

Pretzel link の Hoste polynomial

東女大文理 清 裕恵 (Hiroe Kiyoshi)

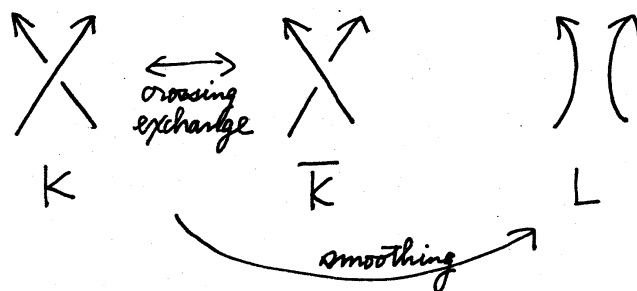
Hoste polynomial の定義

K を oriented knot または link とし、 K の projection を 1 つ固定する。

$Q_K = Q_K(x, y, z)$ は Laurent polynomial で ①. ② を満たす。

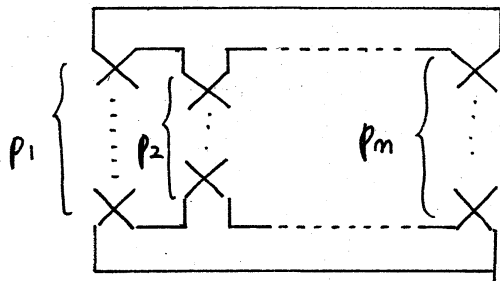
- ① K が k -components trivial link なら $Q_K(x, y, z) = (\frac{x-y}{z})^{k-1}$
- ② $K, \bar{K}, L$ がある crossing point で図に従い. 他の部分は一致しているなら

$$xQ_K - yQ_{\bar{K}} = zQ_L$$



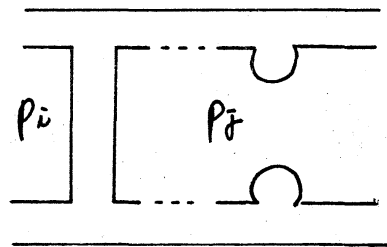
定理 (Hoste) $Q_K(x, y, z)$ は K の amb. isotopy invariant である。

pretzel link $K(p_1, \dots, p_m)$ $p_i \in \mathbb{Z} \cup \{-\}$ とは
次を示す link である。

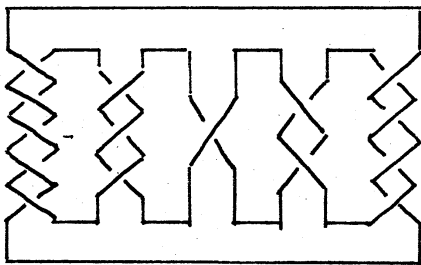


$|p_i|$: crossing の個数
 $\begin{cases} p_i > 0 \text{ のとき right handed} \\ p_i < 0 \text{ のとき left handed} \end{cases}$

$p_i = 0, p_j = -$ の場合



例えば $K(-5, 3, 1, -2, 4)$ は

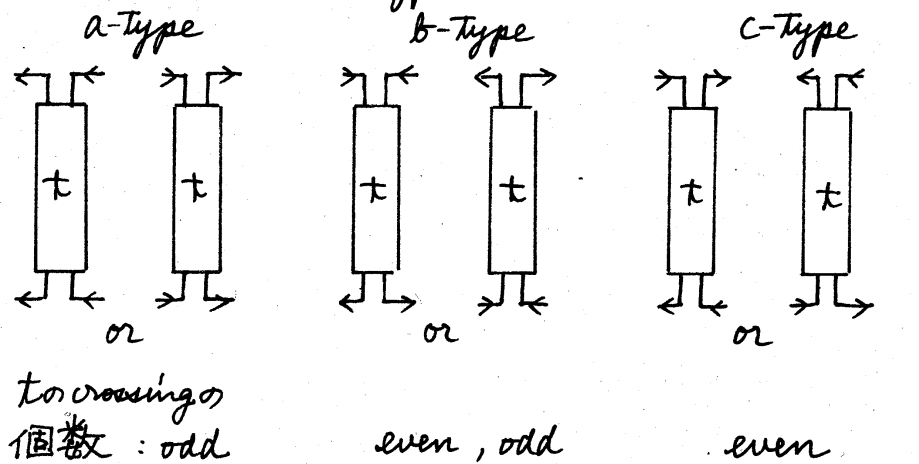


である。

さて、pretzel link の各 component に任意に向きを入れる
と、向きのついた twist を並列に並べたものとみることが
できる。したがって、逆に何本かの向きのついた twist を
両端から出る矢印の向きを 隣りの twist の矢印の向きと
矛盾なく合わせて並べることによって pretzel link を

構成することを考える。

1本の twist は両端から出ている矢印に注目すると a, b, c type に限る。



これらを並列に並べて pretzel link になるのは 次の
 ① ② の場合である。

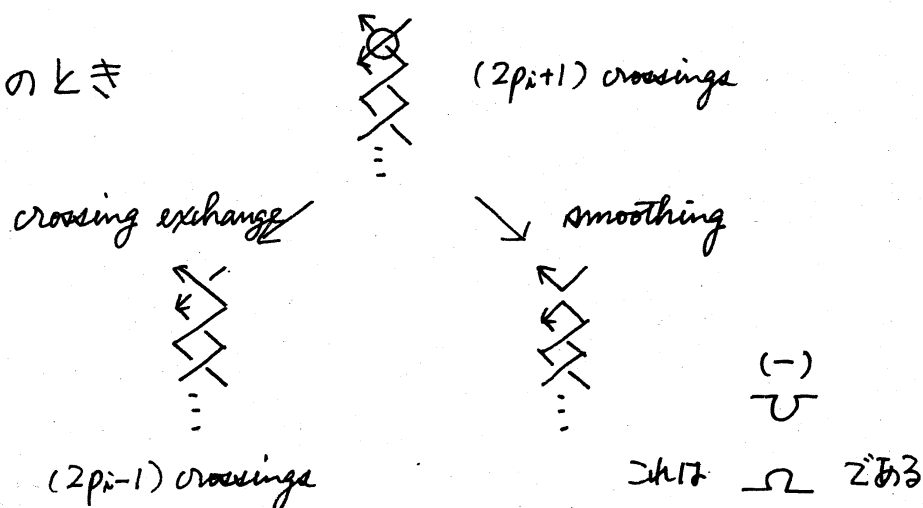
- ① a-type ばかり
- ② b-type と c-type の混合 (ただし b-type twist の本数は偶数)

以下①.②の場合について polynomial を求める。

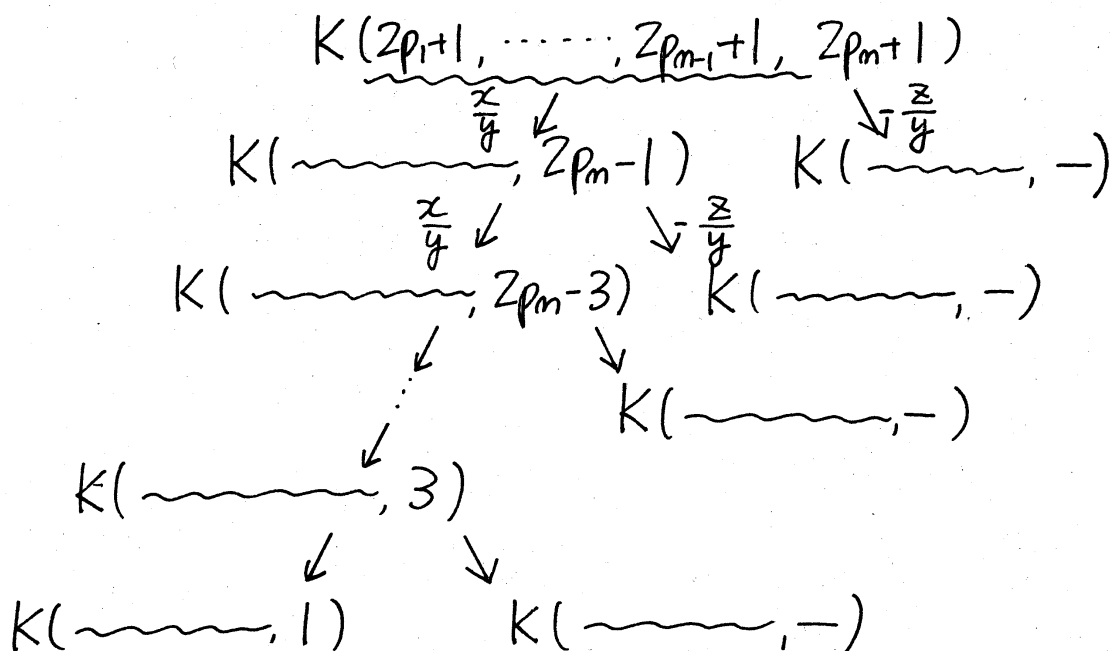
- ① $K(2p_1+1, 2p_2+1, \dots, 2p_m+1)$ $p_i \in \mathbb{Z}$
 定義に従って crossing の個数を減らして簡単な形に
 もっていく。

i番目の twist に crossing exchange と smoothing を
 行くと

$p_i > 0$ のとき



したがって n 番目の twist に対しての resolution は



ゆえに

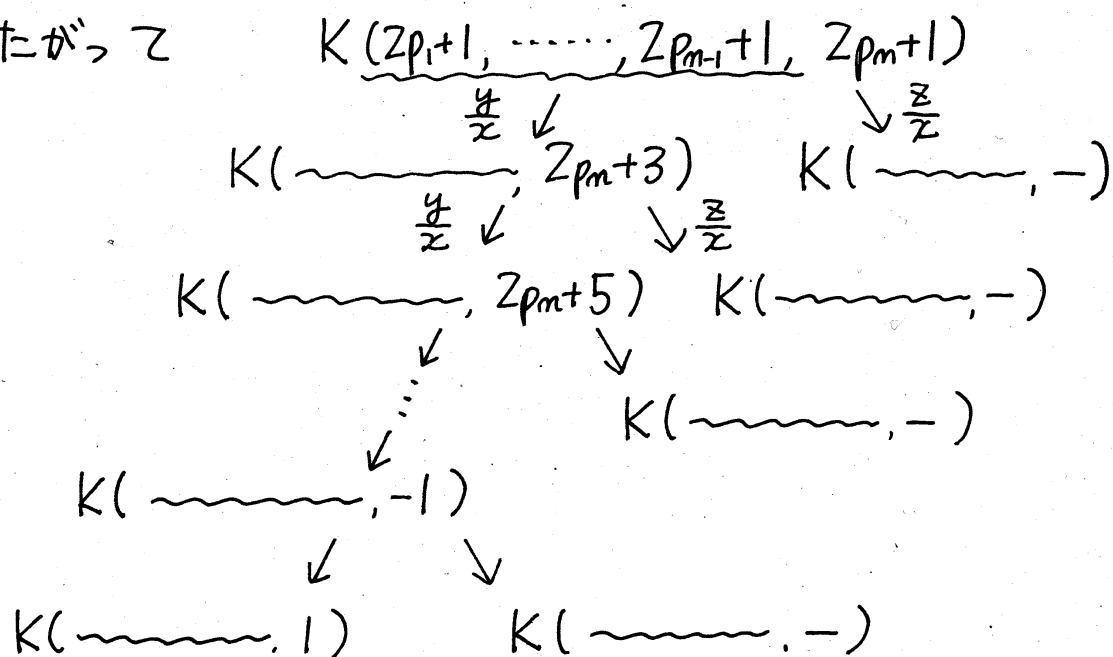
$$\begin{aligned}
 & QK(2p_i+1, \dots, 2p_{m-1}+1, 2p_m+1) \\
 &= \left(\frac{x}{y}\right)^{p_m} QK(\text{---}, 1) \\
 &\quad + \left\{ \left(-\frac{z}{y}\right) + \left(-\frac{z}{y}\right)\left(\frac{x}{y}\right) + \left(-\frac{z}{y}\right)\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \dots + \left(-\frac{z}{y}\right)\left(\frac{x}{y}\right)^{p_m-1} \right\} QK(\text{---}, -) \\
 &= \left(\frac{x}{y}\right)^{p_m} QK(\text{---}, 1) - \frac{z}{y} \frac{1 - \left(\frac{x}{y}\right)^{p_m}}{1 - \frac{x}{y}} QK(\text{---}, -) \quad \leftarrow (*)
 \end{aligned}$$

$p_i < 0$ のとき

crossing exchange

smoothing

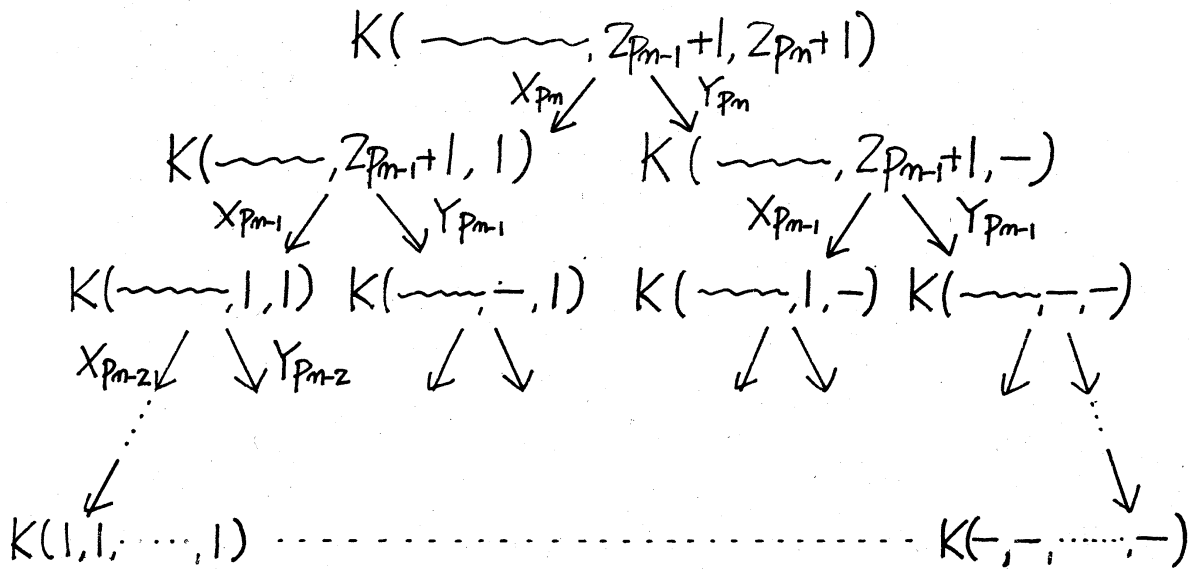
したがって



$$\begin{aligned}
 & QK(Z_{p_i+1}, \dots, Z_{p_{m-1}+1}, Z_{p_m+1}) \\
 &= \left(\frac{y}{z}\right)^{p_m} QK(\dots, 1) \\
 &\quad + \left\{ \frac{z}{x} + \frac{z}{x} \cdot \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \left(\frac{y}{z}\right)^2 + \dots + \frac{z}{x} \left(\frac{y}{z}\right)^{p_m-1} \right\} QK(\dots, -) \\
 &= \left(\frac{y}{z}\right)^{p_m} QK(\dots, 1) + \frac{z}{x} \frac{1 - \left(\frac{y}{z}\right)^{p_m}}{1 - \frac{y}{z}} QK(\dots, -) \\
 &= \left(\frac{x}{y}\right)^{p_m} QK(\dots, 1) - \frac{z}{y} \frac{1 - \left(\frac{x}{y}\right)^{p_m}}{1 - \frac{x}{y}} QK(\dots, -)
 \end{aligned}$$

これは(*)と同じ式である。

$$X_{p_i} = \left(\frac{x}{y}\right)^{p_i}, \quad Y_{p_i} = -\frac{z}{y} \cdot \frac{1 - \left(\frac{x}{y}\right)^{p_i}}{1 - \frac{x}{y}} \quad \text{とおく}$$



したがって

$$\begin{aligned} & QK(z_{p_1+1}, z_{p_2+1}, \dots, z_{p_m+1}) \\ &= X_{p_1} X_{p_2} \dots X_{p_m} QK(1, 1, \dots, 1) + \dots \\ & \quad + Y_{p_1} Y_{p_2} \dots Y_{p_m} QK(-, -, \dots, -) \end{aligned}$$

ここで、 1 と $-$ からなる列 $k_1, \dots, k_m$ すべてにわたって

$z_{p_1} z_{p_2} \dots z_{p_m} QK(k_1, k_2, \dots, k_m)$ の和をとる。

ただし、 $k_i = 1$ のとき $z_{p_i} = X_{p_i}$,

$k_i = -$ のとき $z_{p_i} = Y_{p_i}$

である。

初期値 $QK(k_1, k_2, \dots, k_m)$ $k_i = 1$ または $-$

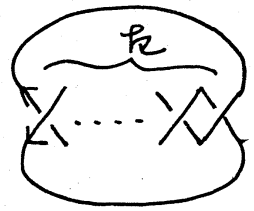
は、 $K(k_1, k_2, \dots, k_m)$ が図に示す link となるので、

これを $L(k)$ とすれば

$L(k)$ の polynomial は induction で

$$Q_L(k) = \frac{x-y}{y} Q_L(k-2) - \frac{z}{y} Q_L(k-1)$$

$$Q_L(0) = \frac{x-y}{z}, \quad Q_L(1) = 1$$



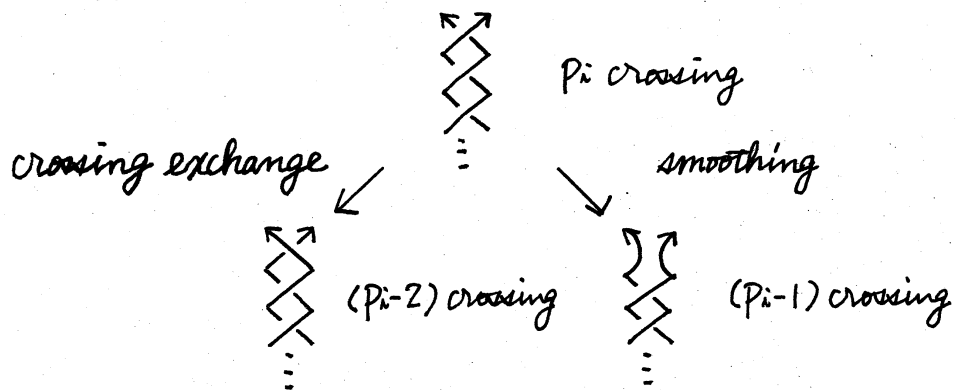
$k=1$ の個数

$$\textcircled{2} \quad K(\underbrace{p_1, \dots, p_m}_{b\text{-Type}}, \underbrace{2q_1, \dots, 2q_m}_{c\text{-Type}})$$

C-type twist の形は右図のようになっているので、a-type と同じ形の resolution となるが

crossing の個数が偶数なので、初期値は 0 と - の列となる

b-type twist で $p_i > 0$ のとき



i 番目の b-type twist の resolution は

$$K(\sim, p_i, \sim) \begin{matrix} \swarrow \frac{y}{z} \\ \searrow \frac{z}{z} \end{matrix} \begin{matrix} K(\sim, p_i-2, \sim) & K(\sim, p_i-1, \sim) \end{matrix}$$

となり、3項間漸化式となつて初期値は 1 と 0 の列になる。

したがって

$$\begin{aligned}
 & QK(\sim, p_i, \sim) \\
 &= \frac{z}{x} QK(\sim, p_i-1, \sim) + \frac{y}{x} QK(\sim, p_i-2, \sim) \\
 &= \frac{\left(\frac{z+\sqrt{D}}{2x}\right)^{p_i} - \left(\frac{z-\sqrt{D}}{2x}\right)^{p_i}}{\frac{\sqrt{D}}{x}} QK(\sim, 1, \sim) + \frac{\frac{y}{x} \left\{ \left(\frac{z+\sqrt{D}}{2x}\right)^{p_i-1} - \left(\frac{z-\sqrt{D}}{2x}\right)^{p_i-1} \right\}}{\frac{\sqrt{D}}{x}} \\
 &\quad \times QK(\sim, 0, \sim)
 \end{aligned}$$

ただし $D = z^2 + 4xy$

上式は a -type の時と同様に $p_i < 0$ の時も成り立つ。

$$\text{ここで } U_{p_i} = \frac{\left(\frac{z+\sqrt{D}}{2x}\right)^{p_i} - \left(\frac{z-\sqrt{D}}{2x}\right)^{p_i}}{\frac{\sqrt{D}}{x}} \quad V_{p_i} = \frac{\frac{y}{x} \left\{ \left(\frac{z+\sqrt{D}}{2x}\right)^{p_i-1} - \left(\frac{z-\sqrt{D}}{2x}\right)^{p_i-1} \right\}}{\frac{\sqrt{D}}{x}}$$

とおくと

$$\begin{aligned}
 & QK(p_1, \dots, p_{2n}, zq_1, \dots, zq_m) \\
 &= U_{p_1} \cdots U_{p_{2n}} X_{q_1} \cdots X_{q_m} QK(1, \dots, 1, 0, \dots, 0) + \cdots \\
 &\quad + V_{p_1} \cdots V_{p_{2n}} Y_{q_1} \cdots Y_{q_m} QK(0, \dots, 0, -, \dots, -)
 \end{aligned}$$

ここで、1 と 0 からなる列 $k_1, \dots, k_{2n}$,

0 と - からなる列 $k'_1, \dots, k'_m$ すべてにわたって

$$Z_{p_1} \cdots Z_{p_{2n}} Z_{q_1} \cdots Z_{q_m} QK(k_1, \dots, k_{2n}, k'_1, \dots, k'_m)$$

の和をとる。ただし

$$k_i = 1 \text{ のとき } Z_{p_i} = U_{p_i}, \quad k_i = 0 \text{ のとき } Z_{p_i} = V_{p_i}$$

$$k'_i = 0 \text{ のとき } Z_{q_i} = X_{q_i}, \quad k'_i = - \text{ のとき } Z_{q_i} = Y_{q_i}$$

である。

初期値は $QK(k_1, \dots, k_{2m}, k'_1, \dots, k'_m)$

$k_i = 0$ または 1 , $k'_i = 0$ または ∞

で、列 $k_1, \dots, k_{2m}, k'_1, \dots, k'_m$ に 0 を含めば

$K(k_1, \dots, k_{2m}, k'_1, \dots, k'_m)$ は trivial link となる。

したがってこの時

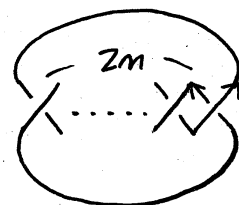
$$QK(k_1, \dots, k_{2m}, k'_1, \dots, k'_m) = \left(\frac{x-y}{z}\right)^{k-1} \quad k \text{ は } 0 \text{ の個数}$$

0 を含まない時は $K(1, \dots, 1, - \dots, -)$

であり、この polynomial は

$$QL(z_m) = \frac{y}{z} QL(z_{m-2}) + \frac{z}{z}$$

$$QL(z) = \frac{y(x-y) + z^2}{xz}$$



を満たす。