

# マルチンゲール差の級数について

土倉 保

Tamotsu TSUCHIKURA

(東京電機大・理工)

## 1. 正規直交系 $\{\varphi_n\}$ による直交級数

$$\sum a_n \varphi_n(x) \quad (\{a_n\} \in \mathbb{R}^\infty) \quad (1)$$

および, マルチンゲール差の級数

$$\sum d_n \quad (2)$$

を考える. マルチンゲール差  $\{d_n\}$  が特に独立であるときは上の級数 (2) またはその部分和の列について収束性, 大数の法則等詳細な結果が知られているが, その多くはまた独立性を仮定しない (2) の場合にも成立, もしくは適当な条件で拡張されている. しかし  $L^2$  可積分性を仮定してあっても (1) と (2) の間にはかなり挙動の異なることがある. この間に位置するような概念がほしいものである.

2. 上の二級数 (1), (2) を対比するため (1) については 1 点  $x$  における挙動ではなく, ある正測度の集合上での挙動, (2) については正の確率をもつ挙動を考える.

(1) について絶対収束性  $\sum |a_n \varphi_n(x)| < \infty$ ,  $(x \in E, m(E) > 0)$  は  $\sum_{j=1}^n a_j \varphi_j(x) = s_n(x)$  とするとき  $\sum |s_n(x) - s_{n-1}(x)| < \infty$  と書くことができる. これは数列  $\{s_n\}$  の収束状況の有界変動性

を示すものである。これをより一般にして  $\sigma_n = (s_1 + \dots + s_n)/n$  とするとき、

$$\sum |\sigma_n - \sigma_{n-1}| < \infty \quad \sim \quad \sum \frac{|\sigma_n - s_n|}{n} < \infty \quad (3)$$

を調べることが考えられる。 $\{\sigma_n\}$  の有界変動性で  $(C, 1)$  絶対収束という。さらに  $(C, \alpha)$  平均  $\sigma_n^\alpha$  を考えて

$$\sum |\sigma_n^\alpha - \sigma_{n-1}^\alpha| \sim \sum \frac{|\sigma_n^\alpha - \sigma_n^{\alpha-1}|}{n} \quad (4)$$

の収束性も考えられる。

一方 (1) の  $\sum a_n \varphi_n$  が  $L^2$  の直交級数 (フーリエ展開) であるときはパーセバルの等式から  $\sum a_n^2 < \infty$  であるが、このときは

$$\sum \frac{(\sigma_n - s_n)^2}{n} < \infty, \quad \text{a.e.} \quad (5)$$

より正確には  $\int \sum (\sigma_n - s_n)^2/n < \infty$  である。そこで (5) に現われた指数 2 と  $\sigma_n, s_n$  をより一般にして

$$\sum \frac{|\sigma_n^\alpha - \sigma_n^{\alpha-1}|^p}{n} \quad (6)$$

の収束性を調べることも収束あるいは総和性の一つの状況説明であり、Littlewood-Paley から始まる多くの研究がある。

ここで  $\alpha > \frac{1}{2}$ ,  $p \geq 1$  で  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $p = 1$  は挙動が変化する一つの臨界インデックスと考えられている。

以下では  $\alpha = 1$ ,  $p \geq 1$  の場合を述べる。

3. 簡単のためには次のようにおく.

$$\Lambda^p \equiv \sum |\sigma_n - \sigma_{n-1}|^p \sim \sum \frac{|\sigma_n - s_n|^p}{n} \sim \sum_n \frac{1}{n^{1+p}} \left| \sum_{j=1}^n j a_j \varphi_j \right|^p$$

マルテンゲール差についても同様に  $s_n = \sum_{j=1}^n d_j$ ,  $\sigma_n = \frac{s_1 + \dots + s_n}{n}$  とする. 従って  $\Lambda^p \equiv \sum_n \frac{1}{n^{1+p}} \left| \sum_{j=1}^n j d_j \right|^p$  などである. なお上の " $\sim$ " は収束性が同じであるという意味で, 単なる式の変形である. 同様に

$$\Pi^p \equiv \sum |s_{2^{n+1}} - s_{2^n}|^p \sim \sum_n \left| \sum_{j=2^n+1}^{2^{n+1}} a_j \varphi_j \right|^p \text{ または } \sim \sum_n \left| \sum_{j=2^n+1}^{2^{n+1}} d_j \right|^p$$

とおく.

定理 1.  $p \geq 1$  とするとき

$$(i) \sum a_n \varphi_n \text{ について, もし } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{j=2^{n-1}}^{2^n-1} a_j^2 \right)^{p/2} < \infty \text{ ならば } \Lambda^p, \Pi^p$$

はともに a.e. 収束する.

$$(ii) \sum d_n \text{ についても同様に, もし } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{j=2^{n-1}}^{2^n-1} E(d_j^2) \right)^{p/2} < \infty \text{ ならば}$$

$$\Lambda^p, \Pi^p < \infty, \text{ a.e.}$$

定理 2. マルテンゲール差  $\{d_n\}$  が独立確率変数数列になっているときは, もし  $\Lambda^p, \Pi^p$  のいずれかが正の確率で収束すれば

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{j=2^{n-1}}^{2^n-1} E(d_j^2) \right)^{p/2} < \infty.$$

これはそれぞれ Beppo-Levi の定理の利用, Hincin の定理の利用で示されることである。

次に  $\Lambda^p, \Pi^p$  の相互関係については, Golubov の問題と  
いうのがあって, それは一般の直交級数 (1) に対して  $\Lambda^1$  と  
 $\Pi^1$  は a.e. で収束, 発散が同値ではないかというのであるが,  
これについては既に Tandori が否定的な結論を述べている.[2]

しかし (2) のマルタンゲール差級数については次の結果が  
知られている。

定理 3. (吾妻) マルタンゲール差級数  $\sum d_n$  に対しては

$$E[\Lambda^p] < \infty, \quad E[\Pi^p] < \infty$$

は同値である。[1]

定理 4. (吾妻) マルタンゲール差級数  $\sum d_n$  について, もし  
 $E[\sup_n |\sum_{j=1}^n d_j|^p] < \infty$  ならば  $\Lambda^p, \Pi^p$  は a.e. で同時  
に収束あるいは発散する。(  $p \geq 1$  であるが, 特に  $p > 1$  の  
ときは Doob の不等式から仮定を  $L^p$  有界, すなわち

$$\sup_n E[|\sum_{j=1}^n d_j|^p] < \infty \quad \text{としてよい} )。 [1]$$

4. 1)  $\Lambda^1$  と  $\Pi^1$  の同値性については一般直交級数では成  
立しないが, マルタンゲール差の級数では成立している。そ  
こで特殊な直交系として余弦系を考えたとき, すなわち  
 $\sum a_n \cos nx$  については a.e. で  $\Lambda^1$  と  $\Pi^1$  は同値であることを調

べたことがある。しかし  $a_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) という仮定だけでは同値でない例は得られたが、 $L^2$  すなわち  $\sum a_n^2 < \infty$  となる例ではない。[3]

2) フーリエ級数  $\sum (f)$  の絶対収束性については Bernstein の定理があり、 $f \in \text{Lip } \alpha$  ( $\alpha > \frac{1}{2}$ ) が一つの十分条件であることが知られている。これの逆として  $f \in \text{Lip } \alpha$  ( $\alpha > 0$ ) が  $\Pi^1$ ,  $\Lambda^1 < \infty$  (すべての点で) の十分条件である。この結果は、 $\Pi^1 < \infty$  は Bosanquet の結果であるが、 $\Lambda^1 < \infty$  は明示されている文献は見当たらないようである。

#### 文 献

- [1] K. Azuma, Absolute summability of martingale sequences,  
宮城教育大紀要 18 (1983) 1-5
- [2] K. Tandori, On a problem of B. I. Golubov, Analysis Math.,  
6 (1980) 157-164
- [3] T. Tsuchikura, On the absolute summability of trigonometric  
series, Analysis Math., 12 (1986) 77-84