

乱流のラグランジュ的取扱い

東大理学部 崎山雅行

§ 1 Introduction

乱流を理論的に取り扱い、Kolmogorov則と結びつけようという種々の試みがこれまでなされてきましたが、その中に Eulerian Direct Interaction Approximation があります。しかしこの EDI には一つの重要な欠点があります。それは、Kolmogorov 則と関連づけようとする、response 方程式が発散してしまうということです。Kraichnan はその原因が、“小さなスケール”の速度場が“大きなスケール”の速度場によって流されることによるのではないかということを描きしました。そしてオイラー的な取り扱いをやめ、ラグランジュ的な取り扱いをすることによってこの欠点は回避できると考え、LHDI (Lagrangian History Direct Interaction Approximation) の方法を用いました。実際には、方程式を閉じさせるために、LHDI を適当な仮定をもうけて変形した

ALH (Abridged Lagrangian History) というものを考案しました。しかしながら、LHDI から ALH へのステップは簡単には理解し難いものです。そこで LHDI から ALH へは行かずにもう少し簡単な近似を用いて response 方程式の発散が Lagrange 的取り扱いをすることによって除去できるということ、及びそれをモデル化した方程式が、Kraichnan によって直観的に設定された TFM (Test Field Model) の方程式に一致することを示す。

§2. LHDI の基礎方程式

ここでは、Kraichnan のそれに従って導きます。

まず、一般化された速度 $\vec{u}(\vec{x}, s|t)$ を時刻 s に $\vec{x}$ という位置にいた流体粒子が時刻 t に持っている速度として定義します。 $\vec{u}(\vec{x}, s|t)$ で s を fix しておくと完全な Lagrange 的な速度です。又: $s=t$ とおいたものは Euler 的な速度に一致します。それゆえ $\vec{u}(\vec{x}, t|t)$ という速度場は Euler 的な Navier-Stokes 方程式を満足します。つまり、

$$\frac{\partial u_i(\vec{x}, t|t)}{\partial t} + u_j(\vec{x}, t|t) \frac{\partial}{\partial x_j} u_i(\vec{x}, t|t) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i(\vec{x}, t|t) \dots (1)$$

$$\frac{\partial u_i(\vec{x}, t|t)}{\partial x_i} = 0 \dots (2)$$

次に時刻 s に $\vec{x}$ という位置にいた流体粒子は時刻 $s+\Delta s$

には、 $\vec{x} + \vec{u}(\vec{x}, s|s) \Delta S$ という位置にいますから、明らかに

$$\vec{u}(\vec{x}, s|t) = \vec{u}(\vec{x} + \vec{u}(\vec{x}, s|s) \Delta S, s + \Delta S|t)$$

$$\text{ゆえに } \frac{\partial u_i(\vec{x}, s|t)}{\partial s} + u_j(\vec{x}, s|s) \frac{\partial u_i(\vec{x}, s|t)}{\partial x_j} = 0 \quad \text{----- (3)}$$

(1), (2), (3) を Fourier 変換して P を消去すると次のようになります。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u_i(\vec{k}, t|t) = & -\nu k^2 u_i(\vec{k}, t|t) + M_k^{ijm} \int_p \int_q \delta(\vec{k} - \vec{p} - \vec{q}) u_j(\vec{p}, t|t) \\ & \times u_m(\vec{q}, t|t) \quad \text{----- (4)} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} u_i(\vec{k}, s|t) = -i k_j \int_p \int_q \delta(\vec{k} - \vec{p} - \vec{q}) u_j(\vec{p}, s|s) u_i(\vec{q}, s|t) \quad \text{----- (5)}$$

(4), (5) が、LHDI の基礎方程式です。

$$\text{ここで } M_k^{ijm} = -\frac{i}{2} (k_j P_k^{im} + k_m P_k^{ij}), \quad P_k^{ij} = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}$$

又、 $\int_p$ は $\iiint d^3 \vec{p}$ のことです。

§3. 簡単な近似とその結果

(5) の方程式を積分すると次のようになります。

$$\begin{aligned} u_i(\vec{k}, t'|t) = & u_i(\vec{k}, t|t) + i k_j \int_{t'}^t ds \int_p \int_q \delta(\vec{k} - \vec{p} - \vec{q}) \\ & \times u_j(\vec{p}, s|s) u_i(\vec{q}, s|t) \quad \text{----- (6)} \end{aligned}$$

今は Lagrange 的な変化だけを考えたいのですから (6) を、 t を fix して t' について微分すると、次のようになります。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u_i(\vec{k}, t|t) &= \frac{\partial u_i(\vec{k}, t|t)}{\partial t} + i k_j \int_p \int_q \delta(\vec{k} - \vec{p} - \vec{q}) u_j(\vec{p}, t|t) u_i(\vec{q}, t|t) \\ &\quad + i k_j \int_{t'}^t ds \int_p \int_q \delta(\vec{k} - \vec{p} - \vec{q}) u_j(\vec{p}, s|s) \frac{\partial u_i(\vec{q}, s|t)}{\partial t} \end{aligned}$$

ここに(4)を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u_i(\vec{k}, t|t) &= \overline{M}_{\vec{k}}^{ijm} \int_p \int_q \delta(\vec{k} - \vec{p} - \vec{q}) u_j(\vec{p}, t|t) u_m(\vec{q}, s|t) \\ &\quad + i k_j \int_{t'}^t ds \int_p \int_q \delta(\vec{k} - \vec{p} - \vec{q}) u_j(\vec{p}, s|s) \frac{\partial u_i(\vec{q}, s|t)}{\partial t} \dots (7) \end{aligned}$$

$$\overline{M}_{\vec{k}}^{ijm} \equiv i \frac{k_i k_j k_m}{k^2}$$

ここでは簡単のため inertial subrange を考えるとして $\nu = 0$ とおいた。

この(7)という式は右辺の最後の項のために、閉じていません。そこで $|t - t'| \ll 1$ として、右辺の二項を摂動項と考えて展開すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u_i(\vec{k}, t|t) &= \overline{M}_{\vec{k}}^{ijm} \int_p \int_q \delta(\vec{k} - \vec{p} - \vec{q}) u_j(\vec{p}, t|t) u_m(\vec{q}, t|t) \\ &\quad + (t - t') i k_j \int_p \int_q \delta(\vec{k} - \vec{p} - \vec{q}) u_j(\vec{p}, t|t) \\ &\quad \times \overline{M}_{\vec{q}}^{iab} \int_r \int_e \delta(\vec{q} - \vec{r} - \vec{e}) u_a(\vec{r}, t|t) u_b(\vec{e}, t|t) + O((t - t')^2) \\ &\quad \dots (8) \end{aligned}$$

$P_{\vec{k}}^{im}$ と $\pi_{\vec{k}}^{im} \equiv \delta_{im} - P_{\vec{k}}^{im}$ という solenoidal part と curl free part をとり出す射影演算子を使って、この方程式を

2つに分離すると次のようになります。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} U_i^s(\vec{k}, t|t) &= (t-t') \bar{h}_j P_k^{im} \int_p \int_{\vec{q}} \delta(\vec{k}-\vec{p}-\vec{q}) U_j(\vec{p}, t|t) \\ &\quad \times \bar{M}_q^{mab} \int_{r\ell} \delta(\vec{q}-\vec{r}-\vec{\ell}) U_a(\vec{r}, t|t) U_b(\vec{\ell}, t|t) \\ &\quad + O((t-t')^2) \dots \dots \dots (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} U_i^c(\vec{k}, t|t) &= \bar{M}_k^{im} \int_p \int_{\vec{q}} \delta(\vec{k}-\vec{p}-\vec{q}) U_j(\vec{p}, t|t) U_m(\vec{q}, t|t) \\ &\quad + (t-t') \bar{h}_j \Pi_k^{im} \int_p \int_{\vec{q}} \delta(\vec{k}-\vec{p}-\vec{q}) U_j(\vec{p}, t|t) \bar{M}_q^{mab} \int_{r\ell} \delta(\vec{q}-\vec{r}-\vec{\ell}) \\ &\quad \times U_a(\vec{r}, t|t) U_b(\vec{\ell}, t|t) + O((t-t')^2) \dots \dots \dots (10) \end{aligned}$$

$$U_i^s(\vec{k}, t|t) \equiv P_k^{is} U_s(\vec{k}, t|t)$$

$$U_i^c(\vec{k}, t|t) \equiv \Pi_k^{ic} U_c(\vec{k}, t|t)$$

isotropic であることを仮定すると $\langle U_i^c(\vec{k}, t|t) U_n(\vec{k}, t|t') \rangle$ は
零になるので今(9)だけを使って $Q_{in}^s(\vec{k}, t; t) \equiv \langle U_i^s(\vec{k}, t|t) \times U_n(\vec{k}, t|t) \rangle$

に対する方程式をつくると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} Q_{in}^s(\vec{k}, t; t) &= (t-t') \bar{h}_j P_k^{im} \int_p \int_{\vec{q}} \delta(\vec{k}-\vec{p}-\vec{q}) \bar{M}_q^{mab} \int_{r\ell} \delta(\vec{q}-\vec{r}-\vec{\ell}) \\ &\quad \times \langle U_j(\vec{p}, t|t) U_a(\vec{r}, t|t) U_b(\vec{\ell}, t|t) U_n(-\vec{k}, t|t) \rangle + O((t-t')^2) \end{aligned}$$

ここで場が Gaussian であると近似し stationary を仮定すると上の方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_{in}^s(\vec{k}, t-t') \cong 2(t-t') i k_f P_k^{im} \int_{p,q} \delta(\vec{k}-\vec{p}-\vec{q}) \bar{M}_q^{mat} Q_{fa}(\vec{p}, 0) \\ \times Q_{bm}(\vec{q}, 0) + O((t-t')^2)$$

そして isotropic を仮定し、 $Q_{in}^s(\vec{k}, t-t') \equiv P_k^{im} Q^s(k, t-t')$ を代入すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} Q^s(k, t-t') \cong (t-t') \int_{p,r}^{\wedge} 2\pi k p r \tilde{b}(k, p, r) f(p) f(k) + O((t-t')^2) \\ \text{ここで: } k^2 \tilde{b}(k, p, r) = i k_f P_k^{mb} P_p^{ia} \bar{M}_r^{mat}, \quad f(p) = Q^s(p, 0)$$

又、 $\int_{p,r}^{\wedge}$ は $\int_0^\infty dp \int_{|k-p|}^{k+p} dr$ を表す。

更に、 $Q^s(k, t-t') = f(k) \exp[-\frac{1}{2} \sigma_k (t-t')^2]$ と仮定すると

$$\sigma_k \cong -2\pi \int_{p,r}^{\wedge} k p r \tilde{b}(k, p, r) f(p) \dots \dots \dots (11)$$

§4 TFM との関係

$$U_i^c(\vec{k}, t|t') = 0 \quad \text{と (10) より}$$

$$U_i^c(\vec{k}, t|t) = (t-t') \bar{M}_k^{im} \int_{p,q} \delta(\vec{k}-\vec{p}-\vec{q}) U_j^s(\vec{p}, t|t) U_m^c(\vec{q}, t|t) + O((t-t')^2)$$

よって (9) は

$$\frac{\partial}{\partial t} U_i^s(\vec{k}, t|t) = i k_f P_k^{im} \int_{p,q} \delta(\vec{k}-\vec{p}-\vec{q}) U_j^s(\vec{p}, t|t) U_m^c(\vec{q}, t|t) + O((t-t')^2) \\ \dots \dots \dots (12)$$

とわかります。又、(10) も

$$\frac{\partial}{\partial t} U_i^c(\vec{k}, t|t) = \bar{M}_k^{im} \int_{p,q} \delta(\vec{k}-\vec{p}-\vec{q}) U_j^s(\vec{p}, t|t) + U_m^s(\vec{q}, t|t) + O(t-t') \\ \dots \dots \dots (13)$$

とわかります。

(12), (13) の右辺を第一項だけで近似すると、それぞれ

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} U_i^s(\vec{k}, t|t) = i k_i P_k^{im} \int_{\vec{p}, \vec{q}} \delta(\vec{k} - \vec{p} - \vec{q}) U_j^s(\vec{p}, t|t) U_m^c(\vec{q}, t|t) \\ \frac{\partial}{\partial t} U_i^c(\vec{k}, t|t) = M_k^{im} \int_{\vec{p}, \vec{q}} \delta(\vec{k} - \vec{p} - \vec{q}) U_j^s(\vec{p}, t|t) U_m^s(\vec{q}, t|t) \end{cases}$$

となります。これは本質的に TFM の基礎方程式と一致しています。

(実際に response 方程式の発散の落ち方が TFM と同じということが、分ります。; cf. §5)

つまり、Lagrange 的に取り扱い、上に述べた近似 行ない、それを model 方程式として採用したものが、TFM であると解釈できるということです。

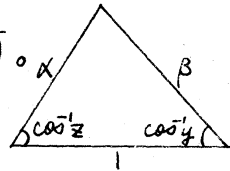
§5 Kolmogorov 則との関係 [発散が除去されているということ]

$$\sigma_k, f(k) \text{ として } \sigma_k = D \varepsilon^{\frac{2}{3}} k^{\frac{4}{3}}, \quad f(k) = \frac{K_0}{4\pi} \varepsilon^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{11}{3}} \text{ という}$$

Kolmogorov form を (11) に代入し、 $p = \alpha k$, $r = \beta k$ において無次元化すると $\frac{2D}{K_0} = \iint_{\alpha, \beta} \beta \alpha^{-\frac{8}{3}} (1-y^2)(1-z^2)$ となる。

ここで、 y, z は右図で定義されるものです。

$$\text{又、} \iint_{\alpha, \beta} \text{ は } \int_0^\infty d\alpha \int_{|1-\alpha|}^{\pi\alpha} d\beta \text{ を表わしています。}$$



この式が response 方程式に対応する式ですが、EDI の response 方程式におけるような発散はもっていません。これは $\tilde{b}(k, p, t)$ が $p=0$ で 0 になるためです。この $\tilde{b}(k, p, t)$

は、TFMから出てくる $b^s(k, p, r)$ と数 factor をのぞいて一致します。