

Stochastic Resonance について

— Harmonic Noise による Stochastic Resonance —

京都大学工学研究科数理工学教室
五十嵐 顕人, 勝尾 茂治

1 序

Stochastic Resonance の最初の研究は、約十万年周期で氷河期と間氷期を繰り返す地球の気候の変動に関して R. Benzi らによってなされた [1]。このような劇的な気候の変化の強い周期性は地球の軌道の偏心が周期的に変化していることだけでは説明できなかった。彼らは二つの安定な定常状態をもつ “climatic potential” を考えることによって、偏心のごく小さな周期的変動 (signal) とランダムな揺らぎ (noise) との協同現象が、観測されるような強い周期性を説明し得るかもしれないということを示唆した。

Stochastic Resonance は、二状態の系 (bistable system) における coherent-signal と random noise の二つの入力と、系の内部の dynamics によって決まる出力とに対するメカニズムである。ある系を “black box” として見たとき、入力の signal と noise を変化させてやると出力はどのように変化するであろうか。線形応答理論によると、線形な dynamics をもつような系においては、出力の signal-to-noise ratio (SN 比) は入力の SN 比に等しい。つまり入力の noise の大きさを増していけば出力の SN 比は減少していくことになる。これとは対照的に、Stochastic Resonance の特徴として、入力の noise の増加に伴って出力の SN 比が改善され得る、ということが挙げられる。これは、パラメタ (この場合は入力の noise の大きさ) を signal とうまく協調するような値 (二状態間の遷移頻度が signal の周波数に近くなるパラメタ値) にとることによって SN 比を最大化できることを意味しており、この意味で我々はこのメカニズムを Stochastic “Resonance” と呼んでいる。

これまでに様々な実験に基づく Stochastic Resonance の確認がなされてきた。リングレーザー [2]、反磁性体による系 [3]、細胞膜を通してのイオンの移動 [4] 等についての Stochastic Resonance が報告されている。中でも周期的に刺激される sensory neuron の活動 [5] やザリガニのレセプターにおける情報の伝達 [6] 等は Stochastic Resonance による典型的な振舞いをみせている。

また計算機実験、理論の研究もなされてきた。B. McNamara, K. Wiesenfeld は doublewell potential 中におかれた一つの粒子の運動

$$\dot{x} = F(x) + \sqrt{2D}\xi(t) + \epsilon \cos \omega_s t \quad (1)$$

$$V(x, t) = - \int dx F(x) = -\frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{4}x^4 \quad (2)$$

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \delta(t - t') \quad (3)$$

で与えられるモデルを用い、Stochastic Resonance が起こることを明らかにしている [7]。ここで $\xi(t)$ は Gaussian white noise、 D は noise の大きさ、 ϵ は signal の振幅、 ω_s は周波数である。[7] に代表されるようにこれまでの解析に用いられてきたモデルで入力として用いられている signal は完全な周期関数だった。しかしながら、実際の系において signal はいつもスペクトルに幅を持っている。このような観点より

A. Neiman, L. Schimansky-Geier が “harmonic noise” を signal として入力した系について解析を行なった [8]。しかし残念なことに、計算機実験の結果があまり示されておらず、また計算機実験で得た値と理論値には大きな開きがある。

本報告書では [8] で紹介されたモデルを用いて計算機実験を行ない、さらに double-Gaussian 近似の手法で解析を行なう。

2 モデル

signal として入力する harmonic noise $y(t)$ は次の二つの確率微分方程式で与えられる。

$$\dot{y} = s \quad (4)$$

$$\dot{s} = -\Gamma s - \Omega_0^2 y + \sqrt{2\epsilon\Gamma} \eta(t) \quad (5)$$

ここで $\eta(t)$ は平均と時間相関が

$$\langle \eta(t) \rangle = 0, \quad \langle \eta(t)\eta(t') \rangle = \delta(t-t') \quad (6)$$

で与えられるような Gaussian white noise である。

$y(t)$ のパワースペクトル $S_{yy}(\omega)$ は

$$S_{yy}(\omega) = \frac{\epsilon\Gamma}{\omega^2\Gamma^2 + (\omega^2 - \Omega_0^2)^2} \quad (7)$$

で与えられ、二乗平均は

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\Gamma \pm \sqrt{\Gamma^2 - 4\Omega_0^2} \right) \quad (8)$$

とすると

$$\begin{aligned} \langle y^2 \rangle &= \frac{\epsilon\Gamma}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} \left[\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1\lambda_2} + \frac{4}{\lambda_1 + \lambda_2} \left(\exp[-(\lambda_1 + \lambda_2)t] - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\lambda_1} \exp[-2\lambda_1 t] - \frac{1}{\lambda_2} \exp[-2\lambda_2 t] \right] \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \langle s^2 \rangle &= \frac{\epsilon\Gamma}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} \left[\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{4\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \left(\exp[-(\lambda_1 + \lambda_2)t] - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. - \lambda_1 \exp[-2\lambda_1 t] - \lambda_2 \exp[-2\lambda_2 t] \right] \end{aligned} \quad (10)$$

$$\langle ys \rangle = \frac{\epsilon\Gamma}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} \left(\exp[-\lambda_1 t] - \exp[-\lambda_2 t] \right)^2 \quad (11)$$

となる [9]。 $\Omega_0^2 > \frac{\Gamma^2}{4}$ のとき、パワースペクトルが最大値をとるような周波数の値 ω_p は

$$\omega_p = \sqrt{\Omega_0^2 - \frac{\Gamma^2}{2}} \quad (12)$$

また、スペクトルの幅 $\Delta\Omega_{in}$ を、パワースペクトルが最大値の $\frac{1}{2}$ になるような周波数の値の差の絶対値で定義すると

$$\begin{aligned} \Delta\Omega_{in} &= \sqrt{\omega_p^2 + \Gamma\omega_1} - \sqrt{\omega_p^2 - \Gamma\omega_1} \\ \omega_1 &= \sqrt{\Omega_0^2 - \frac{\Gamma^2}{4}} \end{aligned} \quad (13)$$

となる。

次に、white noise と harmonic noise を入力とする二つの安定な定常状態を持つ系を考えよう。

$$\dot{x} = F(x) + \sqrt{2D}\xi(t) + y(t) \quad (14)$$

$$V(x) = -\int dx F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \quad (15)$$

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \delta(t-t') \quad (16)$$

ここで、 $y(t)$ は確率微分方程式 (4),(5) によって決定されるような harmonic noise、 $\xi(t)$ は $\eta(t)$ とは独立な Gaussian white noise、 D は noise の大きさである。本研究においては方程式 (14) で表されるモデルを調べる。

三次元の確率密度関数 $P = P(x, y, s, t)$ に対する Fokker-Planck 方程式は、方程式 (4), (5), (14) より次のように導き出される。

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, y, s, t) = LP \quad (17)$$

ただし L は演算子で

$$L : -\frac{\partial}{\partial x}(x - x^3 + y) - \frac{\partial}{\partial y}s - \frac{\partial}{\partial s}(-\Gamma s - \Omega_0^2 y) + D\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \epsilon\Gamma\frac{\partial^2}{\partial s^2} \quad (18)$$

3 計算機実験

確率微分方程式 (4),(5),(14) に基づき $s(t), y(t), x(t)$ のデータを取り、高速フーリエ変換を用いてスペクトル推定を行なう。さらに、入力における noise の大きさを変化させ、出力におけるパワースペクトルの幅の変化、SN 比のデータをとる。

3.1 確率微分方程式

まず、方程式 (4),(5),(14) を差分化する。形式的に積分して $(\Delta t)^3$ 以上の項を無視すると

$$\begin{aligned} s(t+\Delta t) = & s(t) - \Gamma s(t)\Delta t + \frac{1}{2}(\Gamma^2 - \Omega_0^2)s(t)(\Delta t)^2 - \Omega_0^2 y(t)\Delta t + \frac{1}{2}\Gamma\Omega_0^2 y(t)(\Delta t)^2 \\ & + \sqrt{2\epsilon\Gamma} \int_t^{t+\Delta t} dt' \eta(t') - \Gamma\sqrt{2\epsilon\Gamma} \int_t^{t+\Delta t} dt' \int_t^{t'} dt'' \eta(t'') \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} y(t+\Delta t) = & y(t) + s(t)\Delta t - \frac{1}{2}\Gamma s(t)(\Delta t)^2 - \frac{1}{2}\Omega_0^2 y(t)(\Delta t)^2 \\ & + \sqrt{2\epsilon\Gamma} \int_t^{t+\Delta t} dt' \int_t^{t'} dt'' \eta(t'') \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} x(t+\Delta t) = & x(t) + (x(t) - x(t)^3 + y(t))\Delta t \\ & - \frac{1}{2}(1 - 3x(t)^2)(x(t) - x(t)^3 + y(t))(\Delta t)^2 + \frac{1}{2}s(t)(\Delta t)^2 \\ & + \sqrt{2D} \int_t^{t+\Delta t} dt' \xi(t') - (1 - 3x(t)^2)\sqrt{2D} \int_t^{t+\Delta t} dt' \int_t^{t'} dt'' \xi(t'') \end{aligned} \quad (21)$$

ここで

$$R(t) = \int_t^{t+\Delta t} dt' \eta(t') \quad (22)$$

$$Q(t) = \int_t^{t+\Delta t} dt' \int_t^{t'} dt'' \eta(t'') \quad (23)$$

とする。 $R_m = \int_{m\Delta t}^{(m+1)\Delta t} dt' \eta(t')$, $Q_m = \int_{m\Delta t}^{(m+1)\Delta t} dt' \int_{m\Delta t}^{t'} dt'' \eta(t'')$ とおくと

$$\langle R_m R_n \rangle = \Delta t \delta_{m,n} \quad (24)$$

$$\langle Q_m Q_n \rangle = \frac{1}{3} (\Delta t)^3 \delta_{m,n} \quad (25)$$

$$\langle R_m Q_n \rangle = \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \delta_{m,n} \quad (26)$$

となる。よって θ, ψ を平均0、分散1の Gaussian 分布をもつ独立な乱数とするとき

$$R(t) = \sqrt{\frac{3}{4} \Delta t} \theta + \sqrt{\frac{1}{4} \Delta t} \psi \quad (27)$$

$$Q(t) = \sqrt{\frac{1}{3} (\Delta t)^3} \theta \quad (28)$$

ととれば、この $R(t), Q(t)$ は (24), (25), (26) の条件を満たす。 $\xi(t)$ に関しても同様に、平均0、分散1の、 θ, ψ とまた互いに独立な Gaussian 分布をもつ乱数 ζ, ϕ をとれば

$$\int_t^{t+\Delta t} dt' \xi(t') = \sqrt{\frac{3}{4} \Delta t} \zeta + \sqrt{\frac{1}{4} \Delta t} \phi \quad (29)$$

$$\int_t^{t+\Delta t} dt' \int_t^{t'} dt'' \xi(t'') = \sqrt{\frac{1}{3} (\Delta t)^3} \zeta \quad (30)$$

となる。これらを (19), (20), (21) に代入して

$$\begin{aligned} s(t+\Delta t) = & s(t) - \Gamma s(t) \Delta t + \frac{1}{2} (\Gamma^2 - \Omega_0^2) s(t) (\Delta t)^2 - \Omega_0^2 y(t) \Delta t + \frac{1}{2} \Gamma \Omega_0^2 y(t) (\Delta t)^2 \\ & + \sqrt{\frac{3}{2} \epsilon \Gamma \Delta t} \theta + \sqrt{\frac{1}{2} \epsilon \Gamma \Delta t} \psi - \Gamma \sqrt{\frac{2}{3} \epsilon \Gamma (\Delta t)^3} \theta \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} y(t+\Delta t) = & y(t) + s(t) \Delta t - \frac{1}{2} \Gamma s(t) (\Delta t)^2 - \frac{1}{2} \Omega_0^2 y(t) (\Delta t)^2 \\ & + \sqrt{\frac{2}{3} \epsilon \Gamma (\Delta t)^3} \theta \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} x(t+\Delta t) = & x(t) + (x(t) - x(t)^3 + y(t)) \Delta t \\ & - \frac{1}{2} (1 - 3x(t)^2) (x(t) - x(t)^3 + y(t)) (\Delta t)^2 + \frac{1}{2} s(t) (\Delta t)^2 \\ & + \sqrt{\frac{3}{2} D \Delta t} \zeta + \sqrt{\frac{1}{2} D \Delta t} \phi - (1 - 3x(t)^2) \sqrt{\frac{2}{3} D (\Delta t)^3} \zeta \end{aligned} \quad (33)$$

を得る。

3.2 高速フーリエ変換によるスペクトル推定

前小節の差分式より得た $x(t)$ のデータより高速フーリエ変換 (FFT) を用いパワースペクトルのペリオドグラム推定 (periodogram) を行なう [10]。FFT を用いると $x(t)$ の N 個の標本値列 $x_j (j=0, 1, \dots, N-1)$ より $\frac{N}{2} + 1$ 個の周波数点 $\omega_k = \frac{2\pi k}{N\Delta t} (k=0, 1, \dots, \frac{N}{2})$ でパワースペクトルのペリオドグラム推定量を得ることができる。しかし、ペリオドグラム推定のために N 個の標本点列を選ぶということは、無限に長い標本点列 x_j に、全標本化時間 $N\Delta t$ にわたって1でそれ以外で0の値をとる矩形窓関数をかけ算していることになる。また、 ω_k は各ビンの代表値なので一般に一つのビンでのパワースペクトルは矩形窓関数の影響で実際には離れた周波数成分からのもれを含むことになる。そこで、この状況を改善するために矩形でないデータ窓を掛ける。本報告書では窓関数に Parzen 窓

$$W_j = 1 - \left| \frac{j - \frac{1}{2}(N-1)}{\frac{1}{2}(N+1)} \right| \quad (34)$$

を用い、データを半分の重複を許して K 個の区画にわけ、各区画を FFT して得られた K 個のペリオドグラムを平均してパワースペクトルの推定値を求める。

次に、得られたパワースペクトルより二つの量を求める。まず一つ目は出力のスペクトルの半値幅 $\Delta\Omega_{out}$ を無次元化した量 $R_{\Delta\Omega}$ で

$$R_{\Delta\Omega} = \frac{\Delta\Omega_{out}}{\Delta\Omega_{in}} \quad (35)$$

により定義する。ここで $\Delta\Omega_{in}$ は式 (13) で与えられる。また、出力のパワースペクトルは周波数点列 ω_k に対して離散点列で得るので、正確にはスペクトルが最大値の $\frac{1}{2}$ の値をとるような周波数値はわからない。本報告書では、スペクトルが最大値の $\frac{1}{2}$ を越える或は下回る前後の周波数点の間を比例配分してやることにより $\Delta\Omega_{out}$ を決定した。

二つ目は SN 比である。[7],[8] で考えられているように出力のパワースペクトル $S(\omega)$ が

$$S(\omega) = S_{sign}(\omega) + S_{nois}(\omega) \quad (36)$$

と signal のパワースペクトル成分 S_{sign} 、noise の成分 S_{nois} に分離できると仮定して、SN 比 R を

$$R = 10 \log_{10} \frac{S(\omega_{max})}{S_{nois}(\omega_{max})} \quad (37)$$

で定義する。ここで ω_{max} は出力のパワースペクトルが最大値をとるような周波数値である。問題なのは [7] のように S_{sign} が δ 関数的ではなく幅を持つので $S_{nois}(\omega_{max})$ の推定が難しいことである。実際には、入力する signal を 0 としたとき、つまり noise のみを入力したときの出力のパワースペクトル S'_{nois} をとり、 S の S_{sign} の影響が薄いと思われる部分を用いて S に重ね合わせて S'_{fit} として

$$S_{nois}(\omega_{max}) = S'_{fit}(\omega_{max}) \quad (38)$$

とする。

3.3 実験結果

パラメタの設定は [8] に準じて以後 $\Omega_0 = 0.1, \epsilon = 0.025$ とする。

まず、 $D = 0.04$ のとき $\Gamma = 0.001, 0.06$ に対して $y(t), x(t)$ のデータを取りスペクトル推定を行なった (図.1)~(図.5)。 $\Gamma = 0.001$ のとき $x(t), y(t)$ とともに (図.1, 図.2) 非常に周期関数に近い形になっている。 $x(t)$ のパワースペクトルを見ても (図.5) $\Gamma = 0.001$ の方が $\Gamma = 0.06$ の場合と比較するとシャープにピークが現れていて $x(t)$ が強い周期性を持つことがわかる。

以下序でも述べたようにスペクトルに幅を持つ signal の入力に興味があるので $\Gamma = 0.06$ の場合について実験を進めた。この場合の $x(t), y(t)$ の様子は図.3, 図.4 に示した。

次に、 D を変化させて出力のパワースペクトルをとったのが図.6である。

これらを用いて $R_{\Delta\Omega}, R$ について計算した (図.7, 図.8)。 $R_{\Delta\Omega}$ の方を見てみると、興味深いことに出力のスペクトルの方が入力パワースペクトルの幅より狭い、つまりシャープにピークが現れていることがわかる。 $D = 0.6$ のあたりで最も著しい。 R はこれまで完全な周期関数を入力したときに見られたのと同じような状態が現れている。 D を 0 から増やし始めると 0.2 程度迄は SN 比は悪化するが、その後改善され始め $D = 0.4$ のあたりでピークとなっている。

以上の事実よりスペクトルに幅を持つ signal の入力に対しても Stochastic Resonance が起こっていることがよくわかる。

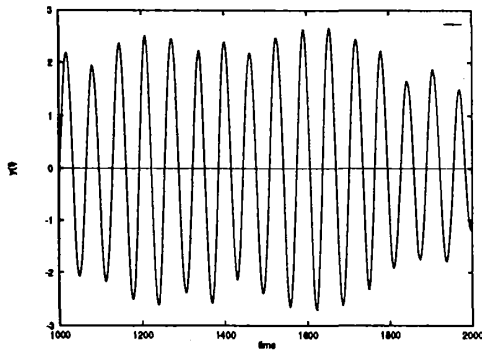


図 1: $\Gamma = 0.001$, $\Omega_0 = 0.1$, $\epsilon = 0.025$, $D = 0.4$. としたときの入力 signal.

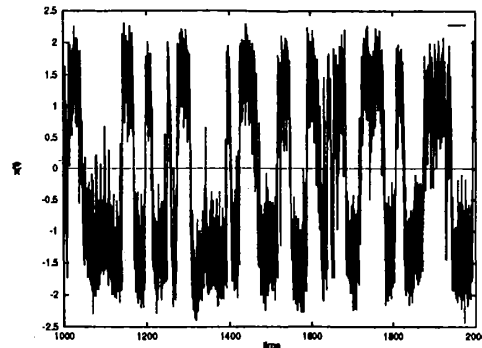


図 4: $\Gamma = 0.06$, $\Omega_0 = 0.1$, $\epsilon = 0.025$, $D = 0.4$. としたときの出力.

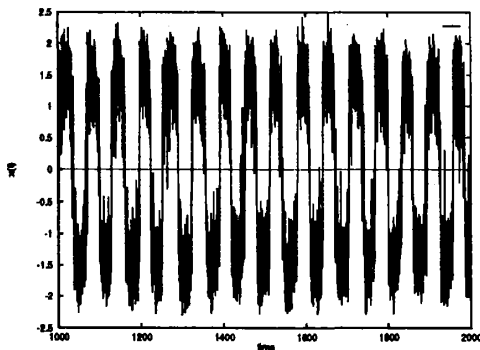


図 2: $\Gamma = 0.001$, $\Omega_0 = 0.1$, $\epsilon = 0.025$, $D = 0.4$. としたときの出力.

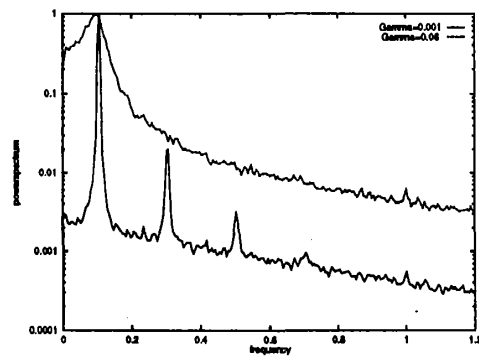


図 5: 出力のパワースペクトルの比較.
 $\Omega_0 = 0.1$, $\epsilon = 0.025$, $D = 0.4$.

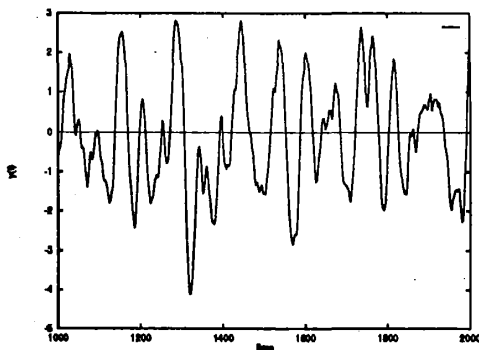


図 3: $\Gamma = 0.06$, $\Omega_0 = 0.1$, $\epsilon = 0.025$, $D = 0.4$. としたときの入力 signal.

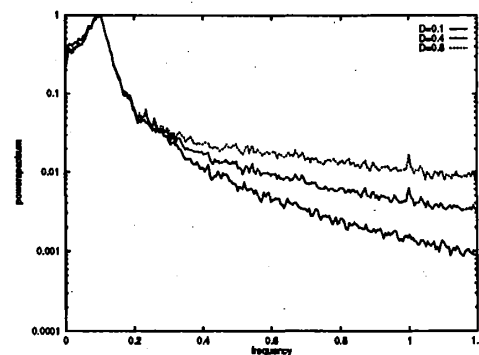


図 6: 出力のパワースペクトルの比較.
 $\Omega_0 = 0.1$, $\epsilon = 0.025$, $\Gamma = 0.06$.

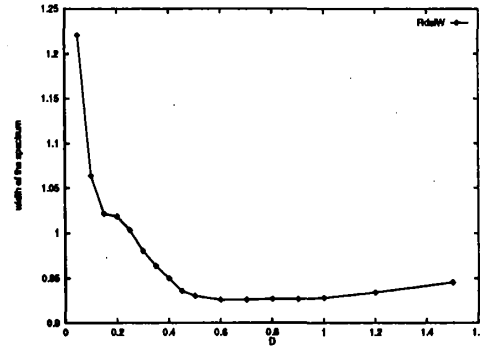


図 7: 出力のパワースペクトルの幅の変化. $\Omega_0 = 0.1$, $\epsilon = 0.025$, $\Gamma = 0.06$.

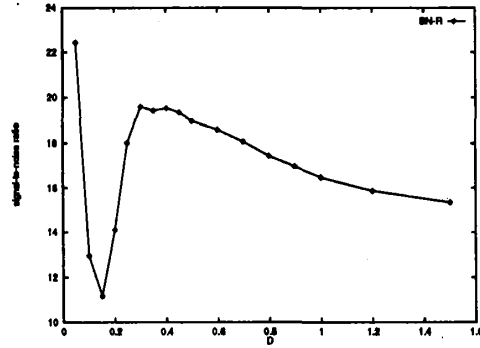


図 8: SN 比の変化. $\Omega_0 = 0.1$, $\epsilon = 0.025$, $\Gamma = 0.06$.

4 double-Gaussian 近似

前章において計算機実験により harmonic noise によっても Stochastic Resonance が起こることをを観た。この章ではポテンシャル中の粒子の分布を二つの安定点まわりの Gaussian 分布の和と仮定し、新たにそれぞれの分布に対するモーメントを定義して、Fokker-Planck 方程式を用い Stochastic Resonance を扱う。

4.1 double-Gaussian 近似

ポテンシャル中の粒子の分布 $P(x, y, s, t)$ を、二つの安定点 b_L, b_R まわりでの Gaussian 分布の和で近似することを考える [11]。

$$P(x, y, s, t) = a_L(t)P_L(x, y, s, t) + a_R(t)P_R(x, y, s, t) \quad (39)$$

ここで a_L, a_R はそれぞれ粒子が左の或は右のポテンシャルの井戸にいる確率である。また $P_{L,R}(x, y, s, t)$ は安定点 b_L, b_R を平均とする Gaussian 分布で、共分散行列 $\Sigma_{L,R}$ を用いて

$$P_{L,R} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}|\Sigma_{L,R}|^{\frac{1}{2}}} \exp \left[-\frac{1}{2}(x - \mu_{L,R})^T \Sigma_{L,R}^{-1} (x - \mu_{L,R}) \right] \quad (40)$$

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ s \end{pmatrix}, \quad \mu_{L,R} = \begin{pmatrix} b_{L,R}(t) \\ c(t) \\ d(t) \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_{L,R} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}^{(L,R)}(t) & \sigma_{xy}^{(L,R)}(t) & \sigma_{xs}^{(L,R)}(t) \\ \sigma_{xy}^{(L,R)}(t) & \sigma_{yy}(t) & \sigma_{ys}(t) \\ \sigma_{xs}^{(L,R)}(t) & \sigma_{ys}(t) & \sigma_{ss}(t) \end{pmatrix}$$

と書ける。ここで $c(t), d(t)$ はそれぞれ y, s の平均である。左右の分布がそれぞれ独立であると考えられるように $|b_L - b_R| \gg \sigma_{xx}^{(L)}, \sigma_{xx}^{(R)}$ と仮定する。

次に式(39)で与えられる double-Gaussian 分布を具体的に決定するわけだが、式(9),(10),(11)より

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} &= \frac{\epsilon\Gamma}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} \left[\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} + \frac{4}{\lambda_1 + \lambda_2} \left(\exp[-(\lambda_1 + \lambda_2)t] - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\lambda_1} \exp[-2\lambda_1 t] - \frac{1}{\lambda_2} \exp[-2\lambda_2 t] \right] \\ \sigma_{ss} &= \frac{\epsilon\Gamma}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} \left[\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{4\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \left(\exp[-(\lambda_1 + \lambda_2)t] - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. - \lambda_1 \exp[-2\lambda_1 t] - \lambda_2 \exp[-2\lambda_2 t] \right] \\ \sigma_{ys} &= \frac{\epsilon\Gamma}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} \left(\exp[-\lambda_1 t] - \exp[-\lambda_2 t] \right)^2 \end{aligned}$$

となる。また、確率微分方程式(4),(5)より

$$\frac{d}{dt}c(t) = d(t) \quad (41)$$

$$\frac{d}{dt}d(t) = -\Gamma d(t) - \Omega_0^2 c(t) \quad (42)$$

であり、 $c(t), d(t)$ は

$$c(t) = \frac{\lambda_1 \exp[-\lambda_2 t] - \lambda_2 \exp[-\lambda_1 t]}{\lambda_1 - \lambda_2} c(0) + \frac{\exp[-\lambda_2 t] - \exp[-\lambda_1 t]}{\lambda_1 - \lambda_2} d(0) \quad (43)$$

$$d(t) = \Omega_0^2 \frac{\exp[-\lambda_1 t] - \exp[-\lambda_2 t]}{\lambda_1 - \lambda_2} c(0) + \frac{\lambda_1 \exp[-\lambda_1 t] - \lambda_2 \exp[-\lambda_2 t]}{\lambda_1 - \lambda_2} d(0) \quad (44)$$

で与えられる。ここで $\lambda_{1,2}$ は式(8)で定義されたものである。

次に $y(t)$ の変移如何に関わらず、左の Gaussian 分布に従う粒子は左のポテンシャルの、右の分布に従う粒子は右のポテンシャルの底をそれぞれ中心にして分布しており、 $y(t)$ の変移に大きく左右されるのは正規化の係数のみであると考えて

$$\sigma_{xy}^{(L,R)} = 0, \quad \sigma_{xs}^{(L,R)} = 0 \quad (45)$$

と仮定する。よって残りの $a_L, a_R, b_L, b_R, \sigma_{xx}^{(L)}, \sigma_{xx}^{(R)}$ の六つの未知数を求めてやればよい。

まず、 a_L, a_R の定義より

$$a_L + a_R = 1 \quad (46)$$

である。

次に、左右のモーメントを

$$\langle x^l y^m s^n \rangle_L = \int_{-\infty}^0 dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} ds x^l y^m s^n P(x, y, s, t) \quad (47)$$

$$\langle x^l y^m s^n \rangle_R = \int_0^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} ds x^l y^m s^n P(x, y, s, t) \quad (48)$$

で定義する。Fokker-Planck 方程式 (17),(18) を用いると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \langle x^l y^m s^n \rangle_L &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^0 dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} ds x^l y^m s^n P(x, y, s, t) \\ &= \int_{-\infty}^0 dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{d}{dt} [x^l y^m s^n P(x, y, s, t)] \\ &= \int_{-\infty}^0 dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} ds x^l y^m s^n LP(x, y, s, t)\end{aligned}\quad (49)$$

$$\frac{d}{dt} \langle x^l y^m s^n \rangle_R = \int_0^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} ds x^l y^m s^n LP(x, y, s, t) \quad (50)$$

となるので、これらより残り五つの未知数を決定する方程式を導出する。

$\langle 1 \rangle_L$ について式 (49) を適用すると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} a_L &= -\frac{a_L c}{\sqrt{2\pi} \sigma_{xx}^{(L)\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{b_L^2}{2\sigma_{xx}^{(L)}}\right] - \frac{a_R c}{\sqrt{2\pi} \sigma_{xx}^{(R)\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{b_R^2}{2\sigma_{xx}^{(R)}}\right] \\ &\quad + D \frac{a_L b_L}{\sqrt{2\pi} \sigma_{xx}^{(L)\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{b_L^2}{2\sigma_{xx}^{(L)}}\right] + D \frac{a_R b_R}{\sqrt{2\pi} \sigma_{xx}^{(R)\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{b_R^2}{2\sigma_{xx}^{(R)}}\right]\end{aligned}\quad (51)$$

を得る。 $\langle 1 \rangle_R$ については $\dot{a}_R = -\dot{a}_L$ を得るので新しい方程式は導出できない。

$\langle x \rangle_L, \langle x^2 \rangle_L$ に式 (49) を適用すると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} a_L b_L &= a_L b_L - a_L b_L (3\sigma_{xx}^{(L)} + b_L^2) + a_L c \\ &\quad - D \frac{a_L}{\sqrt{2\pi} \sigma_{xx}^{(L)\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{b_L^2}{2\sigma_{xx}^{(L)}}\right] - D \frac{a_R}{\sqrt{2\pi} \sigma_{xx}^{(R)\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{b_R^2}{2\sigma_{xx}^{(R)}}\right]\end{aligned}\quad (52)$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} a_L (\sigma_{xx}^{(L)} + b_L^2) &= 2a_L (\sigma_{xx}^{(L)} + b_L^2) + 2a_L b_L + 2Da_L \\ &\quad - 2a_L (3\sigma_{xx}^{(L)2} + 6\sigma_{xx}^{(L)} b_L^2 + b_L^4)\end{aligned}\quad (53)$$

となる。

右側についても同様に $\langle x \rangle_R, \langle x^2 \rangle_R$ について式 (50) を適用すると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} a_R b_R &= a_R b_R - a_R b_R (3\sigma_{xx}^{(R)} + b_R^2) + a_R c \\ &\quad + D \frac{a_L}{\sqrt{2\pi} \sigma_{xx}^{(L)\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{b_L^2}{2\sigma_{xx}^{(L)}}\right] + D \frac{a_R}{\sqrt{2\pi} \sigma_{xx}^{(R)\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{b_R^2}{2\sigma_{xx}^{(R)}}\right]\end{aligned}\quad (54)$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} a_R (\sigma_{xx}^{(R)} + b_R^2) &= 2a_R (\sigma_{xx}^{(R)} + b_R^2) + 2a_R b_R c + 2Da_R \\ &\quad - 2a_R (3\sigma_{xx}^{(R)2} + 6\sigma_{xx}^{(R)} b_R^2 + b_R^4)\end{aligned}\quad (55)$$

の二つの方程式を得る。

以上の六つの方程式 (46),(51)~(55) より double-Gaussian 分布を決定する。

4.2 時間相関関数

以下簡単のため $x(t)$ についてのみ考える。

時間相関関数は次のように書ける。

$$\langle x(t)x(t_0) \rangle = \int dx \int dx_0 W(x, t | x_0, t_0) x P_0(x_0, t_0) x_0 \quad (56)$$

ここで、 $P_0(x_0, t_0)$ は初期状態での粒子の分布、 $W(x, t | x_0, t_0)$ は初期状態から $t - t_0$ 後に粒子が x にいる確率である。

初期状態で粒子がポテンシャルの左側の底にあると仮定してやると

$$x_0 = -1 \quad (57)$$

$$P_0(x_0, t_0) = \delta(x_0 + 1) \quad (58)$$

である。また、 $W(x, t | x_0, t_0)$ は double-Gaussian 分布で与えられるので時間相関関数は

$$\begin{aligned} \langle x(t)x(t_0) \rangle &= \int dx \int dx_0 P(x, t) x \delta(x_0 + 1)(-1) \\ &= - \int dx P(x, t) x \\ &= -(a_L b_L + a_R b_R) \end{aligned} \quad (59)$$

となる。Winer-Khintchine の定理よりパワースペクトルは時間相関関数のフーリエ変換で求められるので、 $x(t)$ のパワースペクトル $S(\omega)$ はフーリエ余弦変換を用いて次のように表せる。

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_0^\infty dt \cos \omega t \langle x(t)x(t_0) \rangle \\ &= - \int_0^\infty dt \cos \omega t (a_L(t)b_L(t) + a_R(t)b_R(t)) \end{aligned} \quad (60)$$

以上の理由より前小節で導出した方程式より $a_L b_L + a_R b_R$ を数値計算によって求める。

4.3 数値解析

方程式 (46), (51)~(55) を Adams-Bashforth-Moulton 法を用い計算機で解いた。 $\Omega_0, \epsilon, \Gamma$ は前述の通りで $D = 0.4$ のとき a_L, a_R をプロットしたのが図.9である。振動しながら減衰し 0.5 あたりに収束していることがよくわかる。

次に $a_L b_L + a_R b_R$ を計算した (図.10)。これも振動しながら減衰し 0 あたりに収束している。これを用いて $-(a_L b_L + a_R b_R)$ のフーリエ余弦変換、つまり $x(t)$ のパワースペクトルを求めた (図.11)。ただし $-(a_L b_L + a_R b_R)$ (時間相関関数) が完全には 0 にならないので $\omega = 0$ のところに δ 関数的要素が現れるが、それはプロットしていない。noise の大きさ (D) がある値 ($D = 0.3$ 程度) より小さくなるとある周波数成分に負の値が現れ、うまくパワースペクトルを表していないように思われる。

$D = 0.4$ のときこのフーリエ余弦変換と計算機実験で得たパワースペクトル (図.6) を比べてみた (図.12)。ピークの位置はよく一致している。また $\omega > \omega_{max}$ のところで近似による結果は計算機実験の結果をよく表している。しかし $\omega < \omega_{max}$ ではあまり一致しなかった。余弦変換に FFT を用いているので、3.2 節でも述べた通り $\omega = 0$ での δ 関数的要素が周辺ビンに影響を及ぼしているものと推測される。

このことより $S(\omega) = \frac{1}{2} S(\omega_{max})$ を満たすような ω の値を知ることができず、スペクトルの幅の変化 ($R_{\Delta\Omega}$) については調べることができなかった。

次に SN 比の変化についてだが、これも Stochastic Resonance の特性が見られる範囲についてパワースペクトルがうまく求まらなかったので計算しなかった。SN 比を知ることができないと Stochastic Resonance が起こっているのかどうか判断できない。しかしながら先に示した図.10 を見てもわかるように、 $D = 0.4$ のときは $D = 0.1, 0.8$ のときよりも noise と signal がうまくかみあってきれいに振動しているように思われる。

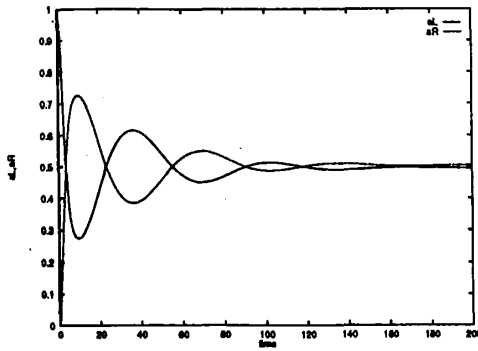


図 9: a_L, a_R の時間変化.
 $\Omega_0 = 0.1, \epsilon = 0.025, \Gamma = 0.06, D = 0.4$.

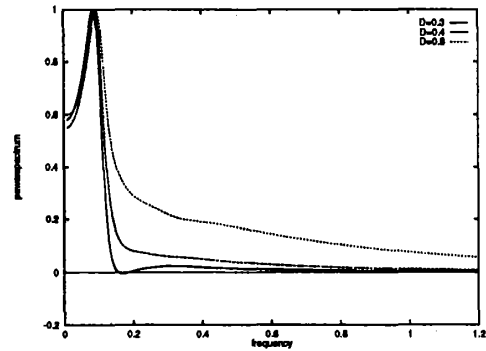


図 11: $-(a_L b_L + a_R b_R)$ のフーリエ変換.
 $\Omega_0 = 0.1, \epsilon = 0.025, \Gamma = 0.06$.

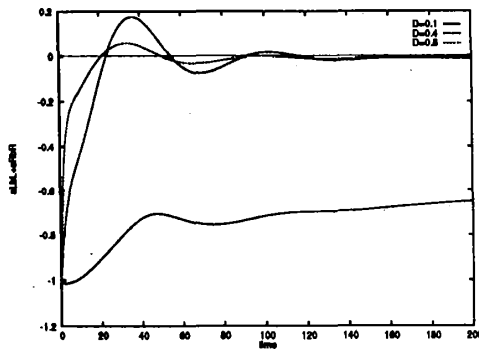


図 10: $a_L b_L + a_R b_R$ の時間変化.
 $\Omega_0 = 0.1, \epsilon = 0.025, \Gamma = 0.06$.

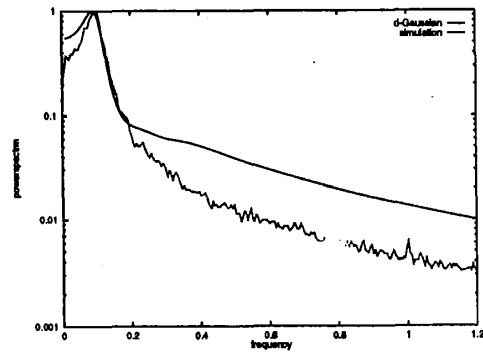


図 12: 出力のパワースペクトル. double-Gaussian 近似による結果と計算機実験の結果との比較.
 $D = 0.4, \Omega_0 = 0.1, \epsilon = 0.025, \Gamma = 0.06$.

5 結

本報告書では harmonic noise を signal として入力したときの Stochastic Resonance について計算機実験を行ない、また double-Gaussian 近似を用いて解析を行なった。その結果をここでもう一度整理する。

1. 計算機実験

- (a) 完全な周期関数を入力したときと同じように入力の noise の大きさを signal とうまく協調するような値 (二状態間の遷移頻度が signal の周波数に近くなる値) に合わせることで出力の SN 比を最大化できることがわかった。
- (b) 入力の noise の大きさを signal とうまく協調するような値に合わせることで出力のパワースペクトルの幅を入力のパワースペクトルの幅より小さくすることができるとわかった。

2. double-Gaussian 近似

- (a) 出力のパワースペクトルを計算したところ、 $D > 0.3$ ではある範囲の周波数成分で計算機実験の結果とよく一致した。ピークの位置は非常によく一致した。
- (b) 時間相関関数が完全には0にならないことによるパワースペクトルの δ 関数的要素のため、スペクトルの幅の変化($R_{\Delta\Omega}$)については計算することができなかった。
- (c) ある範囲でしかスペクトルがうまく求まらなかったので Stochastic Resonance がはっきりとわかるような SN 比の計算はできなかった。

1.(a) より harmonic noise を入力したときも Stochastic Resonance が起こっていることは明らかである。また 1.(b) は完全な周期関数を入力したときには見ることでできなかった新しい現象であり、SN 比だけでなくスペクトルの幅に関しても “Resonance” が起こっていると言えよう。

これらを double-Gaussian 近似を用い説明しようと試みた。ある範囲の D に関してはパワースペクトルがうまく計算できたが Stochastic Resonance の特性が見られるであろう範囲については計算できなかった。また 2.(b) にも述べた通り、スペクトルの幅の変化についても知ることができなかった。harmonic noise を扱うにはもう少し工夫がいりそうである。

参考文献

- [1] R.Benzi, G.Parisi, A.Sutera and A.Vulpiani.
SIAM. (Soc.Ind.Appl.Math)J.Appl.Math.**43**,565 (1983)
- [2] B.McNamara, K.Wiesenfeld, and R.Roy. Phys.Rev.Lett.**60**,2626 (1988);
A.Fioretti, L.Guidori, R.Mannella and E.Arimond. J.Stat.Phys.**70**,403 (1993)
- [3] L.Gammatitoni, M.Martinelli, L.Pardi and S.Santucci.
Phys.Rev.Lett.**67**,1799 (1991)
- [4] D.Tetracchi, C.Ascoli, M.Bardi, S.Chillemi, M.Pellegrini and M.Pellegrino.
J.Stat.Phys.**70**,393 (1993)
- [5] A.Longtin, A.Bulsara and F.Moss Phys.Rev.Lett.**67**,656 (1991)
- [6] J.K.Douglass, L.Wilkins, E.Pantazelou and F.Moss.
Nature(London),**365**,337 (1993)
- [7] B.McNamara and K.Wiesenfeld. Phys.Rev.A,**39**,4854 (1989)
- [8] A.Neiman and L.Schimansky-Geier. Phys.Rev.Lett.**72**,2988 (1994)
- [9] H.Risken.
The Fokker-Planck Equation *Methods of Solution And Applications*,
Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1989.
- [10] W.H.Press, B.P.Flannery, S.A.Teukolsky and W.T.Vetterling.
NUMERICAL RECIPES in C, Cambridge University Press 1988.
- [11] Y.Saito. J.Phys.Soc.Japan,**41**,388 (1976)