

Partially entanglement breaking channel and quantum benchmark problems

京都大学大学院理学研究科・物理学第一教室 並木 亮

Ryo Namiki

Department of Physics, Graduate School of Science,

Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan

I. はじめに

2 準位の量子系は量子ビット (qubit) と呼ばれ、量子情報処理では最も基本的な要素である。多準位の量子系の一部を単量子ビットとして利用することができるし、多準位系を多数の量子ビットの複合系と考えることもできる。多準位系は常に単量子ビットを含んでおり、原理的には単量子ビットより高度な量子情報操作に用いることができるはずである。このような量子系の次元の高さに関係して量子系のコヒーレンスの強さを定量的に取り扱う概念としてシュミット数というエンタングルメント測度が知られている。2 体の量子もつれ状態は 1 体の量子系のダイナミクスを記述する写像 (量子チャネル) と同型であるので、シュミット数の概念を用いると量子ゲートのもつコヒーレンスを定量的に議論できる。面白いことに量子チャネルのシュミット数はクラウス演算子のランクという非常に単純な量と結びついており、量子系のダイナミクスに定量的な分類を与える。

量子情報理論ではダイナミクスには図 1a のように、古典チャネルであるエンタングルメント破壊チャネル (E B チャネル) とそれ以外の量子チャネルという分類がある。基本的には E B チャネルの外にあることで量子ゲートのコヒーレンスが実証される。E B チャネルとそれ以外の区別を与える基準を量子ベンチマークと呼ぶことにするが、量子ベンチマーク問題は本質的にエンタングルメント検証の問題である。したがってコヒーレンスの有無はエンタングルメントの有無に帰着できる。シュミット数の概念を量子ゲートに適用することで、量子チャネルに図 1b のような階層構造が与えられ、エンタングルメントの強度 (コヒーレンスの強さ) に基づいた定量的な量子チャネルの分類が可能になる。

本稿ではこのようなシュミット数を用いた定量的な量子ベンチマークについて解説する。エンタングルメントおよび量子チャネルの定義からはじめて、量子ベンチマークに関連する基本的な概念の説明をまとめる。シュミット数により階層構造が表れることも記述する。また、有限次元の量子ゲートの一様平均忠実度によるシュミット数の量子ベンチ

マークを示す。

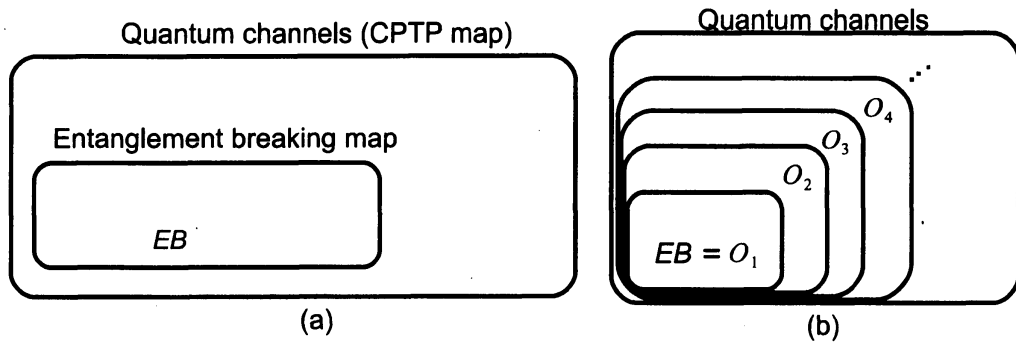


FIG. 1: (a) 量子チャネル（トレースを保存する完全正写像）全体の集合には古典情報しか伝達できないクラスである E B チャネル (Entanglement breaking channel) がある。典型的な例はフォンノイマンの射影測定 $\mathcal{E}(\rho) = \sum_j |j\rangle \langle j| \rho |j\rangle \langle j|$ であり、測定値 j の古典的な情報は維持されるが、異なる $|j\rangle$ のコヒーレントな重ね合わせの情報（位相）は消えてしまう。(b) シュミット数により量子チャネルに階層構造が与えられる。

II. QUANTUM STATE AND ENTANGLEMENT

A. Separability and Entanglement

量子力学において物理系の状態は密度行列と呼ばれるトレースが 1 となる半正定値の行列で表される。数式としては量子状態 $\rho \geq 0$ かつ $\text{Tr} \rho = 1$ などと表記する。量子情報理論で特に重要となる物理系の状態はエンタングルメント（量子もつれ）というコヒーレントな相関を持っている 2 つの系の状態である。量子的な相関を持たない状態は可分割状態 (separable states) と呼ばれ、2 つの系 A B において各系の密度行列の直積の確率混合で表される状態であり、数式としては

$$\rho = \sum p_i (\rho_i)_A \otimes (\sigma_i)_B \quad (1)$$

と表される。ここで $\{p_i\}_i$ は確率分布 $\sum_i p_i = 1$ かつ $p_i \geq 0$ である。状態が可分割でない場合、状態はエンタングルメントを有するという。すなわち、量子もつれ状態の定義は

$$\rho \neq \sum p_i (\rho_i)_A \otimes (\sigma_i)_B \quad (2)$$

となることである。どうがんばっても Eq. (1) のようには表現できない状態は古典的な確率混合では表せない相関を有しているはずであり、それが量子的な相関すなわちエンタングルメントというわけである。後々の都合上、可分割状態の集合に以下の記号を割り当てて置く、

$$Sep. = S_1 = \left\{ \rho | \rho_{AB} = \sum p_i (\rho_i)_A \otimes (\sigma_i)_B \right\}, \quad (3)$$

$Sep.$ は凸集合である (任意の $\rho_1 \in Sep.$ と $\rho_2 \in Sep.$ に対して $p \in [0, 1]$ として $p\rho_1 + (1-p)\rho_2 \in Sep.$ が成立する)。図2のように量子もつれ状態 (の集合) は $Sep.$ の補集合ということになる。後の説明でも明らかとなるがこの構造は図1a と同一のものである。

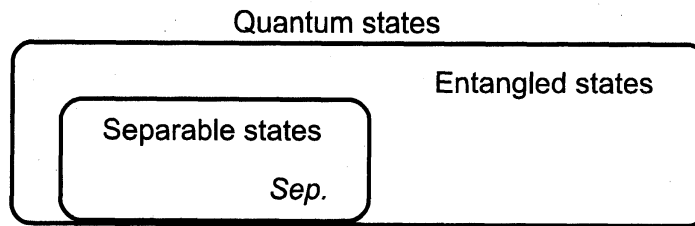


FIG. 2: 量子もつれ状態と可分割状態

B. Schmidt decomposition and Schmidt rank

d を2以上の整数として、2つの d 準位の粒子を考える。2体系の純粋状態は与えられた分割 AB のなかでそれぞれ基底 $\{|e_j\rangle\}_{j=0,1,\dots,d-1}, \{|f_j\rangle\}_{j=0,1,\dots,d-1}$ を適当に選べば

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{j=0}^{d-1} a_j |e_j\rangle_A \otimes |f_j\rangle_B \quad (4)$$

という形に書くことができる (規格化条件は $|a_j|^2$ が確率分布を与える $\sum_{j=0}^{d-1} |a_j|^2 = 1$ である)。この形をシュミット分解と呼び、係数 a_j をシュミット係数と呼ぶ [1]。位相を除いてシュミット係数 a_j の組み合わせは一意に定まる。ゼロでないシュミット係数の数をシュミットランクと呼び、これは縮約密度行列のランク

$$SN(\hat{\psi}_{AB}) := \text{rank}(\text{Tr}_B \hat{\psi}_{AB}) = \text{rank}(\text{Tr}_A \hat{\psi}_{AB}) \quad (5)$$

に対応する。シュミットランクが1の場合、 $|\psi\rangle_{AB} = |\psi_a\rangle |\psi_b\rangle$ のように相関の無い (decouple) した積状態 (product state) である。積状態の密度行列は

$$\hat{\psi} := |\psi\rangle \langle \psi| = |\psi_a\rangle \langle \psi_a| \otimes |\psi_b\rangle \langle \psi_b| \quad (6)$$

であり、Eq. (1) のように表されるので可分割である (以下でも、純粋状態の密度行列は $\hat{\psi} := |\psi\rangle\langle\psi|$ などという表記を用いる。これは標準的に使われている表記である)。シュミットランクが2以上の場合、純粋状態 $|\psi\rangle_{AB}$ の密度行列 $\hat{\psi} = |\psi\rangle\langle\psi|$ は Eq. (1) のようには表すことができず、量子的にもつれている。このことから、すべての相関を持つ純粋状態はエンタングルメントを有するといえる。シュミットランクはコヒーレントに重ね合わさっている基底の数に対応しており、シュミットランクが大きい状態の方が強いエンタングルメント有している、と基本的には考えて良い。

C. Maximally entangled state (MES)

もっとも重要な量子もつれ状態は最大もつれ状態 (maximally entangled state) と呼ばれるもので d 個の自由度がすべて均等に重ね合わさった状態である。最大もつれ状態は $\{|j\rangle\}_{j=0}^{d-1}$ を固定した基底ベクトルとして

$$|\Phi\rangle_{AB} := \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{j=0}^{d-1} |j\rangle_A |j\rangle_B \quad (7)$$

などと表現される。最大もつれ状態には次のように局所系の射影に関して“相対状態”を与えるという性質がある

$$\langle\psi||\Phi\rangle = |\psi^*\rangle/\sqrt{d}. \quad (8)$$

ここで ψ^* は ψ の複素共役と呼ばれ与えられた基底ベクトルを用いて

$$|\psi^*\rangle = \sum_{j=0}^{d-1} \langle j|\psi\rangle |j\rangle \quad (9)$$

と定義される。Eq. (8) は I を恒等演算とし、部分系の指標 A と B を具体的に付けて

$$\begin{aligned} \langle\psi|_A \otimes I_B |\Phi\rangle_{AB} &= |\psi^*\rangle_B / \sqrt{d} \\ I_A \otimes \langle\psi|_B |\Phi\rangle_{AB} &= |\psi^*\rangle_A / \sqrt{d} \end{aligned} \quad (10)$$

のようになる関係のことを略記したものであると解釈してほしい。

D. Schmidt-number as a measure of entanglement

シュミット数 (Schmidt number) [2] はエンタングルメントに寄与する自由度の数を表す量で、純粋状態であれば、ゼロでないシュミット係数の数で与えられる。すなわち純粋

状態に関しては、Eq. (5) で先取りように、縮約密度行列のランク $\text{rank}(\text{Tr}_B \psi_{AB})$ である。混合状態ではすべての純粋状態への分解を考えて最大のシュミット数の最少をとる、

$$SN(\rho) = \min_{\{p_i, \psi_i\}} \{ \max_i \text{rank}(\text{Tr}_B \hat{\psi}_i) \}. \quad (11)$$

ここで最少化するアンサンブル $\{p_i, \psi_i\}$ は

$$\rho = \sum_i p_i \hat{\psi}_i \quad (12)$$

を満たすもの全体である。一般に、混合状態のエンタングルメントは純粋状態のエンタングルメント測度を S とすると

$$S(\rho) = \min_{\{p_i, \psi_i\}} \sum_i p_i S(\hat{\psi}_i) \quad (13)$$

のように純粋状態の混合への分解に対して最少値をとることで定義できる。このようなエンタングルメント測度の混合状態への定義の仕方は Convex roof extension と呼ばれる [3, 4]。Eq. (11) のシュミット数もシュミットランクの Convex roof extension である。

シュミット数が k 以下の状態の集合を

$$S_k = \{ \rho | SN(\rho_{AB}) \leq k \}, \quad (14)$$

と書くことにする。 S_k は凸集合であり、 $S_k \subset S_{k+1}$ が成立する。可分割状態の集合 Eq. (3) は $k=1$ の場合となる。すなわち

$$Sep. = S_1 = \left\{ \rho | \rho_{AB} = \sum p_i (\rho_i)_A \otimes (\sigma_i)_B \right\} = \{ \rho | SN(\rho_{AB}) = 1 \}. \quad (15)$$

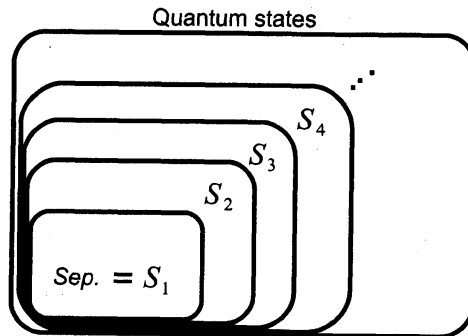


FIG. 3: シュミット数により量子状態に階層構造が与えられる。

III. QUANTUM CHANNEL AND AVERAGE GATE FIDELITY

A. Quantum channel

物理的な操作や物理系の時間発展は密度行列を別の密度行列に変換する正写像で表されることになるが、物理的な操作が部分系に対する操作だとしても全体系の密度行列の正値性は損なわれてはならないことが要請される。この要請により物理的な操作はトレースを保存する完全正写像（量子チャネル）で記述されることになる。数式としては状態の変化が $\rho' = \mathcal{E}(\rho)$ と表されるとして、物理過程 $\mathcal{E}$ の完全正値性を、任意の密度行列 ρ_{AB} に対して

$$\mathcal{E}_A \otimes I_B(\rho_{AB}) \geq 0 \quad (16)$$

であるなどと表記する。ここで I は恒等演算である。部分系 A になんらかの物理的な操作を施したとして、 A を含む任意の物理系 AB の状態 $\mathcal{E}_A \otimes I_B(\rho_{AB})$ はやはり密度行列になっているべし、というわけである。

量子チャネル $\mathcal{E}$ が次元 d の密度行列の間の変換である場合、 $\mathcal{E}$ のパラメーターは最大もつれ状態 Eq. (7) を用いて定義される状態

$$J_{\mathcal{E}} := \mathcal{E}_A \otimes I_B(\hat{\Phi}_{AB}) \quad (17)$$

で完全に決まる。 $J_{\mathcal{E}}$ はプロセス行列または Choi-Jamiołkowski 同型または Choi 行列などと呼ばれる。完全正値性は密度行列の正値性として単に

$$J_{\mathcal{E}} = \mathcal{E} \otimes I(\hat{\Phi}) \geq 0 \quad (18)$$

と表すことができる。以下、特に断らずに、 d 次元の部分系からなる密度行列と d 次元系に作用する量子チャネルを扱うことにする。

注意事項：ここでは「量子ゲート (Quantum gate)」・「量子チャネル/量子通信路 (Quantum channel)」・「物理過程 (Physical process)」等はすべてトレースを保存する完全正写像 (completely positive trace-preserving map/CPTP map/CPT) を示す用語であり、特に区別せずに使用している。ただし「量子ゲート」と言う場合は特定のユニタリー操作を近似するものを想定している場合が多い。なお、「物理過程」の「過程」は「プロセス・トモグラフィ」の「プロセス」である。“In quantum theory, any physical process is described by a completely positive trace-preserving map....” というような意味で用いられる。

B. Average gate fidelity

もっとも単純な量子ゲートの評価として、すべての状態に関して一様に平均した忠実度 (Uniform average gate fidelity) が考えられる。あるユニタリー変換 U が成功する平均の確率として、一様平均の忠実度を

$$\bar{F}(\mathcal{E}) := \int d\psi \langle \psi | U^\dagger \mathcal{E}(|\psi\rangle \langle \psi|) U | \psi \rangle \quad (19)$$

と定義しよう [5–7]。ここで $d\psi$ は Haar measure と呼ばれるもので、一様にすべての状態を足し上げるときに用いる記号である。ここでは d 次元の系の状態 ψ (のランダム平均) を考えており、 $\bar{F}(\mathcal{E})$ が確率 (1 以下の非負の値をとる) となるように規格化を

$$\int d\psi |\psi\rangle \langle \psi| = \mathbb{1}/d \quad (20)$$

とする。 $\mathbb{1}$ は d 次元の単位行列である。Eq. (19) の一様平均忠実度 $\bar{F}(\mathcal{E})$ は連続なパラメタの積分の形で与えてあるが、 $SU(d)$ の生成元等を用いて有限の和の形に書き下すこともできる [7]。実際、プロセスのトモグラフィーは d^4 程度の有限の数の状態への射影 (入力の基底の数 $\times$ 測定の基底の数 $\sim d^4$) を用いて実行される。

物理過程 $\mathcal{E}$ が理想のユニタリーゲートになっていたとしよう。その場合

$$\mathcal{E}(|\psi\rangle \langle \psi|) = U |\psi\rangle \langle \psi| U^\dagger \quad (21)$$

となるので、この式を Eq. (19) に代入すれば

$$\bar{F}(\mathcal{E}) = \int d\psi \langle \psi | U^\dagger U | \psi \rangle \langle \psi | U^\dagger U | \psi \rangle = \text{Tr} \int d\psi |\psi\rangle \langle \psi| = \frac{1}{d} \text{Tr}(\mathbb{1}) = 1 \quad (22)$$

を得る。これは個々の状態 $|\psi\rangle$ が $U |\psi\rangle$ に確率 1 で変換されていれば、すべて状態の平均の変換確率も 1 となることを表している。逆に、どれかひとつの状態でも変換確率が 1 を下回ると平均の変換確率も 1 を下回ることになることは容易に推察できる。したがって、物理過程 $\mathcal{E}$ がユニタリー操作となるのは $F = 1$ のときのみである。

一様平均の忠実度 $\bar{F}(\mathcal{E})$ は Choi 行列 $J_\mathcal{E}$ Eq. (17) と最大もつれ状態の性質 Eq. (8) を用いると

$$\begin{aligned} \bar{F}(\mathcal{E}) &= d \text{Tr}[J_\mathcal{E} \int d\psi (U |\psi\rangle \langle \psi| U^\dagger)_A \otimes (|\psi^*\rangle \langle \psi^*|)_B] \\ &= \frac{1}{d+1} \left(1 + d \text{Tr}[J_\mathcal{E} U_A \hat{\Phi} U_A^\dagger] \right) \\ &= \frac{1}{d+1} \left(1 + d \langle \Phi | U_A^\dagger J_\mathcal{E} U_A | \Phi \rangle \right) \end{aligned} \quad (23)$$

のように書き直すことができる。ただし、2行目には次の関係式を用いた [8]

$$\int d\psi |\psi\rangle \langle\psi| \otimes |\psi^*\rangle \langle\psi^*| = \frac{1}{d(d+1)}(\mathbb{1} + d\hat{\Phi}). \quad (24)$$

Eq. (23) の最後の項 $\langle\Phi| U_A^\dagger J_\mathcal{E} U_A |\Phi\rangle$ は Choi 行列 $J_\mathcal{E}$ と最大もつれ状態との忠実度を示しており、Choi 行列 $J_\mathcal{E}$ が U に対応するユニタリーゲートでないと一様平均忠実度 $\bar{F}(\mathcal{E})$ が 1 にならないことを確認できる。この表式から、一様平均忠実度は、実は「与えられたゲートと理想の (ユニタリー) ゲートとの距離を示すもの」と考えることができる。ところで、Eq. (23) から次の関係式が導かれる。

$$\langle\Phi| U_A^\dagger J_\mathcal{E} U_A |\Phi\rangle \leq \bar{F}(\mathcal{E}). \quad (25)$$

左辺 $\langle\Phi| U_A^\dagger J_\mathcal{E} U_A |\Phi\rangle$ はエンタングルメント忠実度と呼ばれる量であり、Eq. (25) は「エンタングルメント忠実度は一様平均忠実度より小さい」という割と有名な不等式である。

非ユニタリーや必ずしも物理的でない変換 $M: \psi \rightarrow \psi'$ に関しても物理過程 $\mathcal{E}$ で変換が成功する確率を遷移確率 $\langle\psi'| \mathcal{E}(\hat{\psi}) |\psi\rangle$ のように表すことができる。適当な入力状態の集合 $\{|\psi_i\rangle\}$ とそれぞれに対応した標的となる状態の集合 (target states) $\{|\psi'_i\rangle\}$ を考える。さらに適当な事前分布 $\{p_i\}$ で重み付けして一般に平均忠実度を [9, 10]

$$\bar{F}[\mathcal{E}; p_i; \psi_i \rightarrow \psi'_i] := \sum_i p_i \langle\psi'_i| \mathcal{E}(|\psi_i\rangle \langle\psi_i|) |\psi'_i\rangle \quad (26)$$

と定義する。これは $M: \psi_i \rightarrow \psi'_i$ という変換タスクが確率 1 で実行されていれば 1 となる量になっており、変換タスク M の平均成功確率と読むことができる。本稿の議論では一様平均の忠実度に関してのみ具体例を示しており、ユニタリー操作を近似する量子ゲートがおもな議論の対象となっている。しかしながら、量子情報理論では明らかに非ユニタリーのマップを想定した「物理的に不可能なプロセス」を定量的に考える研究は重要な位置を占めている [11, 12]。それらは基本的には非直交な状態の組の変換という形式で議論できる。一般化した平均忠実度はそのような枠組みを意識して導入されたものである。

IV. ENTANGLEMENT BREAKING AND QUANTUM BENCHMARK

A. Entanglement breaking (EB) channel

量子情報理論では量子的な重ねあわせを保ったまま並列に演算を行なうことが本質であり、エンタングルメントを維持できる物理的な操作が重要であると考えられる。エン

タングルメントを完全に切る操作/全く維持できない操作としてエンタングルメント破壊チャネル (EB チャネル) を次のように定義する。任意の状態 ρ_{AB} に対して

$$\mathcal{E}_A \otimes I_B(\rho_{AB}) = \sum p_i(\rho_i)_A \otimes (\sigma_i)_B \in Sep. \quad (27)$$

が成立するとき $\mathcal{E}$ を EB チャネルと呼ぶ [13]。右辺は Eq. (1) で定義した可分割状態であり、この操作は操作の対象となる系 A と外部の系 B の間のエンタングルメントを切断する操作である。ところで Eq. (27) は、任意の状態に対して操作の後でエンタングルメントがなくなるという式であるが、Eq. (17) の最大もつれ状態 $|\Phi\rangle$ を用いると EB チャネルであることは

$$J_{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_A \otimes I_B(\hat{\Phi}_{AB}) = \sum p_i(\rho_i)_A \otimes (\sigma_i)_B \quad (28)$$

となることと同値である [13]。したがって Choi 行列 $J_{\mathcal{E}}$ が可分割であることが EB チャネルの定義だと思っても良い。この場合、任意の状態を考える必要はなく最大もつれ状態がエンタングルメントを失うかどうかだけに着目すれば良い。

Eq. (2) においてエンタングルメントの存在を可分割な密度行列で表せない状態と定義したのと同様にエンタングルメントを維持できる操作を

$$\mathcal{E}_A \otimes I_B(\rho_{AB}) \neq \sum p_i(\rho_i)_A \otimes (\sigma_i)_B \quad (29)$$

となることで定義する。このようなエンタングルメントを維持できる操作は量子的並列性を有するチャネルであるが通用の名前が付いていない (Quantum domain channel と呼ばれることもある)。それはそれとして、量子チャネルに対するエンタングルメントの概念が Eq. (29) で与えられる (図 4 参照)。後々の都合上、EB チャネルの集合に以下の記号を割り当てておく [14, 15]。

$$EB = \mathcal{O}_1 = \{\mathcal{E} | J_{\mathcal{E}} \in Sep.\}. \quad (30)$$

EB は凸集合である。Eq. (3) の可分割状態の集合 $Sep.$ と同様に、 EB の外側にいれば量子的並列性 (コヒーレンス) を担保できることになる (図 1 も参照)。

繰り返しとなるが、量子情報理論では量子的な重ねあわせを保ったまま演算を行なうことが本質であり、エンタングルメントを維持できる物理的な操作が重要であると考えられる。与えられた操作が EB チャネルの場合、エンタングルメントは維持できないので量子情報処理にはあまり役に立ちそうにない。逆に与えられた操作が EB チャネルでない場合、量子的な重ねあわせを維持したまま演算が実行されたと見なすことができるであ

ろう。したがって与えられた操作あるいは実験で実装した量子ゲート $\mathcal{E}$ が Eq. (29) のようになることが量子コヒーレンスの実証と見なせる。数学的な構造がエンタングルメントの検証と同じものになっていることは Eq. (1) と Eq. (29) を比べれば納得できるだろう。このような文脈に基づいて量子ゲートのコヒーレンスを実証する試みは近年「量子ベンチマーク」をキーワードとして研究が進められている [9, 10, 16–23]。以下、量子ベンチマークの説明に入る前に、E B チャンネルについてもっと詳しく述べる。

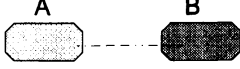
Quantum state $\rho \geq 0 \quad \text{Tr } \rho = 1$ 	Quantum channel (CPTP) $\rho' = E(\rho) \quad E_A \otimes I_B(\Phi) \geq 0$ 
Separable (Not entangled) $\rho_{AB} = \sum_i p_i \rho_{Ai} \otimes \rho_{Bi}$	Entanglement breaking $E_A \otimes I_B(\Phi) = \sum_i p_i \rho_{Ai} \otimes \rho_{Bi}$
Entanglement verification To verify inseparability $\rho_{AB} \neq \sum_i p_i \rho_{Ai} \otimes \rho_{Bi}$	Quantum benchmarks To verify Quantum domain $E_A \otimes I_B(\Phi) \neq \sum_i p_i \rho_{Ai} \otimes \rho_{Bi}$

FIG. 4: 量子状態と量子操作における可分割性

B. Kraus representation and Measure&Prepare (MP) scheme

完全正写像はクラウス表現（演算子和の表現）を持つことが知られている。すなわち物理過程は必ず

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_m A_m \rho A_m^\dagger \quad (31)$$

$$\text{subject to } \sum_m A_m^\dagger A_m = \mathbb{1} \quad (32)$$

という形の演算子和で表現できる。 A_m をクラウス演算子と呼ぶ。 $A_m \rho A_m^\dagger \geq 0$ であることに注意すると物理過程 $F(\mathcal{E})$ は指標 m で表される過程の古典的な混合であると解釈でき

る。別の言い方をするなら、クラウス演算子 A_m は確率 $\text{Tr}[A_m \rho A_m^\dagger] = \text{tr}[A_m^\dagger A_m \rho]$ で選ばれ、異なる m の間に量子的な干渉効果は無い。Eq. (32) は確率の保存であり、

$$\text{Tr} \mathcal{E}(\rho) = \text{Tr} \sum_m A_m \rho A_m^\dagger = \text{Tr} \left[\left(\sum_m A_m A_m^\dagger \right) \rho \right] = \text{Tr}(\mathbb{1} \rho) = \text{Tr} \rho = 1 \quad (33)$$

によりトレースの保存条件と等しいことが確かめられる。

クラウス表現上では次のように E B チャンネルが定義できる。E B チャンネルにはすべてのクラウス演算子がランク 1 となるクラウス表現が存在する。

$\mathcal{E}$ is entanglement breaking

$$\Leftrightarrow \text{There exists a Kraus representation s.t., } \text{rank}(A_m) = 1 \text{ for all } m. \quad (34)$$

クラウス演算子のランクを 1 として $A_m = |P_m\rangle \langle m|$ と書けば

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\rho) &= \sum_m A_m \rho A_m^\dagger \\ &= \sum_m \langle m| \rho |m\rangle |P_m\rangle \langle P_m| \end{aligned} \quad (35)$$

となる。これは $\{|m\rangle\}_m$ に対応する測定を実行して測定値 m が得られた場合に状態 $|P_m\rangle \langle P_m|$ を返す物理過程と解釈することができる。Eq. (32) の確率保存条件は

$$\sum_m A_m^\dagger A_m = \sum_m |m\rangle \langle m| = \mathbb{1} \quad (36)$$

のように $\{|m\rangle\}_m$ が P O V M (Positive-operator valued measure) を成すことに対応している。 $\{|m\rangle\}_m$ は状態としては規格化されていないが、 $\{|P_m\rangle\}_m$ は規格化された状態達である。EB チャンネルは、このように測定と状態準備を行なうので Measure&Prepare (MP) scheme と呼ばれる。繰り返しになるが、E B チャンネルでは量子系を測定によってトレースアウトして古典情報に一回変換してしまうので、量子的な相関は消えてしまう。実際、最大もつれ状態の片割れに作用させれば、

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_A \otimes I_B(\hat{\Phi}_{AB}) &= \frac{1}{d} \sum_m (|P_m\rangle \langle P_m|)_A \otimes \left(\sum_{i,j} \langle m|i\rangle \langle j|m\rangle |i\rangle \langle j| \right)_B \\ &= \frac{1}{d} \sum_m (|P_m\rangle \langle P_m|)_A \otimes (|m^*\rangle \langle m^*|)_B \end{aligned} \quad (37)$$

のようになり ($|m^*\rangle \langle m^*|$ は Eq. (8) の相対状態の記号)、この式の右辺は Eq. (1) で定義された可分割状態となっていることが直接確認できる。このように E B チャンネルは古典的

な相関もしくは古典情報しか伝送できない古典チャネルである。測定値 m に対応した古典情報は原理的に取り出せるようになっており、E Bチャネルは「外部/環境系へ情報を漏らさず量子状態を傷つけないユニタリーゲート」とは対極の位置づけにある操作である。図 1a の説明文で触れたように、フォンノイマンの射影測定はもっとも単純に測定により非対角を消すデコヒーレンスの典型例であるが、E Bチャネルの例にもなっている。

ところで測定と状態準備を POVM $\{M_m\}$ と密度行列 $\{\rho_m\}$ を用いて形式的に

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_m \text{Tr}(M_m \rho) \rho_m \quad (38)$$

というように表すことも考えられるが、POVM の要素も密度行列も半正定値なので対角表現

$$\begin{aligned} M_m &= \sum_j |M_j^{(m)}\rangle \langle M_j^{(m)}| \\ \rho_m &= \sum_l q_l^{(m)} |P_l^{(m)}\rangle \langle P_l^{(m)}| \end{aligned} \quad (39)$$

を Eq. (38) に代入すれば Eq. (35) と同じものであることがわかる。実際、

$$|M_{j,l}^{(m)}\rangle := \sqrt{q_l^{(m)}} |M_j^{(m)}\rangle \quad (40)$$

とすれば、Eq.(38) は

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_{m,j,l} \langle M_{j,l}^{(m)} | \rho | M_{j,l}^{(m)} \rangle |P_l^{(m)}\rangle \langle P_l^{(m)}| \quad (41)$$

と書き直すことができ、

$$M_{j,l}^{(m)} := q_l^{(m)} |M_j^{(m)}\rangle \langle M_j^{(m)}| \quad (42)$$

が POVM となっていることが

$$\sum_{j,l,m} M_{j,l}^{(m)} = \sum_m \left(\sum_l q_l^{(m)} \right) \left(\sum_j |M_j^{(m)}\rangle \langle M_j^{(m)}| \right) = \sum_m M_m = \mathbb{1} \quad (43)$$

のように確認できる。

文献によっては Eq. (38) の形は Holevo Form と呼ばれている。また、各 M_m がランク 1 の射影演算子の場合には Classical-Quantum (CQ) マップ、各 ρ_m がランク 1 の射影演算子の場合には Quantum-Classical (QC) マップという呼び名がある [13]。

以上、E B チャンネルには Choi 行列とクラウス表現と関係して 3 つの定義があることを見てきた。まとめると、

$\mathcal{E}$ is entanglement breaking

$$\Leftrightarrow \mathcal{E}_A \otimes I_B(\rho_{AB}) \in \text{Sep. for any } \rho_{AB} \geq 0 \quad (44)$$

$$\Leftrightarrow J_{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_A \otimes I_B(\hat{\Phi}_{AB}) \in \text{Sep.} \quad (45)$$

$$\Leftrightarrow \text{There exists a Kraus representation s.t., } \text{rank}(A_m) = 1 \text{ for any } m. \quad (46)$$

である。証明は文献 [13] が ArXiv でも読める。Eq. (44) は状態に作用すると思ったときの標準の定義であり、Eq. (45) は Choi 行列からの、最大もつれ状態の変化に関連する定義である。最後の Eq. (46) はクラウス表現の形に関する規定を与える定義であり、MP scheme という物理的なシナリオを体現しているとも解釈できる。

C. Quantum benchmark

Eq. (29) および図 4 のように量子的な並列演算の可能性を示す話にもどる。E B チャンネルの外側 (図 1a 参照) に属することを判定する基準が量子ベンチマークである。E B チャンネルである条件 Eq. (44 - 46) のうちどれかが当てはまらないことを示せば量子ベンチマークとなる。たとえば Eq. (44) に関しては、適当な 2 体のもつれ状態の片割れにゲート操作を施した $\mathcal{E} \otimes I(\rho_{AB})$ がエンタングルメントを持っていることを示せば E B チャンネルでないことが示せるので、状態 $\mathcal{E} \otimes I(\rho_{AB})$ のエンタングルメント検証が量子ベンチマークへのシナリオとなる。また、Eq. (45) に関してはプロセス・トモグラフィーをして求めた Choi 行列の可分割性を議論することが、量子ベンチマークへのシナリオとなる。最後の Eq. (46) に関してはランク 1 のクラウス演算子からなる量子チャンネルの最適化問題と関連した量子ベンチマークのシナリオがある。ここでは、もっとも広く議論されている平均忠実度の最適化問題 (古典限界の忠実度) に関連したものについて述べる。平均忠実度の E B チャンネルによる最適化 (最大化) 問題は量子テレポーテーションの古典限界 [5, 16, 21, 24]、状態推定の問題 [25-27]、最適複製の古典限界 [27, 28] 等で中心となる問題である [29]。古典限界の忠実度は文献 [16] 以降では量子ベンチマークとも呼ばれるようになった。

平均忠実度の最適化問題を考えよう。平均忠実度 Eq. (26) を E B チャンネルで最大化したもの

$$F_C[p_i; \psi_i \rightarrow \psi'_i] := \max_{\mathcal{E} \in EB} \bar{F}[\mathcal{E}; p_i; \psi_i \rightarrow \psi'_i] \quad (47)$$

を古典限界の忠実度と呼ぶことにする。 F_C を超えていれば E B チャンネルでは達成できないので Eqs. (44 - 46) には当てはまらない。これがもっとも広く用いられている量子ベンチマークのシナリオである。すなわち、

$$\bar{F}[\mathcal{E}; p_i; \psi_i \rightarrow \psi'_i] > F_C[p_i; \psi_i \rightarrow \psi'_i] \quad (48)$$

がチャンネル $\mathcal{E}$ が E B チャンネルを超えるためのクライテリオンである。このクライテリオンが満たされていれば単に平均忠実度において古典チャンネルをしのぐだけでなく、適当なもつれ状態の片割れにチャンネルを作用させたときにエンタングルメントが維持されることになる。古典限界の忠実度 F_C そのものを量子ベンチマークと呼ぶ場合もある。因みに標的となる状態を直交状態 $|\langle \psi'_i | \psi'_j \rangle| = \delta_{i,j}$ とした場合、 $\mathcal{E}$ の最適化は測定の最適化と置き換えられるので、古典限界の平均忠実度 $F_C[p_i; \psi_i \rightarrow \psi'_i]$ は minimum error discrimination の成功確率と一致する [10]。

一様な平均忠実度 Eq. (19) の場合、量子ベンチマークとなる古典限界の忠実度は

$$\bar{F}_c := \max_{\mathcal{E} \in EB} \int d\psi \langle \psi | U^\dagger \mathcal{E}(|\psi\rangle \langle \psi|) U | \psi \rangle = \max_{\mathcal{E} \in EB} \int d\psi \langle \psi | \mathcal{E}(|\psi\rangle \langle \psi|) | \psi \rangle = \frac{2}{d+1} \quad (49)$$

となることが広く知られている [5, 6, 21, 25, 26, 28]。ここでの式変形ではユニタリー U は E B チャンネルの局所操作の最適化に含めて落とした。Eq. (45) により EB チャンネルでは $J_{\mathcal{E}}$ は可分割状態であるので、可分割状態と最大もつれ状態との忠実度は $\max_{\rho \in S_1} \langle \hat{\Phi} \rangle_\rho = 1/d$ となること [6] を Eq. (23) の表式に用いると $\bar{F}_c \leq \frac{2}{d+1}$ を得る。上限を達成する E B チャンネルとして

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_{j=0}^{d-1} |j\rangle \langle j| \rho |j\rangle \langle j| \quad (50)$$

が存在するので等号が成立する。したがって、古典限界 $\bar{F}_c = \frac{2}{d+1}$ を Eq. (48) に用いて、実際に観測された一様平均の忠実度 $\bar{F}(\mathcal{E})$ を古典限界と比べることで量子ゲートのコピーレンスを実証できる。

V. PARTIALLY ENTANGLEMENT BREAKING CHANNEL

エンタングルメントの研究が単に可分割性の判定だけでなく相関の強さを定量的に見積もることにも向けられているように、「量子ベンチマーク」においてもチャネルのコヒーレンスの強さを定量的に見積もる方向へ進めることができる [30–32]。これは基本的には Choi 行列 $J_{\mathcal{E}}$ のエンタングルメントの強さを調べるということになるが、適当なエンタングルメント測度を用いることで物理的にも意味のある物理過程の分類ができる。特に以下で紹介するシュミット数を用いた分類はクラウス演算子のランクのみで規定され、物理過程の「コヒーレンスの強さ」の物理的な説明を与える。

シュミット数を用いると E B チャンネル Eq. (27) は Choi 行列 $J_{\mathcal{E}}$ のシュミット数が 1 であるチャネルと読むことができる。

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \text{ is entanglement breaking} \\ \Leftrightarrow SN(J_{\mathcal{E}}) = 1 \end{aligned} \quad (51)$$

これを念頭において、 k -partial entanglement breaking channel (k -PEB チャンネル) を Choi 行列 $J_{\mathcal{E}}$ のシュミット数が k 以下の量子チャネルと定義する [14, 15]。

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \text{ is } k\text{-partial entanglement breaking} \\ \Leftrightarrow SN(J_{\mathcal{E}}) \leq k \end{aligned} \quad (52)$$

これは以下のようなクラウス表現が存在することと等価である

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\rho) = \sum_m A_m \rho A_m^\dagger \text{ is } k\text{-partial entanglement breaking} \\ \Leftrightarrow \text{There exists a Kraus representation s.t., rank}(A_m) \leq k \text{ for any } m. \end{aligned} \quad (53)$$

これら 2 つの定義は $k = 1$ の場合は E B チャンネルに帰着する。 k -PEB チャンネルはエンタングルメントをシュミット数 k 以下に減らす操作ということであり、E B チャンネルの最初の定義 Eq. (44) に対応する定義は

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \text{ is } k\text{-partial entanglement breaking} \\ \Leftrightarrow SN(\mathcal{E}_A \otimes I_B(\rho_{AB})) \leq k \text{ for any } \rho_{AB} \end{aligned} \quad (54)$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{E}_A \otimes I_B(\rho_{AB}) \in S_k \text{ for any } \rho_{AB} \quad (55)$$

などとなる。

行列のランクが k であれば状態ベクトルに作用させた像は k 個以下の独立な状態ベクトルの線形結合で表現できるわけであるから、ランク k のクラウス演算子をもつれ状態の片割れに作用させた場合、

$$A_m |\psi\rangle_{AB} = \sum_{j=0}^{k-1} a_j |i\rangle |i'\rangle =: \sqrt{p_m} |\psi'_m\rangle \quad (56)$$

のようにシュミットランク k 以下の状態が出力される。したがってチャネルの作用は

$$\mathcal{E} \otimes I(\hat{\psi}_{AB}) = \sum_m A_m \hat{\psi}_{AB} A_m^\dagger = \sum_m p_m \hat{\psi}'_m \quad (57)$$

となり、シュミットランク k 以下の状態の混合である。このようにクラウス演算子のランクがシュミットランクと対応しており、PEB チャネルのクラウス表現はクラウス演算子のランクで規定されることになる。

E B チャネルの集合 Eq. (30) の拡張として、 k -PEB チャネルの集合に以下の記号を割り当てる [14]。

$$\mathcal{O}_k = \{\mathcal{E} | SN(J_{\mathcal{E}}) \leq k\} \quad (58)$$

これはランクが k 以下のクラウス演算子のみから構成できる量子チャネルの集合であり、凸集合である。定義から $\mathcal{O}_k \subset \mathcal{O}_{k+1}$ である (図5参照)。繰り返しになるが、 $k=1$ の場合が E B チャネルの集合となる。

VI. SCHMIDT NUMBER BENCHMARK

ふたたび平均忠実度の最適化問題を考えよう。平均忠実度 Eq. (26) を k -PEB チャネルで最大化したもの

$$F^{(k)}[p_i; \psi_i \rightarrow \psi'_i] := \max_{\mathcal{E} \in \mathcal{O}_k} \bar{F}[\mathcal{E}; p_i; \psi_i \rightarrow \psi'_i] \quad (59)$$

をシュミットクラス k の忠実度限界と呼ぶことにする。クライテリオン Eq. (48) は高次のコヒーレンスに拡張される。すなわち、

$$\bar{F}[\mathcal{E}; p_i; \psi_i \rightarrow \psi'_i] > F^{(k)}[p_i; \psi_i \rightarrow \psi'_i] \quad (60)$$

であれば、 k -PEB チャネルでは達成できないので k 次のコヒーレンスが存在する。これが多次元コヒーレンスの実証となるシュミット数ベンチマークのシナリオである [32]。

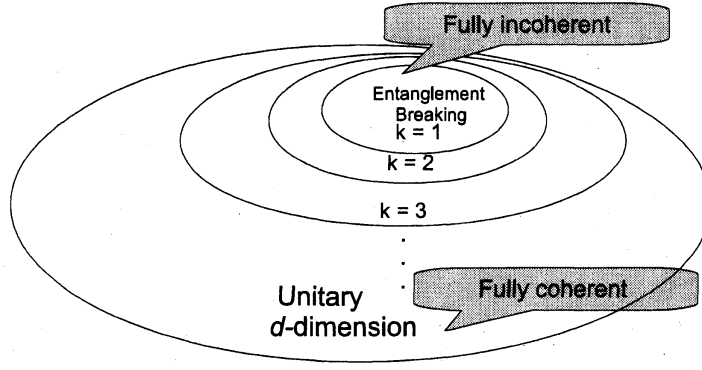


FIG. 5: d 次元の量子チャネルの分類 $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_3 \subset \dots \subset \mathcal{O}_d$ 。ランクが1のクラウス演算子のみで構成できるE Bチャネルはコヒーレンスを全く維持できない古典チャネルであり、最下層 $\mathcal{O}_1$ を成している。ランクが $k \leq d$ までのクラウス演算子のみから構成されるP E BチャネルはE Bチャネルの上位にあり最大で $k-1$ 次までのコヒーレンスを維持できる。可逆な操作であるユニタリーゲートはクラウス演算子が単一でそのランクが $k=d$ であり最上位（一番外側）の $\mathcal{O}_d$ に属する。図 1b も参照。

A. Schmidt-number benchmark on uniform average gate fidelity

最大もつれ状態とシュミット数が k の状態との忠実度は

$$\langle \psi | \hat{\Phi} | \psi \rangle \leq \frac{k}{d} \quad (61)$$

となることが知られている [2]。等式は $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{j=0}^k |j\rangle |j\rangle$ とすれば達成できる。この関係式と Eq.(23) を用いると $k-1$ 次までのコヒーレンスしか維持できないチャネルで達成できる一様平均忠実度の上限は

$$\bar{F}^{(k)} := \max_{\mathcal{E} \in \mathcal{O}_k} \bar{F}(\mathcal{E}) \leq \frac{1+k}{1+d} \quad (62)$$

とできる。等式は

$$\mathcal{E}_k(\rho) := \sum_{l=0}^{d-1} K_l \rho K_l^\dagger \quad (63)$$

$$K_l := \frac{1}{\sqrt{k}} \hat{X}^l \sum_{j=0}^{k-1} |j\rangle \langle j| (\hat{X}^\dagger)^l \quad (64)$$

$$X := \sum_{j=0}^{d-1} |j+1\rangle \langle j| \quad (65)$$

で達成できる。クラウス演算子 K_l に含まれる $\sum_{j=0}^{k-1} |j\rangle \langle j|$ は k 次元のサブスペースへの射影であり、これにより K_l のランクが k 以下であることがわかる。したがって、一様平均忠実度に関するシュミット数 k の量子ベンチマークは

$$\bar{F}^{(k)} = \frac{1+k}{1+d} \quad (66)$$

となる。このようにシュミットクラス k の最適化でタイトな上限を得たので、Eq. (60) のクライテリオンにより、一様平均忠実度を測定して $\bar{F}^{(k)} = \frac{1+k}{1+d}$ を超えた場合、ランク k 以下のクラウス演算子のみからなる物理過程では構成できない量子ゲートをとっており、 k 次のコヒーレンスを実証したことになる。

例えば、量子計算機の根幹素子となる 2 量子ビットの CNOT ゲートは $d = 2^2 = 4$ のユニタリーゲートであり、理想的にはクラウス演算子は単一でユニタリー行列であり、ランクは $d = 4$ である。一様な平均忠実度の値が 1 であれば、ユニタリーゲートになっているはずであるが、現実には 1 より低い忠実度が観測されることになる。そのような場合にも、 $k = 3$ の限界 $\bar{F}^{(3)} = \frac{4}{5}$ を超えていれば、ランク 3 以下のクラウス演算子で構成されるゲートでは達成できないコヒーレンスがあると主張できる。Eq. (20) の直下で述べたが、一様平均忠実度を測定するには多数の測定（合計で d^4 個程度）が必要である。もっと少数の測定からシュミット数の量子ベンチマークを行う方法が文献 [32] に提示しており、実際の CNOT ゲートの多次元コヒーレンスが実証される。この方法は次元 d のゲートに対して d^2 個程度の少数の入力基底と測定基底の数で多次元コヒーレンスを検証する条件となっているので、今後さらに多次元の量子ゲートの実験が行われた場合にも有用であろう。

VII. おわりに

Entanglement breaking/Partially entanglement breaking と呼ばれる物理過程の定義と基本的な性質に関して一通りまとめた。それに付随して量子ベンチマーク/シュミット数ベンチマークなる概念を説明し、単純な例を示したつもりである。物理系のダイナミクス（物理過程）とエンタングルメントという概念が密接に関係しておりエンタングルメント量が物理系のダイナミクスの解析に役に立つだろうことも強調したつもりである。図 1a の説明文ではあいまいな“量子ゲートのコヒーレンス”が、エンタングルメントの概念を利用して定量的に記述できることが伝われば本望である。さらに量子ゲートの多次元コヒーレンスがシュミット数と同様に重要な概念として認識され、量子ゲートの実証実験にも活用されてほしいと思う。

謝辞

本研究の一部は文部科学省グローバルC O Eプログラム「普遍性と創発性から紡ぐ次世代物理学」の援助により行なわれました。

-
- [1] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press (2000).
 - [2] B. M. Terhal and P. Horodecki, Phys. Rev. A 61 040301 (2000).
 - [3] G. Vidal, J. Mod. Opt. 47, 355 (2000).
 - [4] M. B. Plenio and S. Virmani, Quant. Inf. Comp. 7, 1 (2007).
 - [5] M. Horodecki, P. Horodecki, and R. Horodecki, Phys. Rev. A 60, 1888 (1999).
 - [6] M. Horodecki and P. Horodecki, Phys. Rev. A 59, 4206 (1999).
 - [7] M. A. Nielsen, Phys. Lett. A 303, 249 (2002).
 - [8] K.G.H. Vollbrecht and R.F. Werner, Phys. Rev. A 64, 062307 (2001).
 - [9] R. Namiki, M. Koashi, and N. Imoto, Phys. Rev. Lett. **101**, 100502 (2008).
 - [10] R. Namiki, Phys. Rev. A 78, 032333 (2008).
 - [11] R. Namiki, Phys. Rev. A 83, 040302(R) (2011).
 - [12] K. Azuma, M. Koashi, and N. Imoto, <http://arxiv.org/abs/0804.2426>.
 - [13] M. Horodecki, P. Shor, and M. B. Ruskai, Rev. Math. Phys. 15, 629 (2002)
<http://arxiv.org/abs/quant-ph/0302031>.
 - [14] S. Huang, Phys. Rev. A **73**, 052318 (2006).
 - [15] D. Chruscinski and A. Kossakowski, Open Sys. Information Dyn. 13, 17-26 (2006)
<http://arxiv.org/abs/quant-ph/0511244>.
 - [16] K. Hammerer, M. M. Wolf, E. S. Polzik, and J. I. Cirac, Phys. Rev. Lett. **94**, 150503 (2005).
 - [17] J. Rigas, O. Gühne and N. Lütkenhaus, Phys. Rev. A **73**, 012341 (2006).
 - [18] H. Häsel, T. Moroder, and N. Lütkenhaus, Phys. Rev. A 77, 032303 (2008).
 - [19] H. Häsel and N. Lütkenhaus, Phys. Rev. A 80, 042304 (2009).
 - [20] H. Häsel and N. Lütkenhaus, Phys. Rev. A 81, 060306(R) (2010).
 - [21] C. A. Fuchs and M. Sasaki, Quantum Inf. Comput. 3, 377, (2003).
 - [22] M. Owari et al., New J. Phys. 10, 113014 (2008).

- [23] J. Calsamiglia et al., Phys. Rev. A 79, 050301(R) (2009).
- [24] S.L. Braunstein, C.A. Fuchs and J. Kimble, J. Mod. Opt **47**, 267 (2000).
- [25] S. Popescu, Phys. Rev. Lett. 72, 797 (1994).
- [26] S. Massar and S. Popescu, Phys. Rev. Lett. 74, 1259 (1995).
- [27] J. Bae and A. Acín, Phys. Rev. Lett. **97**, 030402 (2006).
- [28] D. Bruß and C. Macchiavello, Phys. Lett. A 253, 249 (1999).
- [29] R. Namiki, Phys. Rev. A 83, 042323 (2011).
- [30] N. Killoran, H. Häseleler, and N. Lütkenhaus, Phys. Rev. A 82, 052331 (2010).
- [31] N. Killoran and N. Lütkenhaus, Phys. Rev. A 83, 052320 (2011).
- [32] R. Namiki and Y. Tokunaga, Phys. Rev. A 85, 010305(R) (2012).