

Some approximations to the non-central t-distribution and applications

筑波大・数学 赤平 昌文 (Masafumi Akahira)
筑波大・数学 佐藤 道一 (Michikazu Sato)
筑波大・数学 鳥越 規央 (Norio Torigoe)

1. はじめに

本研究の目的は、非心 t 分布のパーセント点の近似式を比較検討することである。まず、非心 t 分布のパーセント点の従来の近似式と、最近、Cornish-Fisher 展開を用いて提案された新しい高次の近似式等について論じ、次にそれらの近似式を数値計算によって比較検討する。

2つの正規母集団 $N(\mu_1, \sigma^2)$, $N(\mu_2, \sigma^2)$ があって、それぞれからの大きさ n_1, n_2 の無作為標本を $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}, Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$ とする。このとき

$$\bar{X} := \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} X_i, \quad \bar{Y} := \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} Y_i,$$

$$S_1^2 := \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X})^2, \quad S_2^2 := \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} (Y_i - \bar{Y})^2$$

とおいて

$$T := \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2} \sqrt{\frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}}}$$

とすると、 T は自由度 ν , 非心度 δ の非心 t 分布 $t(\nu, \delta)$ に従う t 統計量になる。但し、 $\nu := n_1 + n_2 - 2$, $\delta := \sqrt{n_1 n_2 / (n_1 + n_2)} D$, $D := (\mu_1 - \mu_2) / \sigma$ とする。この t 統計量 T は μ_1 と μ_2 の差の検定や信頼区間を求めたりするのに重要な統計量として知られている。そのためには非心 t 分布のパーセント点が必要になる。この値を得るためには非心 t 分布 $t(\nu, \delta)$ の密度関数を積分して求めればよいが、その密度関数は

$$f_T(t; \nu, \delta) := \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{(\sqrt{2}\delta)^k}{k!} \frac{\Gamma[(\nu + k + 1)/2]}{\sqrt{\pi\nu}\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(\frac{t}{\sqrt{\nu}}\right)^k \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+k+1}{2}}$$

$$(-\infty < t < \infty)$$

と複雑で、その積分を解析的には計算できないので、この分布のパーセント点を具体的に求めるためには数値計算を必要とし、それもそんなに容易ではない。そこで通常、既存の統計数値表を用いたり、近似式を使って算出したりする。非心 t 分布のパーセント点に関する数値表はかなり精確であるが、自由度について限られた場合しか載っていないために、補間法を用いると精度が落ちる可能性がある ([2],[7])。一方、適当な近似式があれば、任意の自由度、非心度の値を与えてパーセント点を求めることができるので、大変便利である。その際にはその精度が問題になる。

2. 非心 t 分布のパーセント点の近似式

$X, \nu S^2$ をそれぞれ正規分布 $N(\delta, 1)$ 、自由度 ν の中心カイ 2 乗分布 $\chi^2(\nu)$ に従う互いに独立な確率変数とする。このとき $T_{\nu, \delta} := X/\sqrt{S^2}$ とおくと $T_{\nu, \delta}$ は非心 t 分布 $t(\nu, \delta)$ に従う確率変数になる。ここで $S := \sqrt{S^2}$ とおく。従来、非心 t 分布 $t(\nu, \delta)$ の上側 100α パーセント点 t_α の近似式の中で次のものがよく用いられてきた。

まず、正規近似により導出された近似式を紹介する。 $T_{\nu, \delta}$ の分布関数は

$$P\{T_{\nu, \delta} \leq t\} = P\{X - tS \leq 0\}$$

となり、 ν が大きいとき S の分布を平均 $b_\nu := E[S] = \sqrt{2/\nu} \Gamma[(\nu+1)/2] / \Gamma(\nu/2)$ 、分散 $V[S] = 1 - b_\nu^2$ の正規分布とみなすことができる。従って $X - tS$ の分布は ν が大きいとき漸近的に正規分布 $N(\delta - tb_\nu, 1 + t^2(1 - b_\nu^2))$ に従うから

$$\alpha = P\{T_{\nu, \delta} > t_\alpha\} \approx 1 - \Phi\left(\frac{t_\alpha b_\nu - \delta}{\sqrt{1 + t_\alpha^2(1 - b_\nu^2)}}\right)$$

となり、次の近似式

$$(2.1) \quad t_\alpha \doteq \frac{\delta b_\nu + u_\alpha \sqrt{b_\nu^2 + (1 - b_\nu^2)(\delta^2 - u_\alpha^2)}}{b_\nu^2 - u_\alpha^2(1 - b_\nu^2)} \quad (\text{Jennett - Welch の近似式})$$

を得る。但し、 $\Phi(x)$, u_α はそれぞれ標準正規分布関数、その上側 $100\alpha\%$ 点とする。(2.1) においてさらに $b_\nu \doteq 1$, $1 - b_\nu^2 \doteq 1/2\nu$ とすれば次の近似式

$$(2.2) \quad t_\alpha \doteq \frac{\delta + u_\alpha \sqrt{1 + (\delta^2 - u_\alpha^2)/(2\nu)}}{1 - u_\alpha^2/(2\nu)} \quad (\text{Johnson - Welch の近似式})$$

を得る。次に、 $T_{\nu, \delta} - \delta$ の特性関数をカイ 2 乗統計量 S^2 を用いて Taylor 展開したものから導出された近似式に一致する近似式として

$$(2.3) \quad t_\alpha \doteq \delta + u_\alpha + \frac{1}{\nu} B_1(u_\alpha) + \frac{1}{\nu^2} B_2(u_\alpha) \quad (\text{van Eeden の近似式})$$

がある ([5])。但し

$$B_1(u_\alpha) = \frac{1}{4} \{u_\alpha^3 + u_\alpha + \delta(2u_\alpha^2 + 1) + \delta^2 u_\alpha\},$$

$$B_2(u_\alpha) = \frac{1}{96} \{5u_\alpha^5 + 16u_\alpha^3 + 3u_\alpha + 3\delta(4u_\alpha^4 + 12u_\alpha^2 + 1) \\ + 6\delta^2(u_\alpha^3 + 4u_\alpha) - 4\delta^3(u_\alpha^2 - 1) - 3\delta^4 u_\alpha\}$$

とする。

これらの近似式 (2.1), (2.2), (2.3) について、 $\eta := \delta/\sqrt{2\nu + \delta^2}$ の絶対値が 0 に近ければ、その精度は悪くないが、1 に近いとき、すなわち非心度 δ が大きいとき、極めて精度が悪くなってしまう ([5])。

最近、Cornish-Fisher 展開を用いて、高次の次数まで考慮した近似式が提案された ([1])。 t_α を $t(\nu, \delta)$ の上側 $100\alpha\%$ 点とし、 $Z := X - \delta$ とすると、

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= P\{T_{\nu, \delta} < t_\alpha\} = P\{X/S < t_\alpha\} \\ &= P\{(Z + \delta)/S < t_\alpha\} = P\{Z + \delta < t_\alpha S\} \\ &= P\{Z - t_\alpha S < -\delta\} \end{aligned}$$

になる。このとき $Z - t_\alpha S$ を規準化すると

$$(2.4) \quad 1 - \alpha = P \left\{ \frac{Z - t_\alpha(S - b_\nu)}{\sqrt{1 + t_\alpha^2(1 - b_\nu^2)}} < \frac{t_\alpha b_\nu - \delta}{\sqrt{1 + t_\alpha^2(1 - b_\nu^2)}} \right\}$$

になり、 W を

$$(2.5) \quad W := \frac{Z - t_\alpha(S - b_\nu)}{\sqrt{1 + t_\alpha^2(1 - b_\nu^2)}}$$

によって定義された統計量とすれば

$$E[W] = 0, \quad V[W] = 1$$

になる。そこでこの W の分布関数に関する Cornish-Fisher 展開を $o(\nu^{-3})$ の次数まで得るために、まず W のキュムラントを求める。

補題 2.1([1]). $Z - t_\alpha(S - b_\nu)$ の 3 次、4 次キュムラントは

$$\kappa_{3,\nu}[Z - t_\alpha(S - b_\nu)] = t_\alpha^3 b_\nu \left\{ 2(1 - b_\nu^2) - \frac{1}{\nu} \right\},$$

$$\kappa_{4,\nu}[Z - t_\alpha(S - b_\nu)] = 2t_\alpha^4 [(1 - b_\nu^2)\{2 - 3(1 - b_\nu^2)\} + \frac{2}{\nu}(1 - b_\nu^2) - \frac{1}{\nu}]$$

である。

(証明の概略) $E[S] = b_\nu, E[S^2] = 1, E[S^3] = (1 + 1/\nu)b_\nu$ であり、 Z と S は独立であるから

$$\begin{aligned} \kappa_{3,\nu}[Z - t_\alpha(S - b_\nu)] &= E[\{Z - t_\alpha(S - b_\nu)\}^3] = E[-\{t_\alpha(S - b_\nu)\}^3] \\ &= t_\alpha^3 b_\nu \left\{ 2(1 - b_\nu^2) - \frac{1}{\nu} \right\} \end{aligned}$$

を得る。また $E[Z] = 0, E[Z^4] = 3, E[S^4] = 1 + (2/\nu)$ となるから、上記と同様にして

$$\begin{aligned}\kappa_{4,\nu}[Z - t_\alpha(S - b_\nu)] &= E[\{Z - t_\alpha(S - b_\nu)\}^4] - 3(E[\{Z - t_\alpha(S - b_\nu)\}^2])^2 \\ &= 2t_\alpha^4 \left[(1 - b_\nu^2)\{2 - 3(1 - b_\nu^2)\} + \frac{2}{\nu}(1 - b_\nu^2) - \frac{1}{\nu} \right]\end{aligned}$$

を得る。 $\square$

補題 2.2([1]). W の 3 次、4 次キュムラントは

$$\begin{aligned}\kappa_{3,\nu}[W] &= -\frac{t_\alpha^3}{4\{1 + t_\alpha^2(1 - b_\nu^2)\}^{\frac{3}{2}}} \left\{ \frac{1}{\nu^2} + \frac{1}{4\nu^3} + O(\nu^{-4}) \right\}, \\ \kappa_{4,\nu}[W] &= O(\nu^{-4})\end{aligned}$$

である。

(証明の概略) Stirling の公式より、

$$\Gamma(\nu) = \sqrt{2\pi}\nu^{\nu-\frac{1}{2}}e^{-\nu} \left(1 + \frac{1}{12\nu} + \frac{1}{288\nu^2} - \frac{139}{51840\nu^3} + O\left(\frac{1}{\nu^4}\right) \right)$$

であるから

$$\begin{aligned}(2.6) \quad b_\nu &= \sqrt{\frac{2}{\nu}} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{4\nu} + \frac{1}{32\nu^2} + \frac{5}{128\nu^3} + O\left(\frac{1}{\nu^4}\right)\end{aligned}$$

となる。またこれより

$$(2.7) \quad 1 - b_\nu^2 = \frac{1}{2\nu} - \frac{1}{8\nu^2} - \frac{1}{16\nu^3} + O\left(\frac{1}{\nu^4}\right)$$

になる。従って補題 2.1、(2.6)、(2.7) より W の 3 次キュムラントは

$$\begin{aligned}\kappa_{3,\nu}[W] &= \frac{1}{\{1 + t_\alpha^2(1 - b_\nu^2)\}^{\frac{3}{2}}} \kappa_{3,\nu}[Z - t_\alpha(S - b_\nu)] \\ &= \frac{t_\alpha^3 b_\nu}{\{1 + t_\alpha^2(1 - b_\nu^2)\}^{\frac{3}{2}}} \left\{ 2(1 - b_\nu^2) - \frac{1}{\nu} \right\} \\ &= -\frac{t_\alpha^3}{4\{1 + t_\alpha^2(1 - b_\nu^2)\}^{\frac{3}{2}}} \left\{ \frac{1}{\nu^2} + \frac{1}{4\nu^3} + O\left(\frac{1}{\nu^4}\right) \right\}\end{aligned}$$

となる。さらに4次キュムラントは補題2.1、(2.7)より

$$\begin{aligned}\kappa_{4,\nu}[W] &= \frac{1}{\{1+t_\alpha^2(1-b_\nu^2)\}^2} \kappa_{4,\nu}[Z-t_\alpha(S-b_\nu)] \\ &= \frac{2t_\alpha^4}{\{1+t_\alpha^2(1-b_\nu^2)\}^2} \left[(1-b_\nu^2)\{2-3(1-b_\nu^2)\} + \frac{2}{\nu}(1-b_\nu^2) - \frac{1}{\nu} \right] \\ &= O(\nu^{-4})\end{aligned}$$

を得る。□

定理2.1([1]). 非心t分布 $t(\nu, \delta)$ の上側 100α パーセント点を t_α とするとき、次の近似式が成り立つ。

$$(2.8) \quad \frac{t_\alpha b_\nu - \delta}{\sqrt{1+t_\alpha^2(1-b_\nu^2)}} = u_\alpha - \frac{t_\alpha^3(u_\alpha^2 - 1)}{24\{1+t_\alpha^2(1-b_\nu^2)\}^{\frac{3}{2}}} \left\{ \frac{1}{\nu^2} + \frac{1}{4\nu^3} + O\left(\frac{1}{\nu^4}\right) \right\}$$

(証明の概略) (2.5)と補題2.2から、 W の分布に関する Cornish-Fisher 展開を用いて

$$\begin{aligned}\frac{t_\alpha b_\nu - \delta}{\sqrt{1+t_\alpha^2(1-b_\nu^2)}} &= u_\alpha + \frac{1}{6}\kappa_{3,\nu}[W](u_\alpha^2 - 1) + \frac{1}{24}\kappa_{4,\nu}[W](u_\alpha^3 - 3u_\alpha) + O\left(\frac{1}{\nu^4}\right) \\ &= u_\alpha - \frac{t_\alpha^3(u_\alpha^2 - 1)}{24\{1+t_\alpha^2(1-b_\nu^2)\}^{\frac{3}{2}}} \left\{ \frac{1}{\nu^2} + \frac{1}{4\nu^3} + O\left(\frac{1}{\nu^4}\right) \right\}\end{aligned}$$

を得る。□

ここで、 W は Z と $S-b_\nu$ の線形結合から成っており、また S の分布がカイ2乗統計量の分布より、かなり速く正規分布に収束することが知られている。従って、 W の分布はかなり速く正規分布に収束すると考えられるから、近似式(2.8)はより良い近似を与えると考えられる。実際、近似式(2.3)は $T_{\nu,\delta}-\delta$ の特性関数をカイ2乗統計量の巾級数展開として表して導かれるものと一致すると述べられている([5])。このことより van Eeden の近似式(2.3)は、基本的にはカイ2乗統計量の分布から導いたと見なせる。よってカイ統計量の分布から作られた新しい近似式(2.8)は(2.3)よりもより良い近似を与えることが分かる。また、(2.8)の右辺の第2項以下を無視すると

$$\frac{t_\alpha b_\nu - \delta}{\sqrt{1 + t_\alpha^2(1 - b_\nu^2)}} = u_\alpha$$

を得る。これを t_α について解くと (2.1) が得られ、そこで $b_\nu = 1, 1 - b_\nu^2 = 1/(2\nu)$ とすれば (2.2) が得られる。このことから (2.8) は (2.1)、(2.2) の自然な拡張になっていると考えられるであろう。さらに近似式 (2.8) から δ の信頼限界および δ の信頼区間を求めることができる。

系 2.1([1]). T を非心 t 分布 $t(\nu, \delta)$ に従う統計量とする。このとき水準 $1 - \alpha$ の下側信頼限界 $\hat{\delta}$ 及び水準 $1 - \alpha$ の δ の信頼区間 $[\underline{\delta}, \bar{\delta}]$ は次のように与えられる。

$$\hat{\delta} = b_\nu T - u_\alpha \sqrt{1 + (1 - b_\nu^2)T^2} + \frac{(u_\alpha^2 - 1)T^3}{24\{1 + (1 - b_\nu^2)T^2\}} \left(\frac{1}{\nu^2} + \frac{1}{4\nu^3} \right) + O_p(\nu^{-4}),$$

$$\underline{\delta} = b_\nu T - u_{\alpha/2} \sqrt{1 + (1 - b_\nu^2)T^2} + \frac{(u_{\alpha/2}^2 - 1)T^3}{24\{1 + (1 - b_\nu^2)T^2\}} \left(\frac{1}{\nu^2} + \frac{1}{4\nu^3} \right) + O_p(\nu^{-4}),$$

$$\bar{\delta} = b_\nu T + u_{\alpha/2} \sqrt{1 + (1 - b_\nu^2)T^2} - \frac{(u_{\alpha/2}^2 - 1)T^3}{24\{1 + (1 - b_\nu^2)T^2\}} \left(\frac{1}{\nu^2} + \frac{1}{4\nu^3} \right) + O_p(\nu^{-4})$$

証明は定理 2.1 から容易に得られる。

3. 新しい近似式の解の存在性と一意性

近似式 (2.8) で問題となるのは、 t_α の値が存在し、なおかつそれが一意的であるかどうかということである。そこで

$$f(t) = f_{\nu, \alpha, \delta}(t) := u_\alpha - \frac{tb_\nu - \delta}{\sqrt{1 + t^2(1 - b_\nu^2)}} - \frac{t^3(u_\alpha^2 - 1)}{24\{1 + t^2(1 - b_\nu^2)\}^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{1}{\nu^2} + \frac{1}{4\nu^3} \right)$$

とおいて、 $f(t) = 0$ の方程式をニュートン法によって解きたい。しかし $f(t) = 0$ の解が 2 つ以上あった場合、ニュートン法で正しい方の値が求められるとは限らない。まず、 $f(t)$ のグラフで確認してみよう。表 3.1 は $f(t)$ のグラフで、 $\alpha = 0.05, \nu = 10, \eta$ は 0.9 から 0.1 まで 0.1 間隔である。すると $f(t) = 0$

の解は一意的に存在する (これは次の定理 3.1 から確かに成り立つ)。表 3.2 では、 α, ν は同じで η が -0.9 から -0.1 であるが、こちらも同様である。しかし α, ν が特別な場合、解が存在しなかったり解が少なくとも 2 つになったりする。たとえば表 3.3, 3.4 のように $\nu = 10$ 、 $u_\alpha = 6$ のとき、そのようなことが生じる (これは定理 3.3 から [(3) も使う]、 $\delta \geq 0$ なら解は存在せず、 $\eta \leq -0.7$ なら解が少なくとも 2 つあることが示せる)。よって (2.8) の解が常に存在するとか、一意であるとか言えないのである。以下の定理 3.1、系 3.1、定理 3.2、及び系 3.2 では、実用的な範囲において $f(t) = 0$ の解が一意的であることを示している。

$b = b_\nu, u = u_\alpha, a = a_\nu := 1 - b_\nu^2$ とし、

$$g(t) = g_{\nu, \alpha, \delta}(t) := u - \frac{bt - \delta}{\sqrt{1 + at^2}},$$

$$y(t) = y_\nu(t) := \frac{t^6}{(1 + at^2)^3} \quad (\text{偶関数}),$$

$$h(t) = h_{\nu, \alpha}(t) := \frac{u^2 - 1}{24} \left(\frac{1}{\nu^2} + \frac{1}{4\nu^3} \right) \text{sgn}(t) \sqrt{y(t)} \quad (\text{奇関数}),$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{\nu, \alpha} := \sup_{-\infty < t < \infty} |h(t)|$$

と定義すると $f(t) = g(t) - h(t)$ となる。

補題 3.1.

$$0 < b_1 < b_2 < \cdots, \quad b_\nu^2 = 1 - \frac{1}{2\nu} + O(\nu^{-2}),$$

$$a_1 > a_2 > \cdots, \quad a_\nu > 0, \quad a_\nu = \frac{1}{2\nu} + O(\nu^{-2})$$

(証明) $b_\nu > 0$ は自明。一般に $s > 0$ に対して

$$\Gamma(s) = \sqrt{2\pi} s^{s-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -s + \frac{1}{12s} - \frac{\theta(s)}{360s^2} \right\} \quad (0 < \theta(s) < 1)$$

と表される ([6]) ので、

$$b_\nu^2 = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu \exp \left[-\frac{1}{3\nu(\nu+1)} + \frac{2}{45} \left\{ \frac{\theta(\nu/2)}{\nu^3} - \frac{\theta((\nu+1)/2)}{(\nu+1)^3} \right\} \right]$$

が成り立ち、 $\nu \geq 2$ に対して

$$\begin{aligned} \frac{b_\nu^2}{b_{\nu-1}^2} &= \frac{(1 + \frac{1}{\nu})^\nu}{(1 + \frac{1}{\nu-1})^{\nu-1}} \\ &\quad \cdot \exp \left[\frac{2}{3(\nu+1)\nu(\nu-1)} + \frac{2}{45} \left\{ \frac{2\theta(\nu/2)}{\nu^3} - \frac{\theta((\nu-1)/2)}{(\nu-1)^3} - \frac{\theta((\nu+1)/2)}{(\nu+1)^3} \right\} \right] \\ &\geq \exp \left\{ \frac{2}{3(\nu+1)\nu(\nu-1)} - \frac{4}{45(\nu-1)^3} \right\} \\ &= \exp \frac{2(13\nu^2 - 32\nu + 15)}{45(\nu+1)\nu(\nu-1)^3} \\ &\geq \exp \frac{2}{15(\nu+1)\nu(\nu-1)^3} > 1 \end{aligned}$$

従って $0 < b_1 < b_2 < \dots$ である。 $b_\nu^2 = 1 - 1/(2\nu) + O(\nu^{-2})$ は補題 2.2 の証明の過程による。

後半は前半から明らか。

□

補題 3.2.

$$y'(t) = \frac{6t^5}{(1+at^2)^4}$$

$$\varepsilon := \sup_{-\infty < t < \infty} |h(t)| = \frac{|u_\alpha^2 - 1|}{24} \left(\frac{1}{\nu^2} + \frac{1}{4\nu^3} \right) \frac{1}{a_\nu^{3/2}}$$

$$g'(t) = \frac{-a\delta t - b}{(1+at^2)^{3/2}}$$

$$g(\pm\infty) := \lim_{t \rightarrow \pm\infty} g(t) = u \mp \frac{b}{\sqrt{a}}$$

$$g\left(-\frac{b}{a\delta}\right) = u + \frac{b^2 + a\delta^2}{\sqrt{a}\sqrt{a\delta^2 + b^2}} \operatorname{sgn} \delta \quad (\delta \neq 0)$$

(証明) 直接の計算による。 $\square$

定理 3.1. $1 \leq |u_\alpha| < b_\nu/\sqrt{a_\nu}$ であれば $f(t) = 0$ の解はただ 1 つ存在する。更に詳しくは

- (i) $\delta > 0$ かつ $[-b_\nu/\sqrt{a_\nu} < u_\alpha \leq -1$ または $1 \leq u_\alpha < b_\nu/\sqrt{a_\nu} + \varepsilon_{\nu,\alpha}]$
- (ii) $\delta = 0$ かつ $1 \leq |u_\alpha| < b_\nu/\sqrt{a_\nu} + \varepsilon_{\nu,\alpha}$
- (iii) $\delta < 0$ かつ $[-b_\nu/\sqrt{a_\nu} - \varepsilon_{\nu,\alpha} < u_\alpha \leq -1$ または $1 \leq u_\alpha < b_\nu/\sqrt{a_\nu}]$

のいずれかが満たされれば $f(t) = 0$ の解はただ 1 つ存在する。

(証明) (i) で $u_\alpha \neq \pm 1$ のときを示す。他も同様である。補題 3.2 より $g, -h, f$ の増減は $\delta > 0, |u_\alpha| > 1$ のとき下の通りである。

t	$-\infty$	$\dots$	$-\frac{b}{g\delta}$	$\dots$	∞
$g(t)$	$u + \frac{b}{\sqrt{a}}$	$\nearrow$	$u + \frac{b^2 + a\delta^2}{\sqrt{a}\sqrt{a\delta^2 + b^2}}$	$\searrow$	$u - \frac{b}{\sqrt{a}}$
$-h(t)$	ε	$\searrow$	> 0	$\searrow$	$-\varepsilon$
$f(t)$	$u + \frac{b}{\sqrt{a}} + \varepsilon$	$> u + \frac{b}{\sqrt{a}}$		$\searrow$	$u - \frac{b}{\sqrt{a}} - \varepsilon$

従って $u - b/\sqrt{a} - \varepsilon < 0 < u + b/\sqrt{a}$ 、すなわち $-b_\nu/\sqrt{a_\nu} < u_\alpha < b_\nu/\sqrt{a_\nu} + \varepsilon_{\nu,\alpha}$ であれば $f(t) = 0$ の解はただ 1 つ存在する。 $\square$

系 3.1. $|u_\alpha| \geq 1$ となる α を固定すると δ によらず十分大きい ν に対して $f(t) = 0$ の解はただ 1 つ存在する。

(証明) 定理 3.1 と補題 3.1 から明らか。 $\square$

なお、数値的には

$$\frac{b_1}{\sqrt{a_1}} = \sqrt{\frac{2}{\pi - 2}} \approx 1.323608097,$$

$$\frac{b_2}{\sqrt{a_2}} = \sqrt{\frac{\pi}{4 - \pi}} \approx 1.91305838,$$

$$\frac{b_3}{\sqrt{a_3}} = \sqrt{\frac{8}{3\pi - 8}} \approx 2.564219577,$$

$$\frac{b_4}{\sqrt{a_4}} = \sqrt{\frac{9\pi}{32 - 9\pi}} \approx 2.754826328$$

であり、補題 3.1、定理 3.1 と正規分布の表を用いると

$\nu = 1$ のとき	0.1	$\leq \alpha \leq 0.15$
$\nu = 2$ のとき	0.03	$\leq \alpha \leq 0.15$
$\nu = 3$ のとき	0.006	$\leq \alpha \leq 0.15$
$\nu \geq 4$ のとき	0.003	$\leq \alpha \leq 0.15$

であれば $f(t) = 0$ の解はただ 1 つ存在する。 α のかわりに $1 - \alpha$ として上の不等式を満たす場合でもよい。このことから、検定に用いる場合は実用上は問題はない。しかしメジアンを求めたい場合は定理 3.1 は使えない。次の定理 3.2 は使えるが実際に ν がどのくらい大きければよいかを求めるのは容易ではない。

定理 3.2 $\gamma > 0$ があって次の $(C_1) \sim (C_4)$ が満たされれば $f(t) = 0$ の解はただ 1 つ存在する。

$$(C_1) \quad \varepsilon_{\nu, \alpha} < \frac{b_\nu}{\sqrt{a_\nu}} - |u_\alpha|$$

$$(C_2) \quad -g(\gamma) \left(= -u_\alpha + \frac{b_\nu \gamma - \delta}{\sqrt{1 + a_\nu \gamma^2}} \right) > \varepsilon_{\nu, \alpha}$$

$$\text{かつ} \quad g(-\gamma) \left(= u_\alpha + \frac{b_\nu \gamma + \delta}{\sqrt{1 + a_\nu \gamma^2}} \right) > \varepsilon_{\nu, \alpha}$$

$$(C_3) \quad \gamma < \frac{1}{\sqrt{a_\nu}}$$

$$(C_4) \quad \frac{|u_\alpha^2 - 1|}{24} \left(\frac{1}{\nu^2} + \frac{1}{4\nu^3} \right) \frac{\gamma^3}{(1 - a_\nu \gamma^2)^{3/2}} < \frac{|b_\nu \gamma - |\delta||}{\sqrt{1 + a_\nu \gamma^2}} - |u_\alpha|$$

(証明) 補題 3.1 より、 g の増減を考えると (C_1) のとき $g(t) = 0$ の実解はただ 1 つあり、1 位である。 (C_2) のときそれは $(-\gamma, \gamma)$ 上にあり

$$t \leq -\gamma \implies g(t) > \varepsilon$$

$$t \geq \gamma \implies g(t) < -\varepsilon$$

であり、更に $f = g - h, |h(t)| \leq \varepsilon \quad (t \in R)$ だから

$$t \leq -\gamma \implies f(t) > 0$$

$$t \geq \gamma \implies f(t) < 0$$

であり、従って $f(t) = 0$ の実解は $(-\gamma, \gamma)$ 上に少なくとも1つあり、 $(-\gamma, \gamma)$ の外にはない。

次に f, g, h を複素関数に拡張する。但し $\sqrt{z}$ は $\{z \leq 0\}$ 以外で解析的になるように定める。このとき $\sqrt{1+az^2}$ は $\{\Re z = 0, |\Im z| \geq 1/\sqrt{a}\}$ を除いた領域で解析的となる。 (C_3) より、 $\{|z| \leq \gamma\}$ を含む領域で g, h は解析的で、 $|z| = \gamma$ では

$$|g(z)| \geq \frac{|b\gamma - |\delta||}{\sqrt{1+a\gamma}} - |u|$$

$$|1+az^2| \geq 1-a\gamma^2 \quad (> 0)$$

$$|y(z)| \leq \frac{\gamma^6}{(1-a\gamma^2)^3}$$

$$|h(z)| \leq \frac{|u^2-1|}{24} \left(\frac{1}{\nu^2} + \frac{1}{4\nu^3} \right) \frac{\gamma^3}{(1-a\gamma^2)^{3/2}}$$

になる。よって (C_4) のとき $|z| = \gamma$ 上で $|h(z)| < |g(z)|$ になるから Rouché の定理 ([4]) より $\{|z| < \gamma\}$ での f, g の零点の個数 (位数に応じて数える) は一致する。

今、 $g(t) = 0$ は本質的に実係数の2次方程式で、実数解を $(-\gamma, \gamma)$ 上に持つ (そして1位)。だから虚数解は持たず、従って $f(t) = 0$ の $\{|z| < \gamma\}$ での解の個数は1であり、 $(-\gamma, \gamma)$ 上に少なくとも1つあることは既に示されているから $(-\gamma, \gamma)$ 上にただ1つあり、 $(-\gamma, \gamma)$ の外に実解がないことも既に示されているから、結局 $f(t) = 0$ の実解はただ1つある。 $\square$

系 3.2. α, δ を固定すると、十分大きい ν に対して $f(t) = 0$ の解はただ1つ存在する。

(証明) α, δ を固定し、十分大きい $\gamma > 0$ を固定すると、十分大きい ν に対して定理 3.2 の $(C_1) \sim (C_4)$ が満たされることによる。 $\square$

次の定理 3.3、系 3.3 では $f(t) = 0$ に解が2つ以上ある場合や存在しない場合もあることを示している。

定理 3.3.

$$c = c_\nu := \frac{1}{24} \left(\frac{1}{\nu^2} + \frac{1}{4\nu^3} \right) \frac{1}{a_\nu^{3/2}},$$

$$D = D_\nu := 1 - 4c_\nu \left(\frac{b_\nu}{\sqrt{a_\nu}} - c_\nu \right)$$

とおく。

(1) 次の $(B_1) \sim (B_4)$ が満たされれば $f(t) = 0$ は少なくとも 2 つの解を持つ。

$$(B_1) \quad D_\nu > 0$$

$$(B_2) \quad \frac{-1 - \sqrt{D_\nu}}{2c_\nu} < u_\alpha < \frac{-1 + \sqrt{D_\nu}}{2c_\nu}$$

$$(B_3) \quad \frac{-1 + \sqrt{D_\nu}}{2c_\nu} \leq -1$$

$$(B_4) \quad \delta > 0 \quad \text{かつ} \quad g\left(-\frac{b_\nu}{a_\nu \delta}\right) \left(= u_\alpha + \frac{b_\nu^2 + a_\nu \delta^2}{\sqrt{a_\nu} \sqrt{a_\nu \delta^2 + b_\nu^2}} \right) \geq 0$$

(2) (1) の $(B_1) \sim (B_3)$ と $\delta \leq 0$ が満たされれば $f(t) = 0$ は解を持たない。

(3) (1), (2) は (α, δ) を $(1 - \alpha, -\delta)$ にかえて仮定が満たされる場合にも成立する。

(証明)

(1) まず $(B_1) \sim (B_3)$ より $u < -1$ であり、このことと c の定義から $\varepsilon = (u^2 - 1)c$ であり、よって

$$f(-\infty) = u + \frac{b}{\sqrt{a}} + (u^2 - 1)c = cu^2 + u + \left(\frac{b}{\sqrt{a}} - c \right)$$

だから、 $f(-\infty)$ を u の 2 次式と考えると $(B_1), (B_2)$ より $f(-\infty) < 0$ である。また (B_4) と $u < -1$ より

$$f\left(-\frac{b}{a\delta}\right) > g\left(-\frac{b}{a\delta}\right) \geq 0$$

であり $u < -1$ より

$$f(\infty) < u - \frac{b}{\sqrt{a}} - \varepsilon < u < -1 < 0$$

である。以上より $f(t) = 0$ は少なくとも 2 つの解をもつ。

(2) $\delta \leq 0$ だから定理 3.1 と同様に f の増減を考えると $f(t) < f(-\infty)$ で

あり、 $(B_1) \sim (B_3)$ より $f(-\infty) < 0$ だから $f(t) < 0$ である。

(3) $f_{\nu, 1-\alpha, -\delta}(-t) = -f_{\nu, \alpha, \delta}(t)$ による。 $\square$

系 3.3. 十分大きい ν を固定すると $f(t) = 0$ が 2 つ以上解をもつ (α, δ) 、及び $f(t) = 0$ が解を持たない (α, δ) が存在する。

(証明) 定理 3.3 で $(B_1), (B_3)$ は ν のみに関する条件であり、補題 3.1 より

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} D_\nu = \frac{1}{3} > 0, \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{-1 + \sqrt{D_\nu}}{2c_\nu} = -\infty$$

だから、十分大きい ν に対して $(B_1), (B_3)$ は満たされる。そのような ν に対して (B_2) が満たされるような α を固定する。すると、 $\lim_{\delta \rightarrow \infty} g_{\nu, \alpha, \delta}(-b/a\delta) = \infty$ だから (B_4) は十分大きい δ に対して満たされる。このとき $f(t) = 0$ は 2 つ以上解を持ち、また上の ν, α に対して $\delta \leq 0$ とすると $f(t) = 0$ は解を持たない。

$\square$

(注意). 「系 3.1、系 3.2 では ν が大きければ良いと言っているのに、系 3.3 では ν が大きいとよくないと言っているのだから矛盾ではないか。」と思われるかもしれないが、これは指定する順番が違うので矛盾ではない。系 3.1 では α を指定してから ν をとり、系 3.2 では α, δ を指定してから ν をとるのに反して、系 3.3 では最初に ν を指定してから α, δ をとるのである。定理 3.3 では $|u_\alpha| > 1$ なので系 3.1 で ν を δ のみならず α にも依存せずにとることはできないのである。

4. 数値計算による比較検討

まず、(2.1) から (2.3)、そして (2.8) の近似式で求めた数値と真値との誤差を α の値が、0.10, 0.05, 0.01 で ν が 4, 9, 16, 36 である場合に表 4.1 として示す。ここで真値は統計数値表 ([7]) の表 J 2. 3 に与えられているものにし、(2.8) の数値は数式処理ソフトウェア Mathematica を用いて初期値を 0 としてニュートン法によって算出する。なお η は $\eta = \delta / \sqrt{2\nu + \delta^2}$ で与えられる値である。この表から次のことがわかる。まず η の絶対値が 1 に近いほど近似式の値と真値との誤差が大きくなる傾向にあるが、(2.8) は η の絶対値が 1 に近い時でも誤差は他の近似式よりかなり小さくなっている。つまり全体とし

て極めて精確な値を与えている。例えば $\alpha = 0.05$ の場合、 ν が 9 以上で η の絶対値が 0.70 以下の時、誤差の絶対値は 0.005 以下になる。また表 4.2 では第 1 節の t 統計量の非心 t 分布 $t(\nu, \delta)$ について、その上側 $100\alpha\%$ 点を $\alpha = 0.05$ の場合に n_1, n_2 は 5 から 30 まで 1 間隔で、 D の値は 2.0, 1.0, 0.5 のときの、近似式 (2.8) によって算出された数値を示した。 $D = 2.0$ の場合 $|\eta| < 0.621$ 、 $D = 1.0$ の場合 $|\eta| < 0.368$ 、さらに $D = 0.5$ の場合 $|\eta| < 0.194$ となるので、この表 4.2 の値は信頼できるものと思われる。この表 4.2 のような数値は統計的有意差と臨床的有意差との関連を論じる際に必要になる ([3])。

参考文献

- [1] Akahira, M.(1993). A higher order approximation to a percentile point of the non-central t -distribution. *Mathematical Research Note 93-015*, Institute of Mathematics, University of Tsukuba.
- [2] Bagui, S. C.(1993). *CRC Handbook of Percentiles of Non-Central t -Distribution*, CRC Press, Florida.
- [3] 久保武士、重光貞彦、稲葉淳一、笠木公一 (1991). 統計学的有意差と臨床的有意差について. 第 11 回医療情報学連合大会、予稿集 219-220.
- [4] 黒田 正 (1968). 複素関数概説. 共立出版.
- [5] 柴田義貞 (1981). 正規分布. 東京大学出版会.
- [6] 高木貞治 (1961). 解析概論 改訂第三版. 岩波書店.
- [7] 山内二郎 他 (1972). 統計数値表. 日本規格協会.

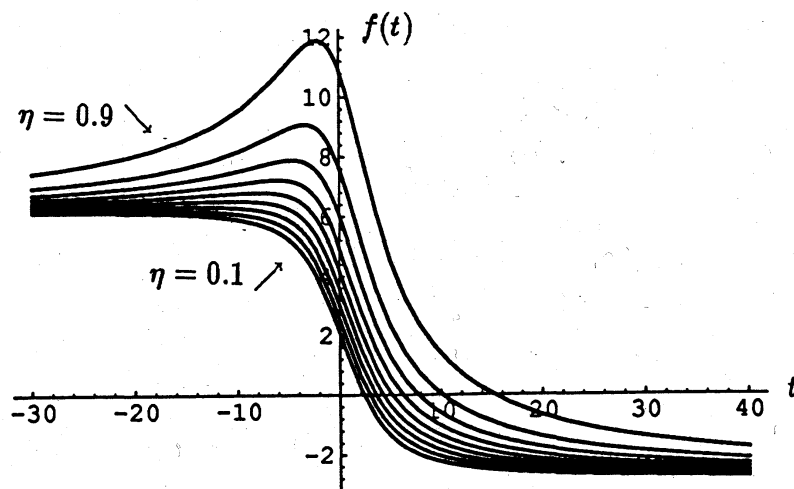


表 3.1 $f(t)$ のグラフ ($\nu = 10, u_\alpha = 1.64485(\alpha = 0.05), \eta = 0.9 \sim 0.1$)

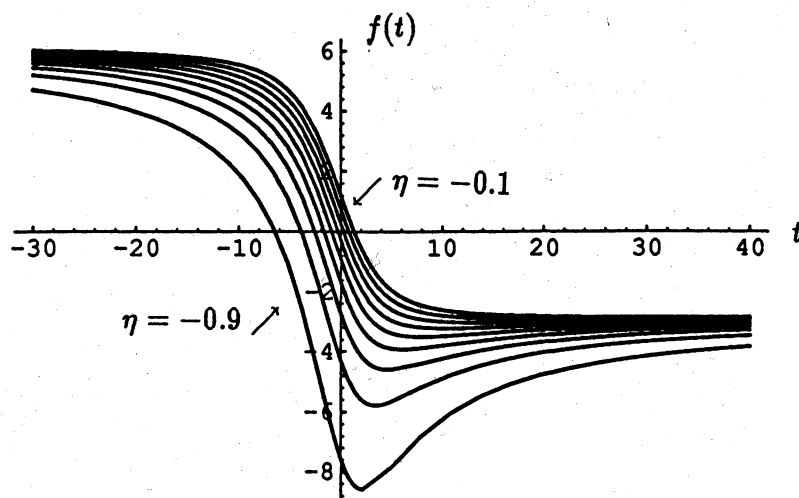


表 3.2 $f(t)$ のグラフ ($\nu = 10, u_\alpha = 1.64485(\alpha = 0.05), \eta = -0.1 \sim -0.9$)

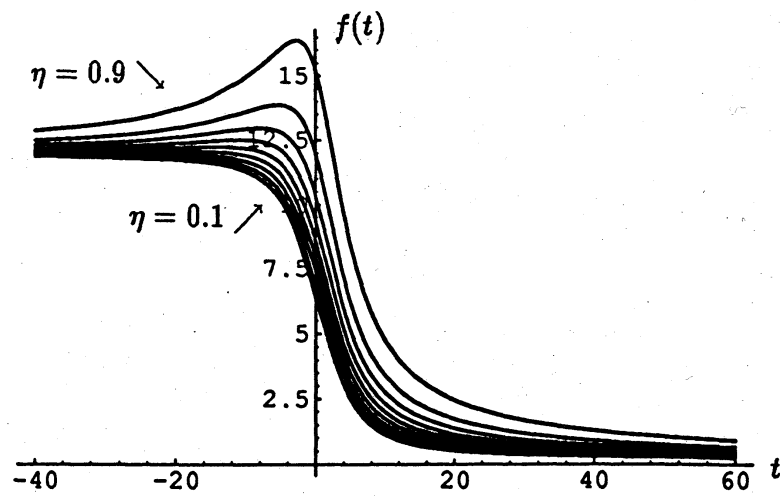


表 3.3 $f(t)$ のグラフ ($\nu = 10, u_\alpha = 6.0, \eta = 0.9 \sim 0.1$)

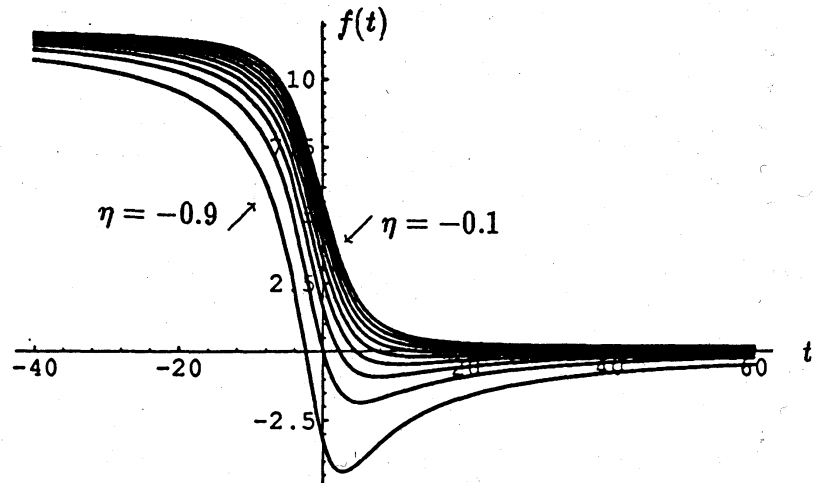


表 3.4 $f(t)$ のグラフ ($\nu = 10, u_\alpha = 6.0, \eta = -0.1 \sim -0.9$)

$$\alpha = 0.10$$

ν	η	真 値	(2.8) 数 値	(2.8) 誤 差	(2.1) 誤 差	(2.2) 誤 差	(2.3) 誤 差
4	0.9	11.636	11.603	-0.033	0.290	-0.661	-1.894
4	0.7	5.966	5.962	-0.004	0.130	-0.341	-0.102
4	0.5	4.002	4.003	0.001	0.069	-0.234	-0.039
4	0.3	2.814	2.815	0.001	0.033	-0.170	-0.020
4	0.1	1.924	1.924	0.000	0.013	-0.120	-0.009
4	-0.1	1.162	1.162	0.000	0.003	-0.073	-0.002
4	-0.3	0.432	0.432	0.000	-0.000	-0.027	-0.000
4	-0.5	-0.363	-0.363	0.000	-0.000	0.021	-0.000
4	-0.7	-1.428	-1.428	0.000	-0.004	0.076	-0.008
4	-0.9	-3.900	-3.902	-0.002	-0.032	0.178	-1.217
9	0.9	13.178	13.169	-0.009	0.099	-0.331	-1.860
9	0.7	6.677	6.676	-0.001	0.040	-0.173	-0.050
9	0.5	4.384	4.384	0.000	0.019	-0.117	-0.006
9	0.3	2.965	2.965	0.000	0.008	-0.081	-0.002
9	0.1	1.873	1.873	0.000	0.003	-0.052	-0.001
9	-0.1	0.908	0.908	0.000	0.000	-0.025	-0.000
9	-0.3	-0.054	-0.054	0.000	-0.000	0.001	-0.000
9	-0.5	-1.154	-1.154	0.000	-0.000	0.030	-0.000
9	-0.7	-2.713	-2.713	0.000	-0.004	0.065	-0.020
9	-0.9	-6.570	-6.572	-0.002	-0.026	0.138	-1.486
16	0.9	15.613	15.609	-0.004	0.057	-0.217	-1.875
16	0.7	7.825	7.824	-0.001	0.021	-0.114	-0.047
16	0.5	5.048	5.048	0.000	0.009	-0.076	-0.003
16	0.3	3.309	3.309	0.000	0.003	-0.051	-0.001
16	0.1	1.953	1.953	0.000	0.000	-0.031	-0.001
16	-0.1	0.735	0.735	0.000	0.000	-0.012	-0.000
16	-0.3	-0.500	-0.500	0.000	-0.000	0.007	-0.000
16	-0.5	-1.942	-1.942	0.000	-0.000	0.029	-0.000
16	-0.7	-4.033	-4.033	0.000	-0.004	0.055	-0.028
16	-0.9	-9.340	-9.342	-0.002	-0.022	0.112	-1.602
36	0.9	21.058	21.057	-0.001	0.031	-0.127	-1.882
36	0.7	10.403	10.403	0.000	0.011	-0.066	-0.046
36	0.5	6.558	6.558	0.000	0.004	-0.043	-0.002
36	0.3	4.119	4.119	0.000	0.002	-0.028	0.000
36	0.1	2.191	2.191	0.000	0.000	-0.015	0.000
36	-0.1	0.433	0.433	0.000	0.000	-0.003	0.000
36	-0.3	-1.380	-1.380	0.000	0.000	0.010	0.000
36	-0.5	-3.535	-3.535	0.000	-0.001	0.023	-0.001
36	-0.7	-6.727	-6.727	0.000	-0.003	0.041	-0.035
36	-0.9	-15.009	-15.010	-0.001	-0.016	0.082	-1.702

表 4.1. t_α の近似式の誤差

$$\alpha = 0.05$$

ν	η	真 值	(2.8) 数 值	(2.8) 誤 差	(2.1) 誤 差	(2.2) 誤 差	(2.3) 誤 差
4	0.9	14.301	14.380	0.079	1.517	0.039	-2.937
4	0.7	7.417	7.435	0.018	0.666	-0.062	-0.243
4	0.5	5.053	5.070	0.017	0.359	-0.106	-0.104
4	0.3	3.636	3.642	0.006	0.186	-0.124	-0.056
4	0.1	2.587	2.588	0.001	0.082	-0.120	-0.028
4	-0.1	1.703	1.703	0.000	0.026	-0.095	-0.010
4	-0.3	0.877	0.877	0.000	0.004	-0.053	-0.001
4	-0.5	0.013	0.013	0.000	-0.000	-0.001	-0.000
4	-0.7	-1.079	-1.079	0.000	-0.005	0.056	-0.003
4	-0.9	-3.433	-3.432	0.001	-0.058	0.124	-1.225
9	0.9	14.829	14.839	0.010	0.388	-0.142	-2.633
9	0.7	7.606	7.611	0.005	0.155	-0.107	-0.090
9	0.5	5.082	5.084	0.002	0.075	-0.094	-0.016
9	0.3	3.535	3.535	0.000	0.033	-0.079	-0.007
9	0.1	2.357	2.357	0.000	0.011	-0.060	-0.003
9	-0.1	1.329	1.329	0.000	0.003	-0.036	-0.000
9	-0.3	0.324	0.324	0.000	0.000	-0.009	0.000
9	-0.5	-0.798	-0.798	0.000	-0.000	0.021	-0.000
9	-0.7	-2.341	-2.341	0.000	-0.008	0.051	-0.017
9	-0.9	-6.028	-6.028	0.000	-0.052	0.096	-1.660
16	0.9	16.962	16.965	0.003	0.200	-0.115	-2.583
16	0.7	8.598	8.599	0.001	0.075	-0.080	-0.074
16	0.5	5.641	5.641	0.000	0.033	-0.066	-0.007
16	0.3	3.804	3.804	0.000	0.014	-0.051	-0.001
16	0.1	2.385	2.385	0.000	0.004	-0.035	-0.000
16	-0.1	1.125	1.125	0.000	0.000	-0.017	-0.000
16	-0.3	-0.136	-0.136	0.000	0.000	0.002	0.000
16	-0.5	-1.582	-1.582	0.000	-0.001	0.022	-0.001
16	-0.7	-3.640	-3.640	0.000	-0.009	0.044	-0.027
16	-0.9	-8.748	-8.747	0.001	-0.045	0.078	-1.867
36	0.9	22.186	22.186	0.000	0.096	-0.075	-2.534
36	0.7	11.062	11.063	0.001	0.034	-0.050	-0.068
36	0.5	7.075	7.075	0.000	0.013	-0.039	-0.005
36	0.3	4.562	4.562	0.000	0.005	-0.029	-0.000
36	0.1	2.589	2.589	0.000	0.001	-0.017	-0.000
36	-0.1	0.805	0.805	0.000	-0.000	-0.006	-0.000
36	-0.3	-1.019	-1.019	0.000	0.000	0.007	0.000
36	-0.5	-3.165	-3.165	0.000	-0.001	0.020	-0.001
36	-0.7	-6.305	-6.305	0.000	-0.008	0.033	-0.038
36	-0.9	-14.353	-14.353	0.000	-0.037	0.056	-2.058

表 4.1. (続)

$\alpha = 0.01$

ν	η	真 值	(2.8) 数 值	(2.8) 誤 差	(2.1) 誤 差	(2.2) 誤 差	(2.3) 誤 差
4	0.9	22.240	23.974	1.734	18.278	11.212	-6.077
4	0.7	11.683	12.398	0.715	8.432	5.036	-0.993
4	0.5	8.095	8.446	0.351	4.852	2.781	-0.522
4	0.3	5.967	6.123	0.156	2.727	1.456	-0.314
4	0.1	4.412	4.464	0.052	1.348	0.620	-0.182
4	-0.1	3.128	3.135	0.007	0.523	0.147	-0.089
4	-0.3	1.968	1.966	-0.002	0.129	-0.044	-0.029
4	-0.5	0.828	0.828	-0.000	0.008	-0.048	-0.002
4	-0.7	-0.445	-0.445	0.000	-0.001	0.025	-0.000
4	-0.9	-2.711	-2.706	0.005	-0.083	0.060	-1.038
9	0.9	18.849	19.047	0.198	1.961	1.087	-4.337
9	0.7	9.837	9.904	0.067	0.826	0.396	-0.229
9	0.5	6.728	6.754	0.026	0.430	0.155	-0.066
9	0.3	4.848	4.856	0.008	0.216	0.032	-0.033
9	0.1	3.439	3.440	0.001	0.093	-0.027	-0.017
9	-0.1	2.235	2.235	0.000	0.029	-0.043	-0.005
9	-0.3	1.093	1.093	0.000	0.003	-0.029	-0.001
9	-0.5	-0.126	-0.126	0.000	0.000	0.004	0.000
9	-0.7	-1.695	-1.695	0.000	-0.008	0.035	-0.007
9	-0.9	-5.150	-5.145	0.005	-0.089	0.034	-1.799
16	0.9	19.993	20.056	0.063	0.807	0.384	-4.054
16	0.7	10.313	10.331	0.018	0.318	0.108	-0.147
16	0.5	6.934	6.939	0.005	0.152	0.018	-0.022
16	0.3	4.862	4.863	0.001	0.069	-0.021	-0.008
16	0.1	3.284	3.285	0.001	0.026	-0.032	-0.003
16	-0.1	1.910	1.910	-0.000	0.005	-0.027	-0.001
16	-0.3	0.568	0.568	0.000	-0.000	-0.009	-0.001
16	-0.5	-0.923	-0.923	-0.000	-0.001	0.013	-0.000
16	-0.7	-2.956	-2.956	0.000	-0.012	0.030	-0.019
16	-0.9	-7.758	-7.754	0.004	-0.087	0.020	-2.212
36	0.9	24.549	24.566	0.017	0.326	0.124	-3.844
36	0.7	12.429	12.432	0.003	0.118	0.018	-0.117
36	0.5	8.131	8.132	0.001	0.051	-0.012	-0.010
36	0.3	5.452	5.452	0.000	0.020	-0.022	-0.001
36	0.1	3.374	3.374	-0.000	0.005	-0.020	-0.001
36	-0.1	1.520	1.520	0.000	0.001	-0.010	0.000
36	-0.3	-0.343	-0.343	0.000	0.000	0.003	0.000
36	-0.5	-2.490	-2.490	-0.000	-0.002	0.014	-0.001
36	-0.7	-5.560	-5.560	0.000	-0.015	0.021	-0.039
36	-0.9	-13.222	-13.219	0.003	-0.076	0.008	-2.619

表 4.1. (続)

$$D = 2.0, \quad \alpha = 0.05$$

$n_1 \backslash n_2$	5	6	7	8	9	10	11
5	6.3058	6.3271	6.3368	6.3399	6.3392	6.3364	6.3323
6	6.3271	6.4063	6.4612	6.5003	6.5289	6.5502	6.5663
7	6.3368	6.4612	6.5530	6.6228	6.6771	6.7201	6.7548
8	6.3399	6.5003	6.6228	6.7187	6.7955	6.8580	6.9096
9	6.3392	6.5289	6.6771	6.7955	6.8920	6.9719	7.0389
10	6.3364	6.5502	6.7201	6.8580	6.9719	7.0674	7.1484
11	6.3323	6.5663	6.7548	6.9096	7.0389	7.1484	7.2421
12	6.3275	6.5786	6.7831	6.9528	7.0958	7.2178	7.3231
13	6.3223	6.5880	6.8065	6.9893	7.1446	7.2779	7.3937
14	6.3170	6.5953	6.8260	7.0205	7.1867	7.3304	7.4558
15	6.3116	6.6010	6.8425	7.0473	7.2234	7.3765	7.5107
16	6.3064	6.6053	6.8564	7.0706	7.2556	7.4172	7.5595
17	6.3012	6.6087	6.8683	7.0909	7.2841	7.4535	7.6032
18	6.2962	6.6113	6.8785	7.1087	7.3093	7.4859	7.6425
19	6.2914	6.6132	6.8874	7.1245	7.3319	7.5150	7.6780
20	6.2867	6.6146	6.8951	7.1385	7.3521	7.5413	7.7102
21	6.2823	6.6156	6.9018	7.1510	7.3703	7.5651	7.7395
22	6.2780	6.6163	6.9077	7.1621	7.3867	7.5868	7.7663
23	6.2739	6.6167	6.9129	7.1722	7.4017	7.6066	7.7908
24	6.2700	6.6169	6.9174	7.1812	7.4153	7.6247	7.8134
25	6.2662	6.6169	6.9215	7.1894	7.4277	7.6413	7.8342
26	6.2626	6.6168	6.9250	7.1969	7.4391	7.6566	7.8534
27	6.2592	6.6166	6.9282	7.2037	7.4495	7.6708	7.8712
28	6.2559	6.6162	6.9311	7.2099	7.4591	7.6838	7.8878
29	6.2528	6.6158	6.9336	7.2155	7.4680	7.6960	7.9032
30	6.2497	6.6153	6.9359	7.2207	7.4762	7.7073	7.9175

$n_1 \backslash n_2$	12	13	14	15	16	17	18
5	6.3275	6.3223	6.3170	6.3116	6.3064	6.3012	6.2962
6	6.5786	6.5880	6.5953	6.6010	6.6053	6.6087	6.6113
7	6.7831	6.8065	6.8260	6.8425	6.8564	6.8683	6.8785
8	6.9528	6.9893	7.0205	7.0473	7.0706	7.0909	7.1087
9	7.0958	7.1446	7.1867	7.2234	7.2556	7.2841	7.3093
10	7.2178	7.2779	7.3304	7.3765	7.4172	7.4535	7.4859
11	7.3231	7.3937	7.4558	7.5107	7.5595	7.6032	7.6425
12	7.4147	7.4951	7.5661	7.6293	7.6858	7.7366	7.7824
13	7.4951	7.5845	7.6639	7.7348	7.7985	7.8561	7.9082
14	7.5661	7.6639	7.7511	7.8293	7.8999	7.9638	8.0219
15	7.6293	7.7348	7.8293	7.9144	7.9914	8.0613	8.1251
16	7.6858	7.7985	7.8999	7.9914	8.0744	8.1501	8.2193
17	7.7366	7.8561	7.9638	8.0613	8.1501	8.2312	8.3055
18	7.7824	7.9082	8.0219	8.1251	8.2193	8.3055	8.3847
19	7.8240	7.9557	8.0750	8.1836	8.2828	8.3739	8.4578
20	7.8619	7.9991	8.1236	8.2372	8.3413	8.4370	8.5253
21	7.8965	8.0388	8.1683	8.2867	8.3954	8.4954	8.5879
22	7.9283	8.0754	8.2095	8.3324	8.4454	8.5497	8.6462
23	7.9575	8.1091	8.2476	8.3748	8.4919	8.6001	8.7004
24	7.9844	8.1403	8.2830	8.4141	8.5351	8.6471	8.7511
25	8.0093	8.1692	8.3158	8.4508	8.5755	8.6911	8.7985
26	8.0324	8.1961	8.3464	8.4850	8.6132	8.7322	8.8429
27	8.0539	8.2211	8.3750	8.5170	8.6486	8.7708	8.8847
28	8.0739	8.2445	8.4017	8.5470	8.6817	8.8071	8.9240
29	8.0925	8.2664	8.4267	8.5751	8.7129	8.8412	8.9611
30	8.1100	8.2869	8.4502	8.6016	8.7423	8.8734	8.9961

表 4.2. 近似式 (2.8) による t_α の値 ($\nu = n_1 + n_2 - 2, \delta = \sqrt{n_1 n_2 / (n_1 + n_2) D}$)

$$D = 2.0, \quad \alpha = 0.05$$

$n_1 \backslash n_2$	19	20	21	22	23	24
5	6.2914	6.2867	6.2823	6.2780	6.2739	6.2700
6	6.6132	6.6146	6.6156	6.6163	6.6167	6.6169
7	6.8874	6.8951	6.9018	6.9077	6.9129	6.9174
8	7.1245	7.1385	7.1510	7.1621	7.1722	7.1812
9	7.3319	7.3521	7.3703	7.3867	7.4017	7.4153
10	7.5150	7.5413	7.5651	7.5868	7.6066	7.6247
11	7.6780	7.7102	7.7395	7.7663	7.7908	7.8134
12	7.8240	7.8619	7.8965	7.9283	7.9575	7.9844
13	7.9557	7.9991	8.0388	8.0754	8.1091	8.1403
14	8.0750	8.1236	8.1683	8.2095	8.2476	8.2830
15	8.1836	8.2372	8.2867	8.3324	8.3748	8.4141
16	8.2828	8.3413	8.3954	8.4454	8.4919	8.5351
17	8.3739	8.4370	8.4954	8.5497	8.6001	8.6471
18	8.4578	8.5253	8.5879	8.6462	8.7004	8.7511
19	8.5352	8.6070	8.6737	8.7357	8.7936	8.8478
20	8.6070	8.6828	8.7533	8.8191	8.8805	8.9381
21	8.6737	8.7533	8.8275	8.8969	8.9617	9.0226
22	8.7357	8.8191	8.8969	8.9696	9.0377	9.1017
23	8.7936	8.8805	8.9617	9.0377	9.1091	9.1761
24	8.8478	8.9381	9.0226	9.1017	9.1761	9.2461
25	8.8986	8.9921	9.0797	9.1619	9.2392	9.3120
26	8.9463	9.0429	9.1335	9.2187	9.2988	9.3743
27	8.9911	9.0908	9.1843	9.2722	9.3550	9.4332
28	9.0334	9.1359	9.2322	9.3228	9.4083	9.4890
29	9.0733	9.1785	9.2775	9.3707	9.4587	9.5419
30	9.1110	9.2189	9.3204	9.4161	9.5066	9.5921

$n_1 \backslash n_2$	25	26	27	28	29	30
5	6.2662	6.2626	6.2592	6.2559	6.2528	6.2497
6	6.6169	6.6168	6.6166	6.6162	6.6158	6.6153
7	6.9215	6.9250	6.9282	6.9311	6.9336	6.9359
8	7.1894	7.1969	7.2037	7.2099	7.2155	7.2207
9	7.4277	7.4391	7.4495	7.4591	7.4680	7.4762
10	7.6413	7.6566	7.6708	7.6838	7.6960	7.7073
11	7.8342	7.8534	7.8712	7.8878	7.9032	7.9175
12	8.0093	8.0324	8.0539	8.0739	8.0925	8.1100
13	8.1692	8.1961	8.2211	8.2445	8.2664	8.2869
14	8.3158	8.3464	8.3750	8.4017	8.4267	8.4502
15	8.4508	8.4850	8.5170	8.5470	8.5751	8.6016
16	8.5755	8.6132	8.6486	8.6817	8.7129	8.7423
17	8.6911	8.7322	8.7708	8.8071	8.8412	8.8734
18	8.7985	8.8429	8.8847	8.9240	8.9611	8.9961
19	8.8986	8.9463	8.9911	9.0334	9.0733	9.1110
20	8.9921	9.0429	9.0908	9.1359	9.1785	9.2189
21	9.0797	9.1335	9.1843	9.2322	9.2775	9.3204
22	9.1619	9.2187	9.2722	9.3228	9.3707	9.4161
23	9.2392	9.2988	9.3550	9.4083	9.4587	9.5066
24	9.3120	9.3743	9.4332	9.4890	9.5419	9.5921
25	9.3807	9.4456	9.5071	9.5654	9.6206	9.6732
26	9.4456	9.5131	9.5771	9.6377	9.6953	9.7501
27	9.5071	9.5771	9.6434	9.7064	9.7662	9.8232
28	9.5654	9.6377	9.7064	9.7716	9.8336	9.8927
29	9.6206	9.6953	9.7662	9.8336	9.8978	9.9590
30	9.6732	9.7501	9.8232	9.8927	9.9590	10.0222

表 4.2. (続)

$$D = 1.0, \quad \alpha = 0.05$$

$n_2 \backslash n_1$	5	6	7	8	9	10	11
5	3.9625	3.9656	3.9655	3.9640	3.9616	3.9590	3.9562
6	3.9656	3.9978	4.0205	4.0369	4.0491	4.0585	4.0657
7	3.9655	4.0205	4.0615	4.0930	4.1179	4.1380	4.1545
8	3.9640	4.0369	4.0930	4.1375	4.1734	4.2030	4.2278
9	3.9616	4.0491	4.1179	4.1734	4.2191	4.2571	4.2894
10	3.9590	4.0585	4.1380	4.2030	4.2571	4.3028	4.3419
11	3.9562	4.0657	4.1545	4.2278	4.2894	4.3419	4.3870
12	3.9534	4.0715	4.1681	4.2487	4.3170	4.3756	4.4264
13	3.9507	4.0761	4.1796	4.2667	4.3409	4.4050	4.4609
14	3.9482	4.0799	4.1894	4.2822	4.3617	4.4308	4.4914
15	3.9457	4.0829	4.1978	4.2957	4.3801	4.4537	4.5185
16	3.9434	4.0855	4.2051	4.3075	4.3963	4.4741	4.5428
17	3.9412	4.0876	4.2115	4.3180	4.4108	4.4924	4.5647
18	3.9313	4.0893	4.2171	4.3274	4.4238	4.5088	4.5845
19	3.9372	4.0908	4.2220	4.3357	4.4355	4.5237	4.6025
20	3.9354	4.0921	4.2264	4.3433	4.4460	4.5373	4.6189
21	3.9336	4.0932	4.2304	4.3501	4.4557	4.5496	4.6340
22	3.9320	4.0941	4.2339	4.3562	4.4644	4.5610	4.6478
23	3.9304	4.0949	4.2371	4.3619	4.4725	4.5714	4.6605
24	3.9290	4.0956	4.2400	4.3670	4.4799	4.5810	4.6723
25	3.9276	4.0961	4.2426	4.3717	4.4867	4.5899	4.6832
26	3.9263	4.0967	4.2450	4.3761	4.4930	4.5981	4.6934
27	3.9251	4.0971	4.2472	4.3801	4.4988	4.6058	4.7029
28	3.9239	4.0975	4.2493	4.3838	4.5042	4.6129	4.7117
29	3.9228	4.0978	4.2511	4.3872	4.5093	4.6196	4.7200
30	3.9217	4.0981	4.2528	4.3904	4.5140	4.6258	4.7277

$n_2 \backslash n_1$	12	13	14	15	16	17	18
5	3.9534	3.9507	3.9482	3.9457	3.9434	3.9412	3.9313
6	4.0715	4.0761	4.0799	4.0829	4.0855	4.0876	4.0893
7	4.1681	4.1796	4.1894	4.1978	4.2051	4.2115	4.2171
8	4.2487	4.2667	4.2822	4.2957	4.3075	4.3180	4.3274
9	4.3170	4.3409	4.3617	4.3801	4.3963	4.4108	4.4238
10	4.3756	4.4050	4.4308	4.4537	4.4741	4.4924	4.5088
11	4.4264	4.4609	4.4914	4.5185	4.5428	4.5647	4.5845
12	4.4708	4.5100	4.5449	4.5760	4.6040	4.6293	4.6523
13	4.5100	4.5536	4.5925	4.6274	4.6589	4.6874	4.7135
14	4.5449	4.5925	4.6351	4.6736	4.7083	4.7400	4.7689
15	4.5760	4.6274	4.6736	4.7115	4.7532	4.7877	4.8193
16	4.6040	4.6589	4.7083	4.7532	4.7940	4.8313	4.8655
17	4.6293	4.6874	4.7400	4.7877	4.8313	4.8712	4.9079
18	4.6523	4.7135	4.7689	4.8193	4.8655	4.9079	4.9470
19	4.6733	4.7372	4.7954	4.8484	4.8970	4.9418	4.9831
20	4.6925	4.7591	4.8197	4.8752	4.9262	4.9731	5.0165
21	4.7101	4.7792	4.8422	4.9000	4.9532	5.0022	5.0477
22	4.7263	4.7978	4.8631	4.9230	4.9782	5.0293	5.0767
23	4.7413	4.8150	4.8824	4.9444	5.0016	5.0546	5.1038
24	4.7552	4.8309	4.9004	4.9643	5.0234	5.0782	5.1292
25	4.7682	4.8458	4.9172	4.9829	5.0438	5.1004	5.1530
26	4.7802	4.8597	4.9328	5.0004	5.0630	5.1212	5.1754
27	4.7914	4.8727	4.9475	5.0167	5.0810	5.1407	5.1965
28	4.8020	4.8849	4.9613	5.0321	5.0979	5.1591	5.2164
29	4.8118	4.8963	4.9743	5.0466	5.1138	5.1765	5.2352
30	4.8211	4.9071	4.9865	5.0603	5.1289	5.1930	5.2530

表 4.2. (続)

$D = 1.0$, $\alpha = 0.05$

$n_1 \backslash n_2$	19	20	21	22	23	24
5	3.9372	3.9354	3.9336	3.9320	3.9304	3.9290
6	4.0908	4.0921	4.0932	4.0941	4.0949	4.0956
7	4.2220	4.2264	4.2304	4.2339	4.2371	4.2400
8	4.3357	4.3433	4.3501	4.3562	4.3619	4.3670
9	4.4355	4.4460	4.4557	4.4644	4.4725	4.4799
10	4.5237	4.5373	4.5496	4.5610	4.5714	4.5810
11	4.6025	4.6189	4.6340	4.6478	4.6605	4.6723
12	4.6733	4.6925	4.7101	4.7263	4.7413	4.7552
13	4.7372	4.7591	4.7792	4.7978	4.8150	4.8309
14	4.7954	4.8197	4.8422	4.8631	4.8824	4.9004
15	4.8484	4.8752	4.9000	4.9230	4.9444	4.9643
16	4.8970	4.9262	4.9532	4.9782	5.0016	5.0234
17	4.9418	4.9731	5.0022	5.0293	5.0546	5.0782
18	4.9831	5.0165	5.0477	5.0767	5.1038	5.1292
19	5.0213	5.0568	5.0899	5.1208	5.1496	5.1767
20	5.0568	5.0943	5.1292	5.1619	5.1924	5.2211
21	5.0899	5.1292	5.1659	5.2003	5.2325	5.2628
22	5.1208	5.1619	5.2003	5.2363	5.2701	5.3019
23	5.1496	5.1924	5.2325	5.2701	5.3054	5.3387
24	5.1767	5.2211	5.2628	5.3019	5.3387	5.3734
25	5.2022	5.2482	5.2913	5.3319	5.3701	5.4061
26	5.2261	5.2736	5.3182	5.3602	5.3997	5.4371
27	5.2487	5.2976	5.3436	5.3869	5.4278	5.4665
28	5.2700	5.3203	5.3677	5.4123	5.4544	5.4943
29	5.2902	5.3418	5.3905	5.4363	5.4797	5.5208
30	5.3093	5.3622	5.4121	5.4592	5.5037	5.5459

$n_1 \backslash n_2$	25	26	27	28	29	30
5	3.9276	3.9263	3.9251	3.9239	3.9228	3.9217
6	4.0961	4.0967	4.0971	4.0975	4.0978	4.0981
7	4.2426	4.2450	4.2472	4.2493	4.2511	4.2528
8	4.3717	4.3761	4.3801	4.3838	4.3872	4.3904
9	4.4867	4.4930	4.4988	4.5042	4.5093	4.5140
10	4.5899	4.5981	4.6058	4.6129	4.6196	4.6258
11	4.6832	4.6934	4.7029	4.7117	4.7200	4.7277
12	4.7682	4.7802	4.7914	4.8020	4.8118	4.8211
13	4.8458	4.8597	4.8727	4.8849	4.8963	4.9071
14	4.9172	4.9328	4.9475	4.9613	4.9743	4.9865
15	4.9829	5.0004	5.0167	5.0321	5.0466	5.0603
16	5.0438	5.0630	5.0810	5.0979	5.1138	5.1289
17	5.1004	5.1212	5.1407	5.1591	5.1765	5.1930
18	5.1530	5.1754	5.1965	5.2164	5.2352	5.2530
19	5.2022	5.2261	5.2487	5.2700	5.2902	5.3093
20	5.2482	5.2736	5.2976	5.3203	5.3418	5.3622
21	5.2913	5.3182	5.3436	5.3677	5.3905	5.4121
22	5.3319	5.3602	5.3869	5.4123	5.4363	5.4592
23	5.3701	5.3997	5.4278	5.4544	5.4797	5.5037
24	5.4061	5.4371	5.4665	5.4943	5.5208	5.5459
25	5.4402	5.4725	5.5030	5.5321	5.5597	5.5859
26	5.4725	5.5059	5.5377	5.5679	5.5966	5.6240
27	5.5030	5.5377	5.5706	5.6020	5.6318	5.6602
28	5.5321	5.5679	5.6020	5.6343	5.6652	5.6946
29	5.5597	5.5966	5.6318	5.6652	5.6971	5.7275
30	5.5859	5.6240	5.6602	5.6946	5.7275	5.7589

表 4.2. (続)

$$D = 0.5, \quad \alpha = 0.05.$$

$n_1 \backslash n_2$	5	6	7	8	9	10	11
5	2.8748	2.8650	2.8565	2.8492	2.8428	2.8373	2.8324
6	2.8650	2.8718	2.8760	2.8786	2.8803	2.8813	2.8819
7	2.8565	2.8760	2.8903	2.9012	2.9097	2.9165	2.9220
8	2.8492	2.8786	2.9012	2.9190	2.9334	2.9453	2.9552
9	2.8428	2.8803	2.9097	2.9334	2.9530	2.9693	2.9832
10	2.8373	2.8813	2.9165	2.9453	2.9693	2.9896	3.0070
11	2.8324	2.8819	2.9220	2.9552	2.9832	3.0070	3.0276
12	2.8281	2.8823	2.9266	2.9636	2.9950	3.0220	3.0455
13	2.8243	2.8824	2.9304	2.9708	3.0054	3.0352	3.0613
14	2.8209	2.8825	2.9337	2.9771	3.0144	3.0468	3.0753
15	2.8179	2.8824	2.9365	2.9825	3.0223	3.0571	3.0877
16	2.8151	2.8823	2.9389	2.9873	3.0294	3.0663	3.0989
17	2.8127	2.8821	2.9410	2.9916	3.0357	3.0746	3.1090
18	2.8104	2.8820	2.9428	2.9954	3.0414	3.0820	3.1182
19	2.8083	2.8817	2.9444	2.9988	3.0465	3.0888	3.1266
20	2.8064	2.8815	2.9459	3.0019	3.0512	3.0950	3.1342
21	2.8047	2.8813	2.9472	3.0047	3.0554	3.1006	3.1412
22	2.8031	2.8811	2.9484	3.0072	3.0593	3.1058	3.1477
23	2.8016	2.8808	2.9494	3.0095	3.0629	3.1106	3.1537
24	2.8002	2.8806	2.9504	3.0117	3.0662	3.1151	3.1592
25	2.7989	2.8804	2.9512	3.0136	3.0692	3.1192	3.1644
26	2.7977	2.8802	2.9520	3.0154	3.0720	3.1230	3.1691
27	2.7966	2.8800	2.9527	3.0171	3.0746	3.1265	3.1736
28	2.7955	2.8797	2.9534	3.0187	3.0771	3.1299	3.1778
29	2.7945	2.8795	2.9540	3.0201	3.0794	3.1330	3.1818
30	2.7936	2.8793	2.9546	3.0214	3.0815	3.1359	3.1854

$n_1 \backslash n_2$	12	13	14	15	16	17	18
5	2.8281	2.8243	2.8209	2.8179	2.8151	2.8127	2.8104
6	2.8823	2.8824	2.8825	2.8824	2.8823	2.8821	2.8820
7	2.9266	2.9304	2.9337	2.9365	2.9389	2.9410	2.9428
8	2.9636	2.9708	2.9771	2.9825	2.9873	2.9916	2.9954
9	2.9950	3.0054	3.0144	3.0223	3.0294	3.0357	3.0414
10	3.0220	3.0352	3.0468	3.0571	3.0663	3.0746	3.0820
11	3.0455	3.0613	3.0753	3.0877	3.0989	3.1090	3.1182
12	3.0661	3.0842	3.1004	3.1150	3.1280	3.1399	3.1507
13	3.0842	3.1047	3.1229	3.1393	3.1542	3.1677	3.1800
14	3.1004	3.1229	3.1431	3.1613	3.1778	3.1928	3.2066
15	3.1150	3.1393	3.1613	3.1811	3.1992	3.2157	3.2309
16	3.1280	3.1542	3.1778	3.1992	3.2188	3.2367	3.2531
17	3.1399	3.1677	3.1928	3.2157	3.2367	3.2559	3.2735
18	3.1507	3.1800	3.2066	3.2309	3.2531	3.2735	3.2924
19	3.1605	3.1913	3.2193	3.2448	3.2683	3.2899	3.3099
20	3.1696	3.2017	3.2309	3.2577	3.2823	3.3051	3.3261
21	3.1779	3.2112	3.2417	3.2696	3.2954	3.3191	3.3412
22	3.1856	3.2201	3.2517	3.2807	3.3075	3.3323	3.3553
23	3.1927	3.2283	3.2610	3.2911	3.3188	3.3446	3.3685
24	3.1993	3.2360	3.2697	3.3007	3.3294	3.3561	3.3809
25	3.2055	3.2432	3.2778	3.3097	3.3393	3.3668	3.3925
26	3.2113	3.2498	3.2854	3.3182	3.3487	3.3770	3.4034
27	3.2166	3.2561	3.2925	3.3262	3.3574	3.3865	3.4137
28	3.2217	3.2620	3.2992	3.3336	3.3657	3.3956	3.4235
29	3.2264	3.2675	3.3055	3.3407	3.3735	3.4041	3.4327
30	3.2309	3.2727	3.3115	3.3474	3.3809	3.4122	3.4415

表 4.2. (続)

$D = 0.5, \quad \alpha = 0.05$

$n_2 \backslash n_1$	19	20	21	22	23	24
5	2.8083	2.8064	2.8047	2.8031	2.8016	2.8002
6	2.8817	2.8815	2.8813	2.8811	2.8808	2.8806
7	2.9444	2.9459	2.9472	2.9484	2.9494	2.9504
8	2.9988	3.0019	3.0047	3.0072	3.0095	3.0117
9	3.0465	3.0512	3.0554	3.0593	3.0629	3.0662
10	3.0888	3.0950	3.1006	3.1058	3.1106	3.1151
11	3.1266	3.1342	3.1412	3.1477	3.1537	3.1592
12	3.1605	3.1696	3.1779	3.1856	3.1927	3.1993
13	3.1913	3.2017	3.2112	3.2201	3.2283	3.2360
14	3.2193	3.2309	3.2417	3.2517	3.2610	3.2697
15	3.2448	3.2577	3.2696	3.2807	3.2911	3.3007
16	3.2683	3.2823	3.2954	3.3075	3.3188	3.3294
17	3.2899	3.3051	3.3191	3.3323	3.3446	3.3561
18	3.3099	3.3261	3.3412	3.3553	3.3685	3.3809
19	3.3284	3.3456	3.3617	3.3767	3.3908	3.4040
20	3.3456	3.3638	3.3808	3.3967	3.4117	3.4257
21	3.3617	3.3808	3.3987	3.4155	3.4312	3.4460
22	3.3767	3.3967	3.4155	3.4331	3.4496	3.4651
23	3.3908	3.4117	3.4312	3.4496	3.4669	3.4831
24	3.4040	3.4257	3.4460	3.4651	3.4831	3.5001
25	3.4164	3.4389	3.4600	3.4798	3.4985	3.5162
26	3.4282	3.4514	3.4732	3.4937	3.5131	3.5314
27	3.4392	3.4631	3.4856	3.5068	3.5269	3.5458
28	3.4497	3.4743	3.4974	3.5193	3.5399	3.5595
29	3.4596	3.4848	3.5086	3.5311	3.5524	3.5725
30	3.4690	3.4949	3.5193	3.5424	3.5642	3.5849

$n_2 \backslash n_1$	25	26	27	28	29	30
5	2.7989	2.7977	2.7966	2.7955	2.7945	2.7936
6	2.8804	2.8802	2.8800	2.8797	2.8795	2.8793
7	2.9512	2.9520	2.9527	2.9534	2.9540	2.9546
8	3.0136	3.0154	3.0171	3.0187	3.0201	3.0214
9	3.0692	3.0720	3.0746	3.0771	3.0794	3.0815
10	3.1192	3.1230	3.1265	3.1299	3.1330	3.1359
11	3.1644	3.1691	3.1736	3.1778	3.1818	3.1854
12	3.2055	3.2113	3.2166	3.2217	3.2264	3.2309
13	3.2432	3.2498	3.2561	3.2620	3.2675	3.2727
14	3.2778	3.2854	3.2925	3.2992	3.3055	3.3115
15	3.3097	3.3182	3.3262	3.3336	3.3407	3.3474
16	3.3393	3.3487	3.3574	3.3657	3.3735	3.3809
17	3.3668	3.3770	3.3865	3.3956	3.4041	3.4122
18	3.3925	3.4034	3.4137	3.4235	3.4327	3.4415
19	3.4164	3.4282	3.4392	3.4497	3.4596	3.4690
20	3.4389	3.4514	3.4631	3.4743	3.4848	3.4949
21	3.4600	3.4732	3.4856	3.4974	3.5086	3.5193
22	3.4798	3.4937	3.5068	3.5193	3.5311	3.5424
23	3.4985	3.5131	3.5269	3.5399	3.5524	3.5642
24	3.5162	3.5314	3.5458	3.5595	3.5725	3.5849
25	3.5329	3.5487	3.5638	3.5780	3.5916	3.6046
26	3.5487	3.5652	3.5808	3.5956	3.6098	3.6233
27	3.5638	3.5808	3.5970	3.6124	3.6271	3.6411
28	3.5780	3.5956	3.6124	3.6283	3.6435	3.6580
29	3.5916	3.6098	3.6271	3.6435	3.6592	3.6742
30	3.6046	3.6233	3.6411	3.6580	3.6742	3.6897

表 4.2. (続)