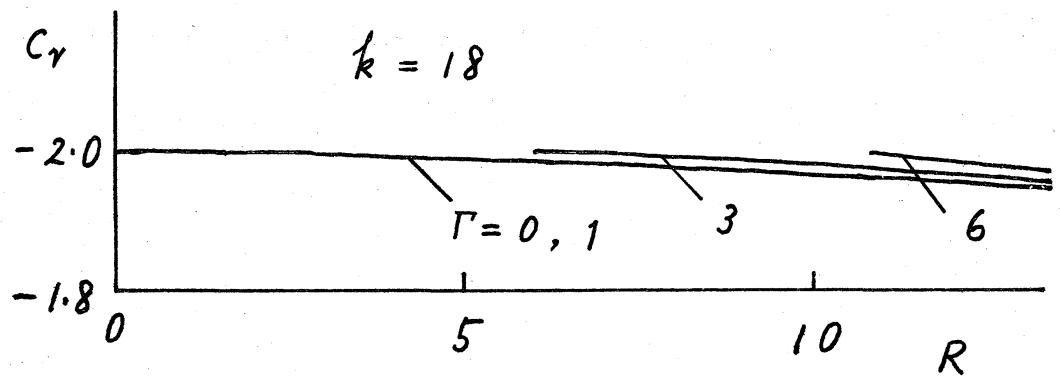


図 - 3

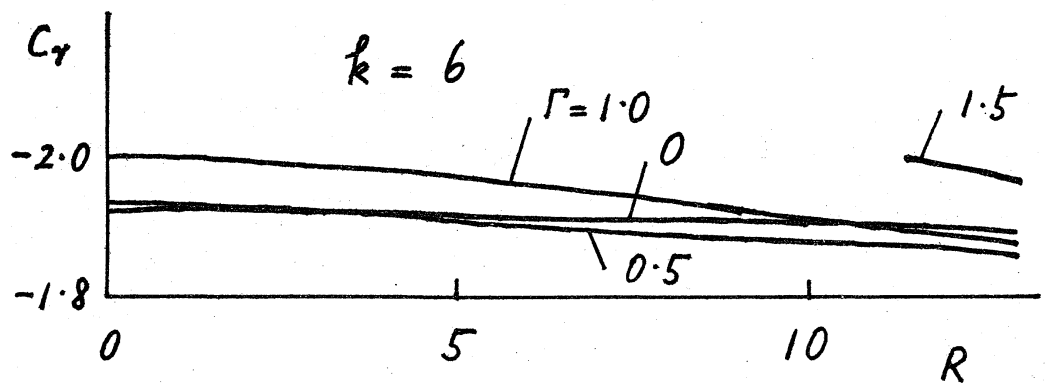
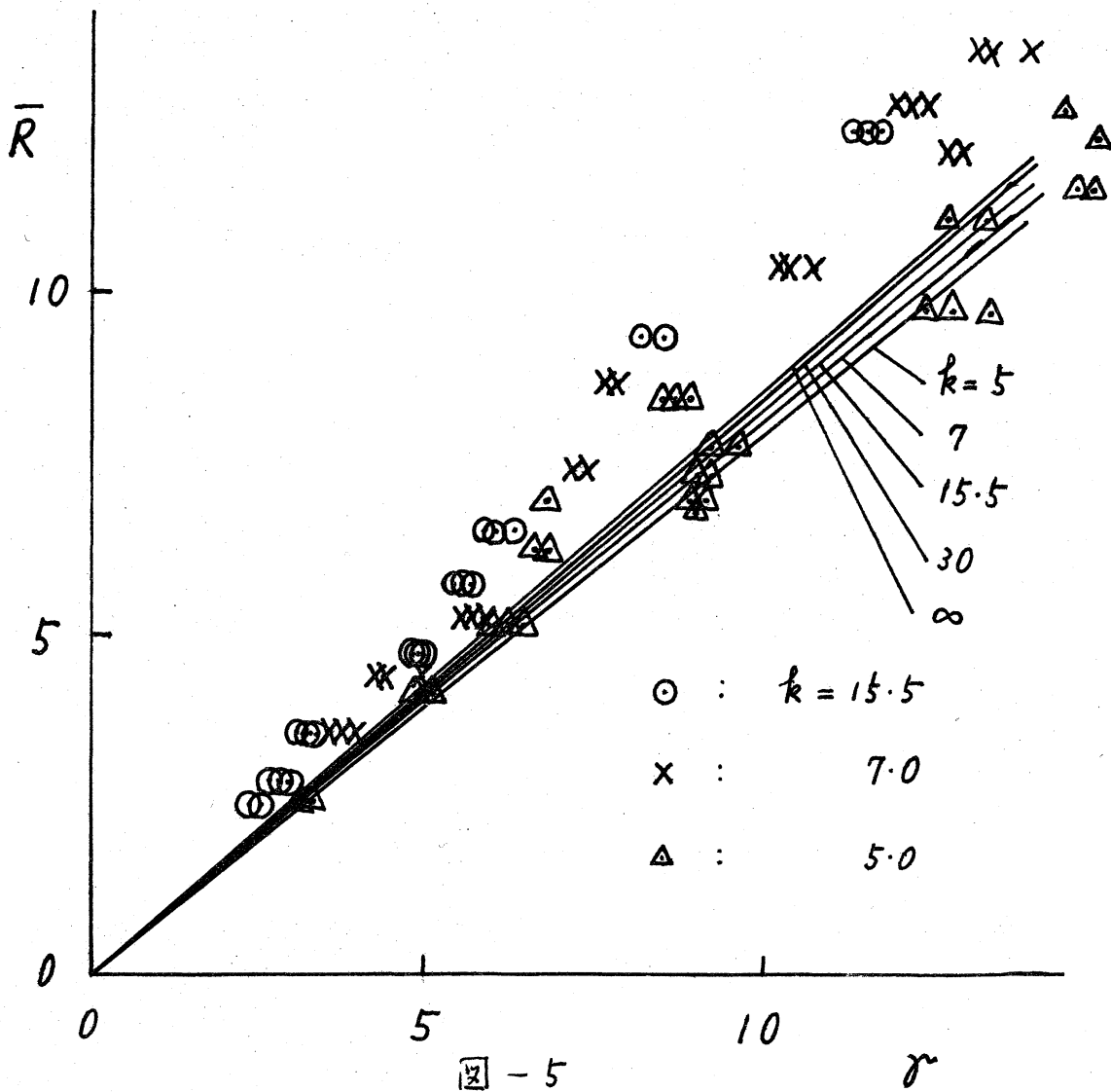


図 - 4

8. 実験との比較

上記の計算値と実験の流れでの値を比較するため、色々な濃度のグリセリン水溶液を用い、二種類の円筒パイプ（半径 0.93 cm , 2.3 cm ）にて、回転数 $\omega = 10 \sim 1300$ r.p.m, 流量 $Q = 0.5\text{ cc/s} \sim 15\text{ cc/s}$ の範囲で実験を行った。流れの存在の確認は液層に平行光線を透過させ、その影の濃淡のあるなしにより判定した。臨界状態はある一定流量の下で、回転数を上げたり下げたりしながら、前述の影

が消える点を求めた。その様にして得た臨界レイノルズ数と回転数を表す $\gamma = \omega^2 a / g$ との関係を示したのが図-5である。図中の実線は計算値、式(13)を種々の k について描いたものである。ただし、ここで用いたレイノルズ数は液層にわたっての平均流速をもとにして表してある。実験値は曲率の影響を示し、曲率が大きい程流れが不安定となることが



認められる。その曲線の勾配は計算値よりも大きく、より安定側になっているが、比較的よく一致している。実験値は回転を小さくすれば、臨界レイノルズ数は直線的に小さくなることを示し、この実験では最低の臨界レイノルズ数として、

2~3までであるが、うまく回転数を選べながら減少をせれば、薄い液層の場合、臨界レイノルズ数は零になるのではないかとと思われる。なお、波の位相速度についても同時に測定を行ったが、いずれの場合にも位相速度は2.0の付近にほとんど差異が認められない程度に集中する。

以上のことより、線型の範囲の計算でも比較的よく現象を説明することが出ることが知られた。

文献

- (1) A.M. Binnie, J. Fluid Mech. 2 (1957), 551
- (2) T.B. Benjamin, J. Fluid Mech. 2 (1957), 554
- (3) E. Hasegawa and C. Nakaya, J. Phys. Soc. Japan 29 (1970), 1634
- (4) C.S. Yih, Phys. Fluids, 6 (1963), 321
- (5) G.S.R. Sarma, P.C. Lu and S. Ostrach, Phys. Fluids 14 (1971), 2265