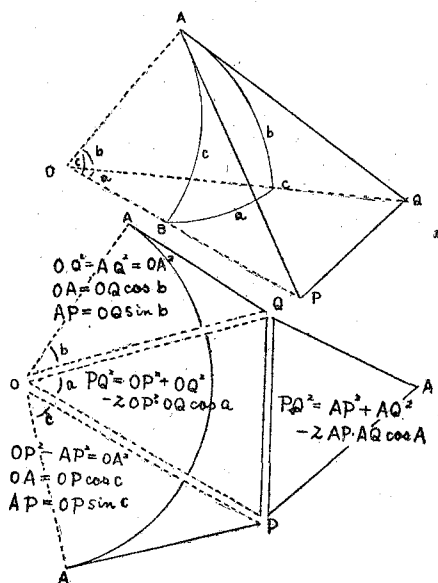


月蝕の豫報計算 (2)

Predictions of Lunar Eclipse.

熊 切 一 男 *K. Kumakiri.*

扱て、第5圖は球面上の三角形を抜き出して、中心と結んだものである。各頂點上に、相隣る二つの弧に依つて出来る角を、球面三角形の“角”と云ひ、つぎの頂點と中心とを結んで出来る角を“邊”と云ふ。圖の様に A, B, C で角を、 a, b, c で邊を表すものと定める事にしよう。平面三角形の餘弦法則とは、 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ である事は、御承知であらう。これを利用して、球面上の餘弦法則は、次の如く導き得る。今は判り良い様に、球面三角形を切り開いて考へる事にしよう。



第 5 圖

 $\triangle OPQ$ に於て

$$PQ^2 = OP^2 + OQ^2 - 2OP \cdot OQ \cos a \dots \dots (1)$$

又 $\triangle APQ$ に於て

$$PQ^2 = AP^2 + AQ^2 - 2AP \cdot AQ \cos A \dots \dots (2)$$

(1) - (2)

$$(OP^2 - AP^2) + (OQ^2 - AQ^2) - 2OP \cdot AQ \cos a + 2AP \cdot AQ \cos A = 0 \dots (3)$$

然るに、圖にも記した如く

$$OP^2 - AP^2 = OQ^2 - AQ^2 = AO^2$$

$$OA = OP \cos c = OQ \cos b,$$

$$OA^2 = OP \cos c \cdot OQ \cos b$$

$$AP = OP \sin c, \quad AQ = OQ \sin b$$

なる事に注意して變形すれば

$$2OP \cdot OQ \cos b \cos c - 2OP \cdot OQ \cos a + 2OP \cdot OQ \sin b \sin c \sin A = 0 \dots (4)$$

兩邊を $2OP \cdot OQ$ で除して、整頓すれば、次の如くなる。

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \dots \dots (5)$$

此の式は、球面三角法の公式中、最も重要なものであつて、此れ一つ覚えてゐるだけでも、非常に便利である。

§6. 月蝕方程式 餘弦法則が理解出来れば、此れから月蝕の計算に必要な基本方程式を求める事は容易である。

月と陰影の中心との會合、即ち月が太陽の赤經對衡に極めて接近した時刻 T に於て、

α_l, δ_l : 月の中心の赤經, 赤緯

α_s, δ_s : 陰影中心の赤經, 赤緯

L : 月と陰影中心との間の距離

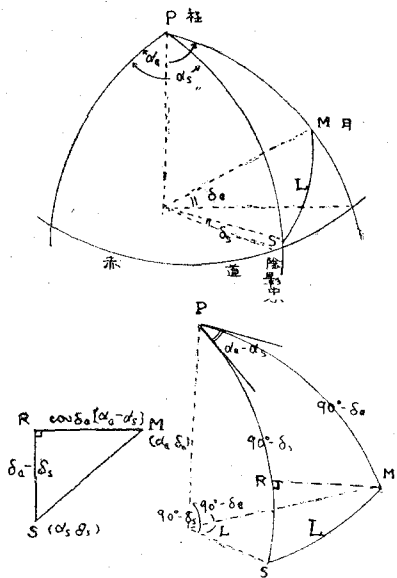
と置く。

L に就いては、後言しなければならないが、勿論、角度で計られた値であつて球面三角形の邊に當るものである。今、此れ等の關係を良く判らせる爲に、第6圖を書いてみた。第6圖から球面三角形 PMS を抜き出すと、その下の圖の如くなる譯である。併し對衡に非常に近い時刻故、 $\alpha_l - \alpha_s$ は非常に小さく、極めて零に近いのであるが、理解を助ける爲に擴大して書いてある。此の圖と前節の第5圖と比較する事に依つて、容易に餘弦法則を應用して、 $\cos L$ を求める事が出来よう。

即ち、球面三角形 PMS に於て

$$\begin{aligned}\cos L &= \cos(90^\circ - \delta_l) \cos(90^\circ - \delta_s) \\ &+ \sin(90^\circ - \delta_l) \sin(90^\circ - \delta_s) \cos(\alpha_l - \alpha_s) \\ &= \sin \delta_l \sin \delta_s \\ &+ \cos \delta_l \cos \delta_s \cos(\alpha_l - \alpha_s) \cdots (1)\end{aligned}$$

となる。然るに、前述した通り、 $\alpha_l - \alpha_s$ は非常に小さい角故、球面三角形 PMS は極めて平面三角形に近い形状をしてゐると云ひ得る。故に、平面三角法の二倍角の公式を利用すれば



第 6 圖

$$\cos L = \cos 2\left(\frac{L}{2}\right) = 1 - 2 \sin^2 \frac{L}{2}$$

$$\cos(\alpha_l - \alpha_s) = \cos 2\frac{(\alpha_l - \alpha_s)}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha_l - \alpha_s}{2}$$

$$\cos(\delta_l - \delta_s) = \cos 2\frac{\delta_l - \delta_s}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\delta_l - \delta_s}{2}$$

となり、(1)式に代入して行けば

$$\begin{aligned}
 1 - 2 \sin^2 \frac{L}{2} &= \sin \delta_l \sin \delta_s + \cos \delta_l \cos \delta_s \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha(-a_s)}{2} \right) \\
 &= \sin \delta_l \sin \delta_s + \cos \delta_l \cos \delta_s - 2 \cos \delta_l \cos \delta_s \sin^2 \frac{\alpha(-a_s)}{2} \\
 &= \cos(\delta_l - \delta_s) - 2 \cos \delta_l \cos \delta_s \sin^2 \frac{\alpha(-a_s)}{2} \\
 &= 1 - 2 \sin^2 \frac{\delta_l - \delta_s}{2} - 2 \cos \delta_l \cos \delta_s \sin^2 \frac{\alpha(-a_s)}{2} \\
 \text{故に, } \sin^2 \frac{L}{2} &= \sin^2 \frac{\delta_l - \delta_s}{2} - \cos \delta_l \cos \delta_s \sin^2 \frac{\alpha(-a_s)}{2} \dots\dots\dots(2)
 \end{aligned}$$

と變形される。尙、平面三角法の公式に依れば

$$\cos \delta_l \cos \delta_s = \frac{1}{2} \cos(\delta_l + \delta_s) + \frac{1}{2} \cos(\delta_l - \delta_s) \dots\dots\dots(3)$$

である。此の式に於て、 $\delta_l - \delta_s$ は極めて零に近い角故、 $\cos(\delta_l - \delta_s) \doteq \cos 0^\circ = 1$ なる事に注意すれば、(3)式は

$$\begin{aligned}
 \cos \delta_l \cos \delta_s &\doteq \frac{1}{2} \cos(\delta_l + \delta_s) + \frac{1}{2} \\
 &\doteq \frac{1}{2} \cos 2 \frac{(\delta_l + \delta_s)}{2} + \frac{1}{2} \\
 &\doteq \frac{1}{2} \left\{ 2 \cos^2 \frac{\delta_l + \delta_s}{2} - 1 \right\} + \frac{1}{2} \\
 &\doteq \cos^2 \frac{\delta_l + \delta_s}{2}
 \end{aligned}$$

となり、此の關係を、(2)式に代入すれば

$$\sin^2 \frac{L}{2} = \sin^2 \frac{\delta_l - \delta_s}{2} + \cos^2 \frac{\delta_l + \delta_s}{2} \sin^2 \frac{\alpha(-a_s)}{2} \dots\dots\dots(4)$$

然るに、 $\frac{L}{2}$ 、 $[\delta_l - \delta_s]$ 及び $[\alpha(-a_s)]$ は非常に小さい角故、(4)式は次の如く變形される。但し $\delta' = \frac{\delta_l + \delta_s}{2}$ である。

$$L^2 = [\delta_l - \delta_s]^2 + \cos^2 \delta' [\alpha(-a_s)]^2 \dots\dots\dots(5)$$

併し、此の式は、決して此んなに苦勞する迄もなく、實は容易に幾何學的に求め得るのであつて、本來の目的——全べての人に樂に判つて頂く爲には、その方法を取る方が賢明だつたかも知れない。即ち、第6圖の M がら PS に垂線 MR を下せば、三角形 MRS は極めて小いから、平面の直角三角形と考へ得る。故に、ピタゴラスの定理に依り、次式が得られる譯である。

$$L^2 = RS^2 + RM^2 = [\delta_l - \delta_s]^2 + \left\{ \cos \delta_l [\alpha(-a_s)] \right\}^2 \dots\dots\dots(6)$$

但し、注意すべきは、赤緯の差は、 1° は 1° として、何れの部分も等しいが、

赤經の 1° 或は 1^h は、赤緯の餘弦に比例して變化する事である。今、(6)式を(5)式に比べると、 $[a_l - a_s]^2$ の項に、前の理に依つて、夫々赤緯の餘弦が乗ぜられてゐるが、一方は $\cos \frac{\delta_l + \delta_s}{2}$ であり、片方には $\cos \delta_l$ が掛けられてゐるので、實際の計算に當つて、何れを採用すべきか、問題と成る譯である。勿論理論上は前者が正しいのであらうが、二者の差は微々たるものでもあらうし、後者の方が便利でもあるから、月そのものゝ赤緯を今後の計算には用ひることとする。

扱て、今、方程式の中に用ひられてゐる量は對衝の時刻に近い時刻 T に於ける状態の値を示すものを考へてゐるのであるが、併し、 T から微小時間 t だけ變化しても、上の關係式は成立すると考へても、(t が小なる間は)一向に差支へない譯である。扱て、

μ_l, μ_s : 月及び陰影の一時間に就いての赤經に於ける運動。

ν_l, ν_s : 月及び陰影の一時間に就いての赤緯に於ける運動。

と定めると、時刻が T から $T+t$ に變化するに對して、月及陰影の座標は次の位置に移る事に成る。

$\delta_l + \mu_l \cdot t, a_l + \nu_l \cdot t$ t 時間後の月の座標。

$\delta_s + \mu_s \cdot t, a_s + \nu_s \cdot t$ t 時間後の陰影座標。

故に、 T から t だけ相違した時刻 $T+t$ に於ける關係式は次の如くなる。

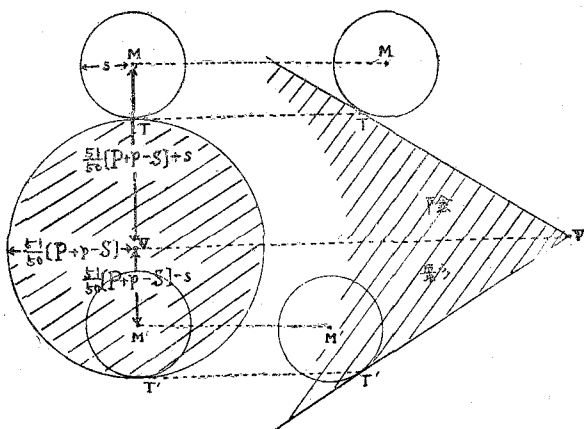
$$L^2 = [(\delta_l + \delta_l \cdot t) - (\delta_s + \mu_s \cdot t)]^2 + \cos^2 \delta_l [(a_l + \nu_l \cdot t) - (a_s + \nu_s \cdot t)]^2 \\ = [\delta_l - \delta_s + (\mu_l - \mu_s)t] + \cos^2 \delta_l [a_l - a_s + (\nu_l - \nu_s)t]^2 \quad \dots\dots\dots (7)$$

此處で、式を簡単にする爲に、 $\mu_l - \mu_s = \mu, \nu_l - \nu_s = \nu$ と置けば、 μ, ν は月の陰影中心に對する相對運動の、一時間に就いての量を表す。即ち、(7)式は

$$L^2 = [\delta_l - \delta_s + \mu \cdot t]^2 + \cos^2 \delta_l [a_l - a_s + \nu \cdot t]^2 \quad \dots\dots\dots (8)$$

となる。此の方程式を“月蝕方程式”と呼ぶ事にしよう。扱て、計算に依つて求め様としてゐるのは、各位相の時刻故、 t を求めんとする時刻に關係附ける事が出來るとすれば、月蝕方程式を解いて求めた根は、 T に加減すべき値と成る譯である。月蝕方程式中、 t と L 以外は皆、既知の量であるから、 L が判れば、 t は唯一の未知數となる。故に、方程式は解き得る。次節では、 t を考へてみる事としよう。

§7. 月と陰影中心間の距離 前述した如く、月蝕方程式を t に就いて解く爲には、 L が既知量となれば、充分である。併し、都合の良い事には、或る特別な場合、 L は容易に求め得られるのである。即ち、第7圖に見られる様に、初虧或は復圓の場合には、月と陰影中心との間の距離 L は、陰影の視半徑に月の視半徑を加へた値と成る事は、容易に判る。又、蝕既或は生光の場合は、



第 7 圖

ては $\frac{1}{50}$, $\frac{1}{60}$ 又は $\frac{1}{75}$ を採用して、一定してゐないが、今は $\frac{1}{50}$ を加算する事としよう。即ち、實際計算には L として、次の値を使用する。

$$\text{初虧, 後圓: } L_1 = VM = VT + TM = \frac{51}{50} (P+p-S) + s$$

$$\text{蝕既, 生光: } L_2 = VM' = VT' - T'M' = \frac{51}{50} (P+p-S) - s$$

III. 月蝕方程式の解法

§8. 方程式の解法 前節の考察で、 L の値も求められた譯であるから、月蝕方程式は、 t を唯一の未知数とする二次方程式となる。今、若し此の式を解く事が出来るとすれば、此の根は各位相の時刻を求める爲に、對衝の時刻に加減すべき時間を示す値と考へ得る。

扱て、月蝕方程式を解く手段として、少し工夫をする事にし様。各位相の場合でも同様であるが、今は初虧の場合に就いて考へてみる。第8圖は、これから述べんとする諸量の關係圖である。陰影の中心 V を通る子午線 VO を、假に“陰影子午線”と呼ぶ事にしよう。IN は月の天球上に於ける運動徑路を、大圓は陰影、小圓は月を表すものとする。次に、補助量 m, M, n, N, Q を、下の如く定める。

m : 時刻 T に於ける月と陰影中心間の距離 (VO)。

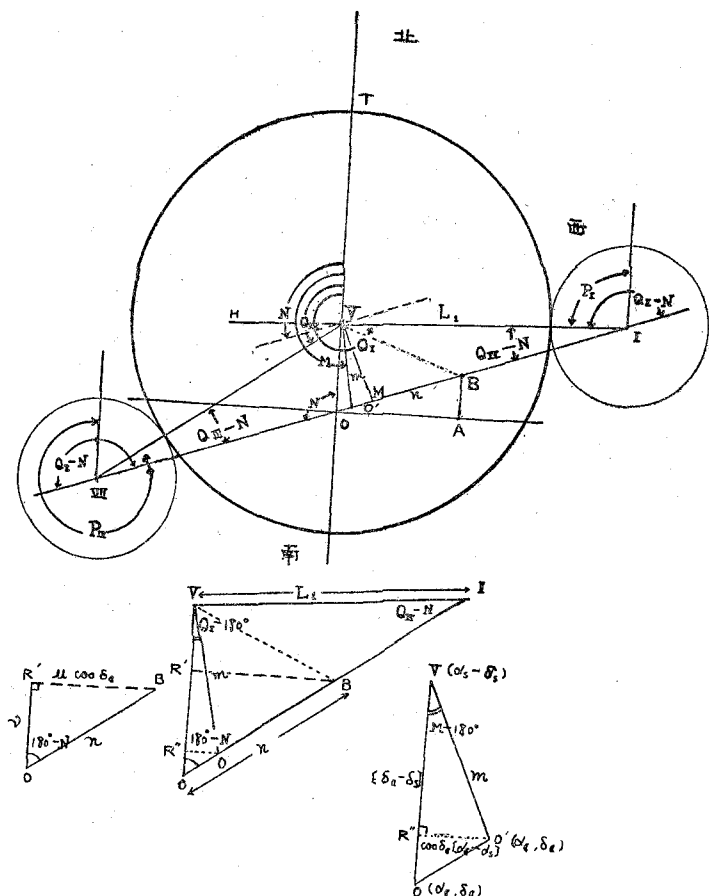
M : m と陰影子午線となす角 ($\angle TVO$)。

n : 陰影中心を原點とする月一時間の相對的運動 (BO)。

N : 陰影子午線と月の徑路となす角 ($\angle TON$)。

Q : 月が陰影に外切或は内切した時、陰影子午線と月及陰影の各中心を結ぶ線分のなす角。各位相に依つて異なるから夫々 $Q_I, Q_{II}, Q_{III}, Q_{IV}$ の別を規定する。

陰影の視半径から月の視半径を引き去つた値と成る。此の陰影の視半径は、§4 月蝕の起る條件のii)で求めた $\angle CEV$ に當る譯であるが、實際は空氣に依つて擴大されるので、幾何學的に求めた値より幾分大きくしなければならない。此の加算量として、人に依つ



第 8 圖

扱て、月蝕方程式解法の準備として、上の諸量を使つて、次の如く置いてみる。

$$m \sin M = [a(-a_s)] \cos \delta_1 \dots\dots\dots (1) \quad n \sin N = \mu \cos \delta_1 \dots\dots\dots (2)$$

$$m \cos M = \delta_1 - \delta_s \dots\dots\dots (3) \quad n \cos N = \nu \dots\dots\dots (4)$$

此れ等の式の幾何學的な意味は、第8圖の分解圖から容易に判ると思ふ。尤も對衝の時刻には、 m は VO に重つて了ふのであるが、圖は理解し易い様に、故意に誇張したものである。即ち、對衝に極めて近い時刻 T では、 VO と m とは殆んど一致してゐるのであるから、 M は 180° か、又は 0° に定つてゐるのである。此の際、すべて、角度は陰影子午線の北から東に正として計るものとする。今迄の注意から、 O 點と O' 點とは殆んど一致してゐるのであるが、理

解を助ける爲に、圖の如く書くと、(1) (2) の式は $\triangle VO'R''$ から、(3) (4) の式は $\triangle BR'O$ から容易に求められる譯であるが、圖から求めた場合は、 $M - 180^\circ$, $180^\circ - N$ の正弦も餘弦も、正負を考へない鋭角内の話であるが、勿論 180° を加へたり、減じたりする事に依り、一般の角の上の關係式を得る事が出来る。

扱て、上の四式を月蝕方程式に代入すると、方程式は次の如く分解される。

$$L_2 = [\delta_c - \delta_s + \nu t]^2 + \left\{ \cos \delta_c [a_c - a_s + \mu t] \right\}^2$$

$$L^2 [\cos^2 Q + \sin^2 Q] = [m \cos M + n \cos N \cdot t]^2 + [m \sin M + n \sin N \cdot t]^2$$

$$\text{即ち } L \sin Q = m \sin M + n \sin N \cdot t \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$L \cos Q = m \cos M + n \cos N \cdot t \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\text{扱て } (5) \times \cos N \text{ は } L \sin Q \cos N = m \sin M \cos N + n \sin N \cos N \cdot t$$

$$\begin{aligned} -) (6) \times \sin N \text{ は } L \cos Q \sin N &= m \cos M \sin N + n \cos N \sin N \cdot t \\ L \sin (Q - N) &= m \sin (M - N) \quad \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

$$\text{次に } (5) \times \sin N \text{ は } L \sin Q \sin N = m \sin M \sin N + n \sin^2 N \cdot t$$

$$\begin{aligned} +) (6) \times \cos N \text{ は } L \cos Q \cos N &= m \cos M \cos N + n \cos^2 N \cdot t \\ L \cos (Q - N) &= m \cos (M - N) + nt \quad \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

此れで方程式は解けたのであるから、次に此れ等の式から得られる所期の量を求める。但し數値を求める場合は、常に m, n は正とする、(つゞく)

田 上 天 文 臺 通 信

七月中旬には第2ドーム内に Faure-Brandt の振子時計を装置した。これは標準としてのみならず、一種の裝飾としても、室内を賑はしてゐる。點鐘の音が餘りに大きいので、深夜の近隣を驚かしはせぬかと心がかりである。地下室に又水が漏り出したので目下修理中。七月下旬には、三伏の炎天下、第1ドーム内のエリソン機を取り去つて、そこへ15センチのアストログラフを装置した。室が小さいので、非常な無理である。しかし、屋根の一部を切り取つたりして、とにかく、15センチ筒と、13センチ・カメラと、露帽と、全部を附けたまゝ、屋根の開閉が出来るやうになつた。實に不思議である。あたかも、最初から此の第1ドームを此の器械の装置のために設計したのかと思はれるほど、精密に据え付けが完了した。その代りに、地平に近い星や、天頂の星を見るためには、大變な勞苦である。何れ大東亞の新世界が開かれる時期には、これは第3ドームに収めなければならないものである。(1943-8-10)