

密度最大点を含む流体層における 2重拡散対流の安定性

加藤由紀, 藤村 薫, 橋場 誠

鳥取大学工学部応用数理工学科

Yuki Kato, Kaoru Fujimura and Makoto Hashiba

Department of Applied Mathematics and Physics, Tottori University

概要

密度が温度の2次、濃度の1次に比例するという仮定の下で、水平な流体層における2重拡散対流の発生条件を調べた。ブシネスク近似の下で、伝導状態の線形安定性を解析したところ、振動不安定と定常不安定が見つかった。振動不安定については、臨界熱レイリー数 Ra_c は塩レイリー数 Rs の増加関数である。一方、定常な対流の発生条件を与える Ra_c は、密度最大点が流体層の中に存在する場合には、 Rs の2価関数となる。定常対流について擾乱のエネルギーバランスを調べた結果、温度勾配による浮力は、 Ra_c の値によって対流を促進する場合と抑制する場合があることがわかった。

1 はじめに

流体が2つの拡散成分(例えば、熱と塩分)を持つとき、水平な流体層における対流は、熱的な成層と同時に塩分による成層の影響を受ける。熱的な成層の状態は、温度勾配による浮力と粘性散逸との比である熱レイリー数 Ra によって特徴づけられる。同様に、塩分による成層は、塩レイリー数 Rs によって特徴づけられる。本論文では、下が高塩で上が低塩のときに Rs が正になるように、 Rs を定義する。

2重拡散対流の発生条件は、多くの場合、密度 ρ^* が(次式のように)温度 θ^* と濃度 s^* の1次に比例するという仮定の下で解析されてきた。

$$\rho^*(\theta^*, s^*) = \rho_0[1 - \tilde{\gamma}_t(\theta^* - \theta_0) + \gamma_s(s^* - s_0)]. \quad (1)$$

ここで、 ρ_0, θ_0 , そして s_0 は適当な参照量であり、 γ_t と γ_s は θ^* と s^* に依らない膨張係数である。ブシネスク近似の下での、仮定 (1) に基づく線形安定性解析の結果、熱レイリー数 Ra がある臨界値を越えたときに対流が発生することがわかっている [1,2]。臨界熱レイリー数 Ra_c は塩レイリー数 Rs の関数である。 Rs がある閾値よりも大きいときには振動的な対流が発生し、 Rs がその閾値より小さいときには定常な対流が発生する。どちらの対流が起こる場合でも、 Ra_c は Rs の増加関数である。つまり、濃度勾配による浮力は、 Rs が正ならば伝導状態を安定化するし、 Rs が負ならば不安定化する。

一般に、温度と濃度の変動幅が小さいときには、式 (1) が、多くの流体の密度変化をよく近似する。しかし、幾つかの例外を指摘することができる。例えば、よく知られているように、水の密度は温度が 4 度の付近で最大になる。水の層の温度範囲に 4 度が含まれるときには、その水の密度変化は (1) で近似することができず、温度について非線形の密度変化を考える必要がある。密度最大点を持つ流体としては、水以外にも、液体ヘリウム [3] や合金の mercury cadmium telluride (MCT) [4,5] が挙げられる。MCT は赤外線検知器等に使われる半導体の一種である。MCT の結晶化の過程では、均一な結晶を得るために、対流を抑制することが必要とされている。したがって、対流の発生に対する非線形な密度変化の影響は、物理的に興味深いだけでなく、工学的にも重要な問題である。

Veronis は、次式で表される 2 次の密度分布を仮定して、熱対流の安定性を解析した [6]

$$\rho^*(\theta^*) = \rho_0[1 - \gamma_t(\theta^* - \theta_0)^2].$$

ここで、 $\gamma_t(> 0)$ は、温度 θ^* に依存しない熱膨張係数である。この仮定の下で、熱伝導状態の密度分布は、下層に不安定な層を上層に安定な層を作る。安定な層の相対的な厚さが増えるにつれて、臨界レイリー数は増加する。また、不安定の結果発生する定常な対流は、下層の不安定な層に閉じ込められてはいなくて、安定な上層にも浸透している。このような対流は浸透対流 (penetrative convection) と呼ばれている。

Antar は、次の密度分布を仮定し、浸透対流に対する濃度勾配の影響を考えた [4, 5]:

$$\rho^*(\theta^*, s^*) = \rho_0[1 - \gamma_t(\theta^* - \theta_0)^2 + \gamma_s(s^* - s_0)]. \quad (2)$$

彼は、 Rs が正の領域、つまり、濃度勾配が安定化効果を働かせる場合について調

べたが、対流の発生条件は、線形密度分布 (1) のときの発生条件と定性的に同じであった。臨界熱レイリー数 Ra_c は Rs の単調増加関数であり [4]、この意味で、少なくとも Rs が正の場合は、濃度勾配の影響は "単調" であると言える。

Hadji と Jin は、密度分布 (2) を仮定し、Antar の系とは少し違った系において、 Rs が負の領域を考えた [7]。彼らの系では、流体層の上に氷の層が乗っており、これが凍ることによって対流が引き起こされる。この少し複雑な系において、彼らは、臨界熱レイリー数が Rs/Ra に比例するパラメタの増加関数であることを示した。

ここで、2 次の密度分布 (2) の下では、不安定な層と安定な層が共存していることを思い起こそう。このとき、温度勾配による浮力は、不安定化効果と安定化効果のどちらにも働く可能性がある。したがって、温度勾配の影響がいつでも "単調" である必要はないと考えられる。もし、温度勾配の影響が "単調" でなくなるとしたら、そのような現象はどのようにして現れ得るだろうか。 Rs が正のときには、濃度勾配による浮力が伝導状態を安定化する。したがって、対流が発生するとしたら、それは温度勾配による浮力の不安定化効果が、(温度勾配及び濃度勾配による) 安定化効果に打ち勝ったときである。 Rs が正の領域で臨界 Ra が Rs の増加関数であること [4] は、これを反映している。一方、 Rs が負のときには、濃度勾配による浮力は伝導状態を不安定化する。 Rs がある負の値よりも低いときには、たとえ温度勾配がなかったとしても、濃度勾配による浮力のみで対流が発生し得る。したがって、 Rs が負のときには、正のときと比べて、対流の発生に対する温度勾配の不安定化効果と安定化効果を容易に見つけられる可能性がある。

本論文では、対流の発生に対する温度勾配の影響を調べるために、Antar の調べた系と全く同じ系を、もう一度調べなおしてみる。我々は、密度分布として (2) を仮定し、伝導状態の線形安定性を調べる。擾乱の支配方程式は、Antar の使ったものと本質的に同じである。Antar は Rs が正の領域のみを扱ったが、我々は Rs が正の領域と負の領域との両方を調べる。

2 定式化

2 枚の無限に広い板の間に満たされた流体の運動を考えよう。2 枚の板は、幅 d だけ離してあり、それぞれ異なる温度に保たれているものとする。温度 θ^* と濃度 s^* は、各々、下端 $z^* = 0$ で $\theta^* = \theta_L$, $s^* = s_L$, 上端 $z^* = d$ で $\theta^* = \theta_L - \Delta\theta$, $s^* = s_L - \Delta s$ とする。(2) で与えられる 2 次の密度分布 ρ^* を仮定する。参照量を決

めるために、文献4にならって、以下のことを要請する: (i) 伝導状態の温度と濃度は、ある高さ $z^* = d_0$ において、 $\theta^* = \theta_0$, $s^* = s_0$ を満たす, (ii) 濃度を参照濃度 $s^* = s_0$ に固定したとき、密度 $\rho^*(\theta^*, s_0)$ は $\theta^* = \theta_0$ において最大 (または最小) となる。係数 γ_t と $\gamma_s (> 0)$ はそれぞれ膨張係数であり、本論文ではこれらを定数とする。我々は、ブシネスク近似を適用する、つまり、浮力項に現れる密度以外の物性値を定数とおく。これらの物性値は、参照温度 $\theta^* = \theta_0$ と参照濃度 $s^* = s_0$ における値で評価する。

代表長さ d , 代表時間 d^2/κ_t , 代表温度 $\Delta\theta$, そして代表濃度 Δs を用いて、変数を無次元化しておく。ここで、 κ_t は熱拡散係数である。無次元変数はアスタリスクなしの記号で表す。

主流として、流れのない伝導状態を考えよう。伝導状態の温度と濃度は、それぞれ、 $\bar{\theta} = \theta_L/\Delta\theta - z$ と $\bar{s} = s_L/\Delta s - z$ で与えられる。この主流に無限小擾乱を加える。支配方程式を擾乱について線形化すると、擾乱の鉛直速度 w , 温度 θ , 濃度 s を支配する方程式を得る:

$$\partial_t \nabla^2 w - Pr \{ \nabla^4 w + (\partial_{xx} + \partial_{yy}) [2Ra(h - z)\theta - Rs s] \} = 0, \quad (3a)$$

$$\partial_t \theta - w - \nabla^2 \theta = 0, \quad (3b)$$

$$\partial_t s - w - \tau \nabla^2 s = 0. \quad (3c)$$

境界条件は以下の通りである:

$$w = \frac{\partial w}{\partial z} = \theta = s = 0 \text{ at } z = 0, 1. \quad (4)$$

式(3) は、以下のように定義された5つの無次元パラメタを含む。プラントル数 Pr , ルイス数の逆数 τ , 熱レイリー数 Ra , 塩レイリー数 Rs , そして浸透パラメタ h である¹

$$Pr = \nu/\kappa_t, \quad \tau = \kappa_s/\kappa_t, \quad Ra = \gamma_t g d^3 (\Delta\theta)^2 / (\kappa_t \nu),$$

$$Rs = \gamma_s g d^3 \Delta s / (\kappa_t \nu), \quad h = d_0/d.$$

ここで、 ν は動粘性係数、 κ_s は塩拡散率、そして、 g は重力加速度である。 Ra が正のときに密度は最大値をとり、負のときには最小値をとる。 Rs が正のときには、濃度勾配は安定成層に寄与し、負のときには、不安定成層に寄与する。熱的及び濃度的な伝導状態においては、密度が最大 (または最小) となる点は、 $z = h - Rs/(2Ra)$

¹我々のパラメタ Ra と h は、文献4における $\lambda_0 R/2$ と $1/\lambda_0$ に対応している。

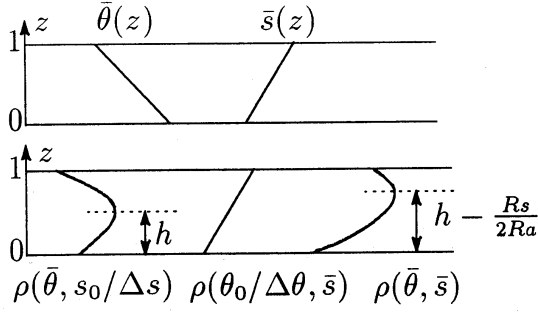


図 1: 伝導状態の温度 $\bar{\theta}$, 濃度 $\bar{s}$ と, 対応する密度 $\rho(\bar{\theta}, \bar{s})$ ($Ra > 0$ かつ $Rs < 0$ の場合). $\rho(\bar{\theta}, s_0/\Delta s)$ と $\rho(\theta_0/\Delta\theta, \bar{s})$ は, それぞれ, 温度勾配のみによる密度分布, 濃度勾配のみによる密度分布を表している.

である (図 1 参照). 浸透パラメタ h は, ($0 \leq h \leq 1$ の場合) 温度勾配だけによる不安定な層の厚さを示す. プラントル数 Pr とルイス数の逆数 τ は, 海水での値 ($Pr = 7$, $\tau = 0.01$) に固定する.

擾乱をノーマルモードの形

$$\begin{pmatrix} w \\ \theta \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{w}(z) \\ \tilde{\theta}(z) \\ \tilde{s}(z) \end{pmatrix} \exp[\sigma t + i(k_x x + k_y y)]. \quad (5)$$

で書いて, (3) に代入すると, 以下の固有値問題を得る:

$$Pr \left\{ \mathcal{L}^2 \tilde{w} - k^2 \left[2Ra(h - z)\tilde{\theta} - Rs \tilde{s} \right] \right\} = \sigma \mathcal{L} \tilde{w}, \quad (6a)$$

$$\mathcal{L} \tilde{\theta} + \tilde{w} = \sigma \tilde{\theta}, \quad (6b)$$

$$\tau \mathcal{L} \tilde{s} + \tilde{w} = \sigma \tilde{s}. \quad (6c)$$

ここで, $k^2 = k_x^2 + k_y^2$, $\mathcal{L} = \frac{d^2}{dz^2} - k^2$ である. 境界条件は以下の通り:

$$\tilde{w} = \frac{d\tilde{w}}{dz} = \tilde{\theta} = \tilde{s} = 0 \text{ at } z = 0, 1. \quad (7)$$

定常な擾乱 ($\sigma = 0$) の場合には, 固有値問題をさらに簡単化することができる. 式 (6b) と (6c) から, $\mathcal{L}(\tilde{\theta} - \tau \tilde{s}) = 0$ を得る. ここで, 境界条件 $\tilde{\theta} - \tau \tilde{s} = 0$ に注意すると, 結局 $0 \leq z \leq 1$ において $\tilde{\theta} = \tau \tilde{s}$ という関係が得られる. したがって, 定常擾乱の支配方程式は, 新しいパラメタ H を用いて, 以下のように書きなおすこ

とができる.

$$\mathcal{L}^2 \tilde{w} - 2Ra k^2 (H - z) \tilde{\theta} = 0, \quad \left(H \equiv h - \frac{Rs}{2\tau Ra} \right), \quad (8a)$$

$$\mathcal{L} \tilde{\theta} + \tilde{w} = 0. \quad (8b)$$

式(8)は, 定常対流の発生条件が Ra と新しいパラメタ H のみによって決まり, Pr には依存しないことを示している. 式(8)は, 2次の密度分布に対する熱対流の擾乱方程式 [6], そして, 2円筒間の間隔が狭いときの Taylor 問題の擾乱方程式 [8] と本質的に同じものである.

与えられた Pr, τ, h そして Rs にたいして, 伝導状態が中立安定になるような $Ra(k)$ を中立曲線と呼ぶ. 中立曲線上で, $d(Re\sigma)/dRa$ が正(負)のとき, 中立曲線の最小(最大)値を与える Ra を臨界 Ra と呼び, Ra_c と表す. また, 対応する波数を臨界波数と呼ぶ. 振動対流の発生する Ra_c を求めるときには, 式(6)で $Re\sigma = 0$ とおいたものと境界条件(7)を用いた. 定常対流については, 式(8)と境界条件(7)を用いた. これらの式を数値的に解くために, チェビシェフ選点法を使った. 臨界 Ra_c の精度は, 相対誤差で $O(10^{-6})$ であった.

3 安定性

式(6) [または(8)] と境界条件(7)は, 以下の変換に対して不変である:

$$Ra \rightarrow -Ra, \quad h \rightarrow 1 - h, \quad z \rightarrow 1 - z. \quad (9)$$

そこで, 以下では, Ra が正の領域の結果のみを示すことにする. 式(8)の場合, この変換は, 同時に

$$H \rightarrow 1 - H$$

を意味する.

図2は, 振動不安定の臨界レイリー数 Ra_c を示す. $Ra > Ra_c$ では, 伝播波対が成長する. 臨界熱レイリー数 Ra_c は塩レイリー数 Rs の増加関数である. このことは, 線形の密度分布(1)に基づく結果と定性的に一致している [1,2]. また, h が減るとともに(つまり, 不安定な層の厚さが薄くなるとともに) Ra_c は増える. このことは, 2次の密度分布を仮定した熱対流の発生条件と定性的に一致している [6]. これらの一致は, 文献4でも指摘されている. 臨界波数は, Rs の増加関数, h の

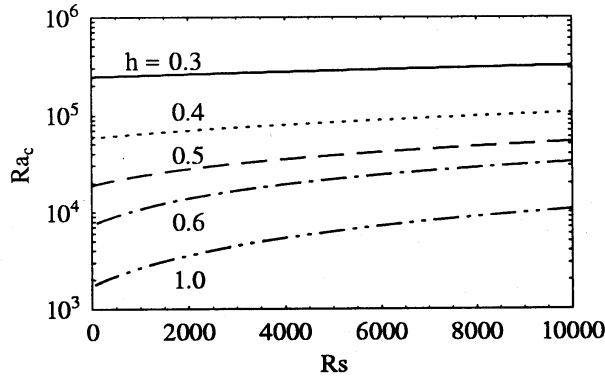


図 2: 振動モードに対する臨界熱レイリー数 Ra_c . 線のそばの数字は h の値を表す.
 $Pr = 7, \tau = 0.01$.

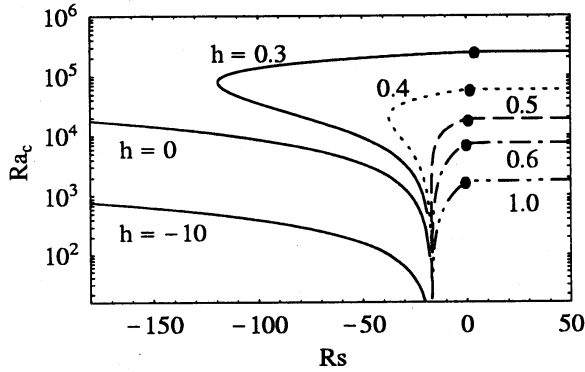


図 3: 臨界熱レイリー数 Ra_c と塩レイリー数 Rs の関係. Rs の値が黒丸で示した
 閾値より小さいときには定常モードが, 大きいときには振動モードが臨界を与える.
 $Pr = 7, \tau = 0.01$.

減少関数である. 臨界波数の h 依存性については, $Rs = 0$ における定常対流の場合について, Veronis が詳しく議論している [6].

図 3 は, 比較的低い Rs に対する Ra_c を示す. 臨界曲線の左側で, 伝導状態が不安定になる. 臨界モードは, 図中に黒丸で示した閾値よりも高い Rs に対しては振動的であり, 閾値より低い Rs に対しては定常である. 臨界曲線にそって Ra が減少するにつれて, 定常モードに対する臨界波数は減少する. $Ra_c = 0$ のとき, 安定性特性は h に依存せず, 臨界波数 $k = 3.1163$ において $Rs = -17.078$ となる. ここで, $Ra = 0$ のときには, 式 (8) が, 純粹に濃度場だけで駆動される対流を表すことに注意しよう. 濃度と温度の役割を入れかえると, $Ra = 0$ における濃度場駆動対流は, 線形密度分布に基づく通常のレイリー・ベナール対流とみなすことができる. したがって, 臨界塩レイリー数 $Rs (= -17.078)$ は, $-\tau Ra_0$ と一致しなくて

はいけない．ここで， $Ra_0 (= 1707.8)$ は，線形密度分布に基づくレイリー・ベナール対流の臨界レイリー数である．

パラメタ h の範囲が $0 < h < 0.5$ のとき， Ra_c が Rs の 2 価関数になっていることに注目しよう． Ra_c が 0 から増えるにしたがって， Rs は減少し，転回点を過ぎて，増加に転じる． Ra の値に応じて，対流の発生に対する温度勾配による浮力の効果に変化している．この意味で，定常対流の発生条件に対する温度勾配の影響は，”単調”ではないと言うことができる．これは，線形密度分布 (1) に基づく安定性解析の結果とは，定性的に異なっている．

定常対流に対する浮力の効果について，より詳細に議論するために，臨界擾乱のエネルギーバランスを考えてみよう．式 (6a) に $\bar{w}$ をかけて，積分すると，以下の式を得る．

$$\begin{aligned} \text{Re}\sigma E &= I_t + I_s - I_d, \\ E &= Pr^{-1} \int_0^1 (|D\tilde{w}|^2 + k^2|\tilde{w}|^2) dz, \quad I_t = 2k^2 Ra \int_0^1 (h - z) \text{Re}(\tilde{w}\tilde{\theta}) dz, \\ I_s &= -k^2 Rs \int_0^1 \text{Re}(\tilde{w}\tilde{s}) dz, \quad I_d = \int_0^1 (|D^2\tilde{w}|^2 + 2k^2|D\tilde{w}|^2 + k^4|\tilde{w}|^2) dz, \end{aligned} \quad (10)$$

ただし，バーは複素共役を示し，また， $D \equiv \frac{d}{dz}$ である．積分 I_t は温度勾配による浮力の効果を， I_s は濃度勾配による浮力の効果を， I_d は粘性散逸を表す．図 4 に， $h = 0.4$ の臨界曲線にそっての， I_t/I_d と I_s/I_d の変化を示した．臨界曲線上では， $\text{Re}\sigma = 0$ なので， $I_t/I_d + I_s/I_d = 1$ が成り立つことを注意しておく．臨界レイリー数が小さいとき ($Ra_c < 11700$)， I_s は正の値をとり， I_t は負である．このことから，対流を駆動しているのは濃度勾配による浮力であり，温度勾配による浮力是对流を抑制していることがわかる．これが，図 3 の $Ra_c < 11700$ では， Rs が減少するにつれて Ra_c が増加していた理由である．図 5 に示したように，このとき対流ロールは流体層のほとんど全層に広がっている．これは，正の濃度勾配が，流体層全域において，不安定成層に寄与しているためである．

Ra_c がさらに増加すると， I_t は増加し I_s は減少する．そして， $Ra_c > 25500$ で， I_t が I_s よりも大きくなる．つまり，対流は主に温度勾配による浮力で駆動されるようになる．図 6 には，不安定な層の厚さがほぼ 0.4 であるときの対流パターンを示した．下層の大きなロールは $z \simeq 0.6$ まで広がっており，その上に小さな逆回転のロールが存在している．この種の浸透対流は，2 次の密度分布を持つ熱対流においてよく知られている．

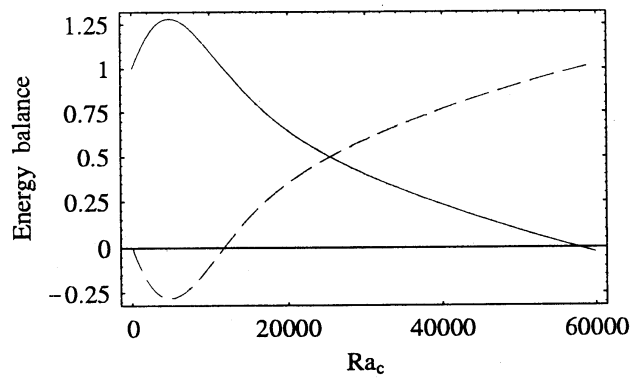


図 4: 定常モードの臨界曲線上でのエネルギーバランス. 実線は I_s/I_d , 破線は I_t/I_d である. $h = 0.4, Pr = 7, \tau = 0.01$.

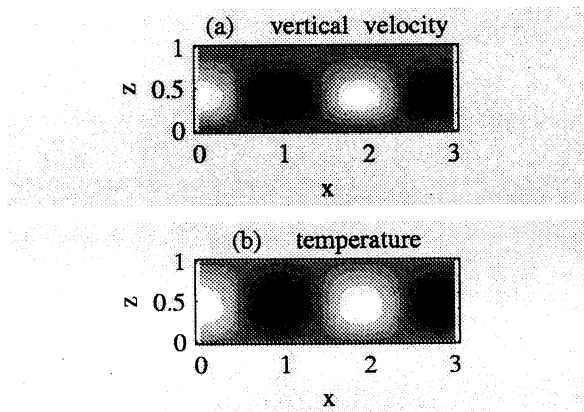


図 5: 擾乱の (a) 鉛直速度と (b) 温度の分布. 濃度分布は温度分布に比例している. $h = 0.4, Rs = -30, Ra = 7893, Pr = 7, \tau = 0.01$.

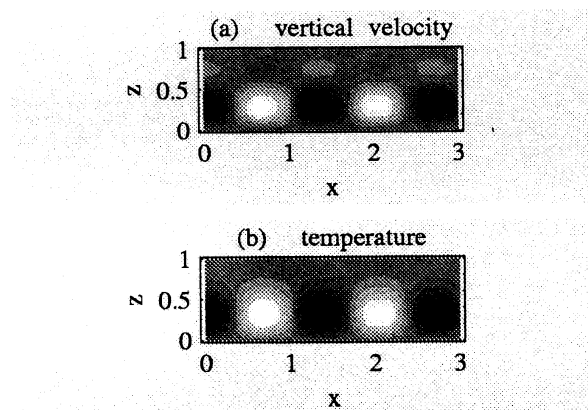


図 6: 図 5 に同じ. ただし, $Ra = 34664$.

参考文献

- [1] D. A. Nield, "The thermohaline Rayleigh-Jeffreys problem," *J. Fluid Mech.*, **29**, 545 (1967).
- [2] P. G. Baines and A. E. Gill, "On thermohaline convection with linear gradient," *J. Fluid Mech.*, **37**, 289 (1969).
- [3] R. W. Walden and G. Ahlers, "Non-Boussinesq and penetrative convection in a cylindrical cell," *J. Fluid Mech.* **109**, 89 (1981).
- [4] B. N. Antar, "Penetrative double-diffusive convection," *Phys. Fluids*, **30**, 322 (1987).
- [5] B. N. Antar, "Penetrative double diffusive convection: effects of the Lewis and Prandtl numbers," *Int. J. Heat Mass Transfer*, **31**, 895 (1988).
- [6] G. Veronis, "Penetrative convection," *Astrophysical J.*, **137**, 641 (1963).
- [7] L. Hadji and X.-X. Jin, "Penetrative convection induced by the freezing of seawater," *Int. J. Heat Mass Transfer* **39**, 3823 (1996).
- [8] S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and hydromagnetic stability* (Dover, New York, 1981), §71.