

モーメント-プロブレムの一定理

自治医大

竹内 又房

§0 この小論において次の領域の2つの性質を論ずる。

$$P \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ A : n\text{-次正方行列} \mid \begin{array}{l} A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \\ A : \text{positive-definite} \end{array} \right\}$$

この問題そのものと解析数論との間には、直接の関係はないのであるが、次のようなモチーフに関連してこの問題を考える。

$$Q \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ A : n\text{-次正方行列} \mid \begin{array}{l} A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \\ A : \text{positive-definite} \end{array} \right\}$$

とある。Qを調べることに特別の興味をもっているのであるが、その動機は次の通り。

例えば

$$A = \left(\frac{1}{\{i, j\}^s} \right) \quad s > 0, \quad \varphi(k, s) = k^s \prod_{p|k} \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)$$

とある。そのとき本えにありて証明するように、Aは positive

- definite であり

$$\lambda > \sum_{k=1}^n \varphi(k, S) \longleftrightarrow A - \frac{1}{\lambda} J : \text{positive-definite}$$

$$\longleftrightarrow A - \frac{1}{\lambda} J \in Q \quad \text{但し } J = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

従って Q あるいはその ∂ -boundary の形態を知ることは解析数論と直接関連がある。

もう一つの例として例えば S を n 以下の平方因子を含まぬ数をホセの順から並べたもの^{の集合}とする。

$$A = (a_{ij})_{i,j \in S} \quad a_{ij} = \begin{cases} 1 & (i,j)=1 \\ 0 & (i,j)>1 \end{cases}$$

とおく。そのとき本えにおいて証明するように、 A は非退化であり、

$$\lambda > \sum_{k \in S} \frac{S_k^2}{a_k} \longleftrightarrow ADA - \frac{1}{\lambda} K : \text{positive-definite}$$

$$\longleftrightarrow ADA - \frac{1}{\lambda} K \in Q \text{ の } S \text{ に対応する principal-matrix}$$

の集合,

$$\text{但し } K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_k = \sum_{d_1 \nmid k, \dots, d_2 \nmid k} M\left(\frac{n}{p_1^{d_1} \cdots p_r^{d_r}}\right) \quad k = p_1 \cdots p_r,$$

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_k & 0 \\ & 0 & \ddots \end{pmatrix} \quad a_k \text{ は任意の正数}$$

さて、 P と Q は次のように共通のフォーマーシレーションをもっている。 $V = \langle 1, t, t^2, \dots, t^{2^n-2} \rangle \quad t^{2^n-1} = 0$ とする
そのとき P は次の $V^* \supset P_1$ と identity できる。

$$P_1 \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \varphi \in V^* \mid \begin{array}{l} \varphi(\alpha^2) > 0 \\ \forall \alpha \in V \quad \alpha \neq 0 \end{array} \right\}$$

又同様に $W = \langle x_1, \dots, x_k, \dots \rangle \quad k \in I$

但し $I = \{1, \dots, \{i, j\}, \dots\} \quad 1 \leq i, j \leq n$ とする。

$$\text{又 } x_i \cdot x_m = \begin{cases} x_{\{i, m\}} & \{i, m\} \in I \\ 0 & \{i, m\} \notin I \end{cases} \quad \text{を満す乗法が}$$

W 内に def されて いるものとする。そのとき Q は次の $W^* \supset Q_1$ と identity できる。

$$Q_1 \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \varphi \in W^* \mid \begin{array}{l} \varphi(\alpha^2) > 0 \\ \forall \alpha \in W \quad \alpha \neq 0 \end{array} \right\}.$$

上記のような形式的なものにとどまらず P と Q には種々の共通点が存在するのであるが、一般的にいって P は調へ P すぐ Q は調へに < 1 。ここに於ては Q については暫くふれるに止め P の 2, 3 の性質を論ずる。尚、数はすべて実数とする。

$$\S 1 \quad E(r) \stackrel{\text{def}}{=} \left(r^{i+j-2} \right) \quad 1 \leq i, j \leq n$$

とある。そのとき次の定理は周知である。

定理 $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ とする

$$A \in \mathbb{Q}P \longrightarrow \exists \alpha_k > 0 \quad \exists \gamma_k \text{ s.t.}$$

$$A = \sum \alpha_k E(\gamma_k)$$

上記定理を用いて $\mathbb{Q}P$ 内に乗法を定義しよう。

$$(i) \quad E(\gamma) * E(\delta) \stackrel{\text{def}}{=} E(\gamma + \delta)$$

(ii) $A, B \in \mathbb{Q}P$ とする。そのとき上記定理より

$$\exists \alpha_k, \beta_l > 0 \quad \exists \gamma_k, \delta_l \text{ s.t.}$$

$$A = \sum \alpha_k E(\gamma_k) \quad B = \sum \beta_l E(\delta_l)$$

$$A * B \stackrel{\text{def}}{=} \sum \alpha_k \beta_l E(\gamma_k) * E(\delta_l)$$

そのとき、 $*$ は well-defined であることは容易に分る。

又 (i), (ii) を言い換えることにより、次の定理が出る。

定理 $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$

$A, B \in \mathbb{Q}P$ とする。そのとき

$$C = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in P \text{ である。}$$

但し

$$\left(\sum_{k=0}^{2n-2} \frac{a_k}{k!} t^k \right) \left(\sum_{l=0}^{2n-2} \frac{b_l}{l!} t^l \right)$$

$$= \sum_{m=0}^{2n-2} \frac{c_m}{m!} t^m \quad t^{2n-1} = 0$$

$$\text{今 } P \supset R \stackrel{\text{def}}{=} \{ A \in P \mid a_1 = a_3 = \dots = a_{2n-3} = 0 \}$$

を考える. 容易に分る如く, R は上記 * に関して閉じている

$$\text{例えば } P \ni A, B \quad A \sim B \stackrel{\text{def}}{=} \exists C, D \in R \text{ s.t.}$$

$C * A = D * B$ により, P 内に $\sim$ を入れ, $P/\sim$ を考えたりすることに興味をもっているのであるが, 今 R に関連した次の定理をあげるにとどめておく.

定理

$$A = (a_{i+j-2}) \quad 1 \leq i, j < \infty \quad \text{とし.}$$

A の任意の n 次 section A_n^r は (n に依存した) R に属するものと

する. そのとき A の直交多項式は零元付称, 即ち α を zero pt. としてもてば, $-\alpha$ も zero pt. としてもつ.

但し, 一般に無限行列

$$X = (x_{ij}) \quad 1 \leq i, j < \infty \quad \text{に対して}$$

その n 次 section $X_n \stackrel{\text{def}}{=} (x_{ij}) \quad 1 \leq i, j \leq n$ とする.

又

$$A = (a_{i+j-2}) \quad 1 \leq i, j < \infty \quad \text{とし.}$$

$A_n \in (n \text{ に関する }) \mathcal{P} \quad \forall n$ とする. そのとき

A は次の $A_1 \subset U^*$ と identify できる.

$$U = \langle 1, t, \dots, t^i, \dots \rangle$$

$$A_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{ \varphi \in U^* \mid \varphi(x^2) > 0 \quad x \in U, x \neq 0 \}$$

そのとき $P_k(t)$: k 次の直交多項式 $\stackrel{\text{def}}{\longleftrightarrow} P_k(t)$: k 次の多項式
で、 t^k の係数正. かつ $\varphi(P_k(t)P_l(t)) = \delta_{kl}$.

定理の証明

$$X = (x_{ij})_{1 \leq i, j < \infty} \quad \& \quad (1+t \dots t^{n-1}) X_n = (1 \dots (a_{1n}t)^{n-1})_{t \neq 0}$$

とみたら. 無限 ~~上三角~~ 行列とする.

$$\& \quad A = (a_{i+j-2})_{1 \leq i, j < \infty} \quad \& \quad A_n \in (n \text{ に関する }) \mathcal{P}$$

とする. そのとき $X_n' A_n X_n \in \mathcal{P}$ であるが. X が上三角行列であることを使って容易に次のことが分る. 即ち

$$\exists \quad B = (b_{i+j-2})_{1 \leq i, j < \infty} \quad \text{s.t.} \quad B_n = X_n' A_n X_n$$

さて. A と B の直交多項式 $P_k(t)$ と $Q_k(t)$ を調べてみよう.

次が成立する

$$* \quad \cancel{Q_k(t) = \pm P_k(a+bt)}$$

$$P_k(t) = \pm Q_k(a+bt)$$

* の証明

$$A = (a_{i+j-2}) = (\psi(t^{i-1} t^{j-1})) \quad 1 \leq i, j \leq n$$

$$B = (b_{i+j-2}) = (\psi(t^{i-1} t^{j-1})) \quad 1 \leq i, j \leq n$$

とかける。又 $\psi((a+bt)^{i-1} (a+bt)^{j-1}) = \psi(t^{i-1} t^{j-1})$ である
 ことも容易に分る。従って $\psi(Q_k(a+bt) Q_k(a+bt)) = \psi(Q_k(t) Q_k(t))$
 $= \delta_{kk}$ 従って 直交多項式の ± 1 性より $Q_k(a+bt)$

$$= \pm P_k(t) \quad \text{Q.E.D.}$$

$$\text{今特に} \quad A = (a_{i+j-2}) \quad 1 \leq i, j < \infty \quad \neq A_n \in (n \times n) \mathbb{R}$$

$$\text{とし. } X = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{とする. そのとき } A = B \text{ であ}$$

ることが容易に分るが上記*より. $A \neq B$ の直交多項式

$$P_k(t) \text{ は次の性質をもっている} \quad P_k(t) = \pm P_k(-t) = (-1)^k P_k(t)$$

$$\text{さて, } \alpha \text{ を } P_k(t) \text{ の zero pt. とすれば } P_k(\alpha) = 0 = (-1)^k P_k(-\alpha)$$

$$\therefore P_k(-\alpha) = 0 \quad \text{よって定理は証明された.}$$

さて $A = (a_{i+j-2}) \quad 1 \leq i, j < \infty \quad A_n \in (n! \text{ 因子}) P$
 とし, $P_k(t) \quad k=0,1,\dots$ をその直交多項式とする.

$$t P_0(t) = a_0 P_0(t) + b_0 P_1(t)$$

$$t P_1(t) = c_1 P_0(t) + a_1 P_1(t) + b_1 P_2(t)$$

... (I)

$$t P_k(t) = \dots + c_k P_{k-1}(t) + a_k P_k(t) + b_k P_{k+1}(t)$$

となるが, 実は (I) は, 簡単に

$$t P_0(t) = a_0 P_0(t) + b_0 P_1(t)$$

$$t P_1(t) = b_0 P_0(t) + a_1 P_1(t) + b_1 P_2(t) \quad (\text{II})$$

し

$$t P_k(t) = \dots + b_{k-1} P_{k-1}(t) + a_k P_k(t) + b_k P_{k+1}(t)$$

とかけることが分る (証明も全く trivial であるが)

II の matrix J 即ち

$$J \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & & & \\ b_0 & a_1 & b_1 & & \\ & b_1 & a_2 & b_2 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \bigcirc \end{pmatrix}$$

8

と A or $P_k(t)$ に関するヤコビ行列という。容易に分ること
く、 $P_k(t)$ の zero pt. は J_k の eigenvalue にほかならない。

J に関する次の定理は全く trivial である。

定理

$$J_k = \begin{pmatrix} 0 & b_0 & & & \\ b_0 & 0 & b_1 & & \\ & b_1 & 0 & b_2 & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 0 & b_{k-1} & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$\longleftrightarrow P_i(t)$ ($i=1, \dots, k$) の zero pt. 原点对称
証明] $\leftarrow$ は自明であるから $\rightarrow$ のみをいう。

一般に i は成分のみが 1 でその他の成分が 0 である行列を

$$E_i \text{ とおく. } D_\ell \stackrel{\text{def}}{=} \langle E_{1, \ell+1} E_{2, \ell+2} \dots E_{k-\ell, k} \rangle \quad \ell = k-1, k-2, \dots$$

又 $D_\ell \stackrel{\text{def}}{=} 0 \quad \ell \geq k \text{ or } -k \geq \ell$ とおけば、簡単に分る
如く、 $\alpha \in D_\ell \quad \beta \in D_m \longrightarrow \alpha\beta \in D_{\ell+m}$ である。

さて今 J_k の eigenvalue のうちプラスのものを選んできたもの
を $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ とし、マイナスのものを $\beta_1, \beta_2, \dots$ とする。命題を否定し
て、これを $\alpha_1 = -\beta_1, \dots, \alpha_{i-1} = -\beta_{i-1}, \alpha_i \neq -\beta_i$ をみたす数とする。

一般性を失うことなく $\alpha_i > -\beta_i$ としよ。そのとき
 n を奇数とくにえき。奇数とすれば、 $\text{tr}(J_k^n) > 0$ となる。
然るに、 $J_k \in D_{-1} + D_1$ であるから、 n が奇数であれば、

J_k^n における D_0 の factor は zero. $\therefore \text{tr}(J_k^n) = 0$ Q.E.D.

又次の定理も trivial である.

定理

$$A = (a_{i+i-2})_{1 \leq i, i \leq 2n} \quad A_n \in (n) \rightarrow n(n) \quad P \text{ とする.}$$

$$a_1 = a_3 = \dots = 0 \iff P_n(t) \text{ の zero pt 原点对称 } \checkmark$$

[証明] $\longrightarrow$ は先ほど証明したので $\longleftarrow$ のみをいう.

1, 3, 5, ... は $2i-1$ $i=1, 2, 3, \dots$ とかける訳であるが.

これに関する induction を使う.

一般に

$$P_k(t) = C \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & & a_k \\ a_1 & a_2 & & a_{k+1} \\ & & \ddots & \\ a_{k-1} & a_k & & a_{2k-1} \\ 1 & t & & t^k \end{vmatrix} \quad C > 0$$

であることが知られてゐるが、 $P_1(t)$ の zero pt. が原点对称である

ならば、 $P_1(t) = C \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = C(a_0 t + a_1)$ において、 $a_1 = 0$ である.

$a_1 = a_3 = \dots = a_{2i-1} = 0$ までいへたとして $a_{2i+1} = 0$ をいう

$$P_{i+1}(t) = C \begin{vmatrix} a_0 & & & a_{2i+1} \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ a_i & & & a_{2i+1} \\ & & & t^{i+1} \end{vmatrix}$$

であるが、 $P_{i+1}(t)$ の zero pt. は原点对称であるから、 t^i の係数は zero でなければならぬ。従つて、 t^i の係数は、

ラプラス展開より $\pm C_{2i+1} |A_2|$ であるが, $C \neq 0$ $|A_2| \neq 0$ である故, $a_{2i+1} = 0$ が分る. Q.E.D.

§2 一般に $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ とおくとき

$X \circ Y \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ \vdots \\ x_n y_n \end{pmatrix}$ とおく, 又 $(X, Y) \stackrel{\text{def}}{=} x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ とする。

今 $X = (x_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ とし, X の各行列を X_j とおく

即ち $X_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}$ 又特に X を non-singular とする。

そのとき $\exists C_{ij}^k$ ($1 \leq i, j, k \leq n$) s.t. $X_i \circ X_j = \sum_k C_{ij}^k X_k$ である。 $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$ とおき $D \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$ とおけば,

$$X' D X = \left((D, X_i \circ X_j) \right)_{1 \leq i, j \leq n} \quad \text{であることは直接の}$$

計算で確かめることができる。

さて上記 principle を次の2つの行列に対して適用する。

$$I \quad T = X = (x_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \quad x_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

そのとき, 容易に分る如く, $X_i \circ X_j = X_{(ij)}$ である。

$$\therefore X' D X = \left((ID, \mathbb{X}_{(i,j)}) \right)_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \cdots & t_n \\ t_2 & & & \\ \vdots & & t_{(i,j)} & \\ t_n & & & \end{pmatrix}_{1 \leq i, j \leq n}$$

但し $t_i = \sum_{d|i} d_i$. このことと $\mathbb{X}$ の換えることにより.

次の prop. を得ることになる.

prop. 1 $A = (a_{(i,j)}) = X' \begin{pmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n \end{pmatrix} X \quad b_i = \sum_{d|i} \mu(d) a_{\frac{i}{d}}$

定理 $A = \left(\frac{1}{\{i,j\}^s} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \quad s > 0$ は positive-definite であり.

$\bar{A}^{-1}[e] = \sum_{k=1}^n \varphi(k, s)$ である. 但し $e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

~~証明~~ 又 $A[\mathbb{X}] \equiv \mathbb{X}' A \mathbb{X}$.

証明 $\mathbb{Y} = \begin{pmatrix} 1^s & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & n^s \end{pmatrix} \quad s > 0$ とおきとき

$$\mathbb{Y}' A \mathbb{Y} = \left((i, j)^s \right)_{\text{prop 1}} = X' \begin{pmatrix} \varphi(1, s) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varphi(n, s) \end{pmatrix} X$$

である. $\therefore \bar{A}^{-1} = \mathbb{Y} X^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{\varphi(1, s)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\varphi(n, s)} \end{pmatrix} (X')^{-1} (\mathbb{Y})$

である. $\therefore \bar{A}^{-1}[e] = Z \begin{pmatrix} \frac{1}{\varphi(1, s)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\varphi(n, s)} \end{pmatrix} Z'$ である.

但し $Z = (\varphi(1, s) \quad \cdots \quad \varphi(n, s))$

$$\vec{A}[e] = \sum_{k=1}^n \varphi(k, s) \quad \text{又 } A \text{ が positive-definite で}$$

あることは上記分解より明らか。

定理 $\lambda > 0$ のとき

$$\lambda > \sum \varphi(k, s) \iff A - \frac{1}{\lambda} J \in Q$$

[証明]

$A - \frac{1}{\lambda} J$ の正成分が $\{e, \bar{e}\}$ のみに依存していることは、

明らかである。次の公式は線型代数の理論において周知である。

$$Y' \begin{pmatrix} \alpha & *' \\ * & B \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} \alpha - B^{-1}[*] & e' \\ e & B \end{pmatrix}$$

但し

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & e' \\ -B^{-1}* & E \end{pmatrix}$$

$$\text{又 } \cancel{Z}' \begin{pmatrix} \alpha & *' \\ * & B \end{pmatrix} Z = \begin{pmatrix} \alpha & e' \\ e & B - \alpha^{-1}**' \end{pmatrix}$$

但し

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha^{-1}*' \\ e & E \end{pmatrix}$$

上の議論を $\begin{pmatrix} \lambda & e' \\ e & A \end{pmatrix}$ に対して適用すれば

$$\exists Y, Z \text{ s.t. } Y' \begin{pmatrix} \lambda & e' \\ e & A \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} \lambda - \sum \varphi(k, s) & e' \\ e & A \end{pmatrix}$$

$$Z' \begin{pmatrix} \lambda & e' \\ e & A \end{pmatrix} Z = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & A - \frac{1}{\lambda} J \end{pmatrix} \quad J = ee'$$

よって、両方の行列が positive-definite であることは同値であることを用いることにより、証明することが出来る。Q.E.D

II S を 1 以上 n 以下の平方因子を含まぬ数の集合とし

$$X = (x_{ij})_{i,j \in S} \quad x_{ij} = \begin{cases} 1 & (i,j)=1 \\ 0 & (i,j)>1 \end{cases}$$

そのとき I の議論を少し変形することにより、 X の non-singularity が分る。さて次の定理は証明なしに承認していただいたら、

定理 $X^{-1} = \left(\mu(i) \mu(j) \mu(i,j) S_{i,j} \right)_{i,j \in S}$

但し $R = p_1 \cdots p_r$ とするとき $S_R = \sum_{d_1 | R, \dots, d_r | R} M\left(\frac{n}{p_1^{d_1} \cdots p_r^{d_r}}\right)$

但し $M(m)_{\text{def}} \sum_{i=1}^{[m]} \mu(i) \quad m \geq 1 \quad M(m)_{\text{def}} 0 \quad m < 1$

又 $X_i \circ X_j$ は $\{i,j\}$ のみに dep することは容易に分る。

即ち、 $\{i,j\} = \{i,j'\} \rightarrow X_i \circ X_j = X_i \circ X_{j'} \quad \dots (2)$

定理

$$\lambda > \sum_{R \in S} \frac{S_R^2}{a_R} \iff ADA - \frac{1}{\lambda} K : \text{positive}$$

-definite 但し $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{NOT positive-definite} \\ \text{is p.d. である} \end{pmatrix}$

$$\text{又 } a_k > 0 \quad D = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_k & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \quad k \in S \quad \text{とする.}$$

証明]

$$ADA - \frac{1}{\lambda} K : \text{p.d.} \leftrightarrow D - \frac{1}{\lambda} \bar{A} K \bar{A}^{-1} : \text{p.d.}$$

$$\leftrightarrow D - \frac{1}{\lambda} (S_i S_j) : \text{p.d.} \quad i, j \in S \leftrightarrow \lambda E - D^{-\frac{1}{2}} (S_i S_j) D^{-\frac{1}{2}}$$

$$: \text{p.d.} \leftrightarrow \lambda > \text{Tr} (D^{-\frac{1}{2}} (S_i S_j) D^{-\frac{1}{2}}) \leftrightarrow \lambda > \sum_{k \in S} \frac{S_k^2}{a_k} \quad \text{Q.E.D.}$$

§2において書いたことは、全く elementary な linear-algebra であるが、このことを素材にして、次の step へ進むことが出来る。例えば上記 (2) に対しては、

$$X_i \circ X_j = \sum_{k \in S} C_{ij}^k X_k \quad i, j \in S$$

但し $C_{ij}^k = \sum_{\substack{ad \in S \\ kd \in S}} \mu(d)$ が成立する。この algebra は、 S は有限な準順序集合 S に対して、natural な拡張をもつ。種々の応用をもっている。

$$\text{又 §1 で示した如く, } A = (a_{i+j-2})_{1 \leq i, j \leq n} \quad \mathbb{Q} \text{ のとき}$$

$A \in P$ であるための条件は完全に与えられる, 然し同様な
 criterion

criterion と $\mathbb{Q}$ の場合に与えることは非常に難しいのではないだろうか。種々の十分条件はあたえることが出来る。ここでは、証明抜きに、十分初等的ではあるが、少々醜い悪な

印象を与える例を1つあげるにとめておく。(十分条件を証明する)

$$\sigma > 1 \quad \text{と} \quad \sum_{k=1}^n \frac{\mu(k)}{k^\sigma} > 0 \quad \text{をみたす任意の数} \varepsilon \text{ をとる。}$$

$$A = \left(\left[\frac{n}{\{i, j\}^\sigma} \right] \right) \quad B = \left(\frac{1}{\{i, j\}^\sigma} \right) \quad 1 \leq i, j \leq n$$

とあるとき、 A, B は p.d. であり。

$$A[e] = \sum_{i=1}^n M\left(\frac{n}{i}\right)^2 \quad B[e] = \sum_{i=1}^n \psi(i, \sigma) \quad \text{である。}$$

又 $A - B$ は p.d. である。但し ε は $0 < \varepsilon < \frac{1}{n}$ をみたす。

す任意の数 $\varepsilon = \frac{1}{n^\sigma} \times \left(\min_k \sum_{i=1}^n \frac{\mu(k)}{k^\sigma} \right)$ とする

$$\therefore \sum_{k=1}^n \psi(k, \sigma) < \varepsilon \sum_{i=1}^n M\left(\frac{n}{i}\right)^2$$

ほかにも色々あるが、別の機会にふれることにする。