

k -数域と建築物の構造特性について

中里博 Hiroshi Nakazato

弘前大学理工学部 Faculty of Science and Technology
Hirosaki University

津村浩三氏との共同研究による [NT] に基づき、 k 数域を建築物の構造特性の解析に応用する。

1. 複数の鉄筋コンクリート柱による建築物の水平方向の強度

建築物の近くで地震が起こったり突風が吹いたりすると、大きな水平方向の抗力（負荷）が建築物（建物）に掛かる。その大きさや方向は状況によって異なる。建築物が、さまざまに異なるこのような力に対して安全か否かを判定する方法を知りたい。最近よく行われる標準的な方法は、有限要素法などを用いたコンピュータシミュレーションである。しかし、さまざまに異なる数値的な個々の条件の下で、建築物が耐えられるか否かをこの方法で知ることではできても、安全性が条件の変化にどう依存するかについての全体像を知ることとはできない。

ここで考えたい具体的課題は、壁面、梁（はり）、床、屋根などで繋がれた複数個の鉄筋コンクリート柱の、1個1個の強度と強度の方向性が与えられている（既知）のとき、それらが全体としてどういう強度と方向性を発揮するか（未知）を知ることである。

鉛直方向の負荷に対する強度をも問題にすることは可能であり、それを問題にすると、対応する数域は、3次元数域となる。ここでは、問題の易しさと、鉛直方向の負荷が通常かなり小さいことから、水平方向の負荷とそれに対する強度のみを問題にすることにする。

問題を考える上で次のようなことを前提とする。(1) 床や屋根などを剛体として扱い、抗力により平行に運動すると仮定する。床などが折れるような形で浮き上がったたり、逆にへこんだりはしないと仮定する。(2-i) 鉄筋コンクリート柱に関して建築学の分野で経験的によく知られた性質: 1つの鉄筋コンクリート柱に対して安全性を保って受容可能な力の大きさと方向を表す安全領域が、平面上の楕円板によって与えられる。すなわち、適当に座標軸を回転すれば、 $x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1$ ($a > 0, b > 0$) で与えられる。(2-ii) よく使われている建築物は、直方体状あるいはそれを組み合わせた形をしていて、それに合わせて鉄筋コンクリート柱の配置されるので、問題の対象となる各柱の安全領域を表す楕円板の

長径方向は、他の楕円板の長径方向または短径方向と一致する。(3)最後に、個々の鉄筋コンクリート柱に加わる力が大きくなるにつれ、柱は「塑性理論」 plastic theory に従い挙動すると仮定する。すなわち、抗力が、安全領域の限界となっている楕円の弧を越えたとともに、柱が完全に壊れてしまうのではなく、境界線上で強度を維持すると仮定する。言わば、鉄筋コンクリート柱は、その安全領域の境界に負荷が達したとき、「粘り」、「土俵際の力」を発揮する。簡単のため、1階建ての建築物を考える。個々の柱の「粘り」と、これら柱が床等で繋がっていることに基づき、個々の柱の安全領域 Z_j が

$$\frac{x^2}{a_j^2} + \frac{y^2}{b_j^2} \leq 1$$

($a_j > 0, b_j > 0, j = 1, 2, \dots, k$) で与えられ、柱の個数が k であるとき、建物全体に加わる水平方向の力が、

$$\vec{F} = (x_0, y_0)$$

で与えられるとき、この力を適当に各鉄筋コンクリート柱に分配し、

$$(x_0, y_0) = \sum_{j=1}^k (x_j, y_j), \quad \frac{x_j^2}{a_j^2} + \frac{y_j^2}{b_j^2} \leq 1$$

となるような分解を探し出すような「協業作用」の効果が、各柱が「粘っている」間に発揮される。このような分解が可能ならば、建築物は、安全、負荷に対しこのような分解ができないならば、建築物は、安全でない unsafe と判定される。

以上に基づき、水平方向の抗力に対する建築物の強度の問題を、平面上の凸図形の問題に帰着できる。複素数平面 $C \cong R^2$ の部分集合 $K_1, K_2, \dots, K_k$ に対して、そのミンコフスキ和 Minkowski sum $K_1 + K_2 + \dots + K_k$ を、

$$K_1 + K_2 + \dots + K_k = \left\{ \sum_{j=1}^k z_j : z_j \in K_j (j = 1, 2, \dots, k) \right\}$$

で定める。特に、 $K_1, K_2, \dots, K_k$ が有界閉凸集合ならば、 $K_1 + K_2 + \dots + K_k$ も有界閉凸集合となる。 k 本のコンクリート柱をもつ建物の水平抗力に対する安全領域 Z は、個々の鉄筋コンクリート柱の安全領域 $Z_1, Z_2, \dots, Z_k$ を用いて

$$Z = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_k$$

と表されるというのが、建築物の構造特性と平面図形についての数学の問題を結びつける基本原理である。上記のような前提のうちで、(2-2) は、数学的な取り扱いをする上では決定的な要素ではない。実はこの仮定をはずしても、問題がそう難しくならないかわりに、この仮定をしても k の値が大きいときは、問題はあまり易しくならない。

2.k数域と楕円の Minkowski 和

$n \times n$ 複素行列 A および、 $1 \leq k \leq n$ に対して A の k -数域 $W_k(A)$ k -numerical range of A を次のように定める。

$$W_k(A) = \{\xi_1^* A \xi_1 + \xi_2^* A \xi_2 + \dots + \xi_k^* A \xi_k : \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k\} \text{ is an orthonormal system in } \mathbb{C}^n\}.$$

特に、 $W_k(A) = W(A)$ を、 A の数域 numerical range of A と言う。2つの有界閉凸集合 $K, L \subset \mathbb{C}$ および、 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ に対して

$$\max\{\Re(z \exp(-i\theta)) : z \in K + L\} = \max\{\Re(z \exp(-i\theta)) : z \in K\} + \max\{\Re(z \exp(-i\theta)) : z \in L\}$$

が成り立つ。

命題 2.1 A は、 $n \times n$ 複素行列、 B は、 $m \times m$ 複素行列とすると、 $nm \times nm$ 行列 $A \otimes I_m + I_n \otimes B$ の数域は、 $W(A), W(B)$ のミンコフスキ和となる：

$$W(A \otimes I_m + I_n \otimes B) = W(A) + W(B).$$

[証明] 行列 T の数域 $W(T)$ が次のように記述されることを用いる。各 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ に対して

$$M(\theta) = \max \sigma(\Re(\exp(-i\theta) T))$$

と置く。ただし、 $\Re(T) = (T + T^*)/2$ であって、エルミット行列 H に対して、 $\max \sigma(H)$ は、その固有値の最大値とする。このとき、

$$W(T) = \bigcap_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \{z \in \mathbb{C} : \Re(z \exp(-i\theta)) \leq M(\theta)\}$$

となる。ここで、 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ に対して、

$$\begin{aligned} & \Re(\exp(-i\theta) [A \otimes I_m + I_n \otimes B]) \\ &= \Re(\exp(-i\theta) A) \otimes I_m + I_n \otimes \Re(\exp(-i\theta) B) \end{aligned}$$

が成り立ち、このエルミット行列のスペクトルに対して、

$$\sigma(\Re(\exp(-i\theta) [A \otimes I_m + I_n \otimes B])) = \sigma(\Re(\exp(-i\theta) A)) + \sigma(\Re(\exp(-i\theta) B))$$

が成り立ち、従って、 $0 \leq \theta \leq \pi$ に対して、

$$\max\{\Re(z \exp(-i\theta)) : z \in W(A \otimes I_m + I_n \otimes B)\}$$

$$\begin{aligned}
&= \max \sigma(\Re(\exp(-i\theta)A)) + \max \sigma(\Re(\exp(-i\theta)B)) \\
&= \max\{\Re(z \exp(-i\theta)) : z \in W(A)\} + \max\{\Re(z \exp(-i\theta)) : z \in W(B)\} \\
&= \max\{\Re(z \exp(-i\theta)) : z \in W(A) + W(B)\}
\end{aligned}$$

となるので、閉凸集合に対する分離定理より命題 2.1 の結論が導かれる。

2×2 実行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

($a > b \geq 0$) に対して、

$$W(A) = \{(1/2)r(a+b)\cos\theta + i(1/2)r(a-b)\sin\theta : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

が成り立つ。一般に、トレースが、0 の 2×2 複素行列 A の数域 $W(A)$ は 0 を中心とする閉楕円板となる。ただし、0 を中心とする閉線分に退化することもある。この性質を用いると、 k 本のコンクリート柱をもつ建物の水平抗力に対する安全領域 Z を、 $2^k \times 2^k$ 行列の数域として表示できる。また、このことより、generic な場合を考えると、有界閉凸である Z の境界 ∂Z を代数曲線としてみると、その双対曲線の次数が、 2^k となることが分かる。

$x-y$ 平面において (非同次) 多項式 $f(x, y)$ を用いて $C : f(x, y) = 0$ によって定義される代数曲線 C に対してその接線を方程式 $ax + by + 1 = 0$ の形で表すとき、係数から構成される点 (a, b) によって生成される曲線が、 C の双対曲線 $C^\wedge$ である。また、 K を C の有界閉凸集合であって、0 が、 K の内点とする。このとき、

$$K^\wedge = \{(a, b) \in \mathbf{R}^2 : ax + by + 1 \geq 0 \text{ for every } (x, y) \in K\}$$

と定義する。このとき、 $K^\wedge$ も、 C の有界閉凸集合となり、0 は、 $K^\wedge$ の内点となる。 $(K^\wedge)^\wedge = K$ が成立するという意味で双対性が成り立つ。

3. 安全領域の境界の方程式を求めるアルゴリズム

安全領域 Z に関する問題では、 ∂Z の双対曲線の方程式は比較的容易に求めることができるが、 ∂Z 自体の方程式を求めることはなかなか困難である。 ∂Z の双対曲線の方程式を求めるアルゴリズムは、代数的な数の和の方程式を求めるアルゴリズムと類似している。 $\alpha \in \mathbf{C}$, $\alpha \notin \mathbf{Q}$ を代数的数とし、

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

($n \geq 2$) は $\mathbf{Q}[x]$ で既約な有理係数多項式で、 $f(\alpha) = 0$ とする。 $f(x)$ は、重根を持たない。 $f(x)$ の根を $\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_n$ とする。また、 $\beta \in \mathbf{C}$, $\beta \notin \mathbf{Q}$ も代数的数とし、

$$g(x) = x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \dots + b_{m-1} x + b_m$$

($m \geq 2$) は既約な有理係数多項式で、 $g(\beta) = 0$ とする。 $g(x)$ の根を $\beta = \beta_1, \dots, \beta_m$ とする。このとき、 $\ell(\alpha_j + \beta_k) = 0$ ($j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m$) となるような nm 次有理係数多項式 $\ell(x)$ を構成する方法をここで述べる。多項式 $f(x)$ のコンパニオン行列を A とする：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix}.$$

ここで、次のような Vandermonde 型行列 $V(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ を考える：

$$V(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \alpha_3^{n-1} & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

このとき、対角行列 $\text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ に対して

$$AV(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = V(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

が成り立つ。また、 $g(x)$ のコンパニオン行列を B とする。このとき、

$$\begin{aligned} & (A \otimes I_m + I_n \otimes B)((1, \alpha_j, \dots, \alpha_j^{n-1})^t \otimes (1, \beta_k, \dots, \beta_k^{m-1})^t) \\ &= (\alpha_j + \beta_k)((1, \alpha_j, \dots, \alpha_j^{n-1})^t \otimes (1, \beta_k, \dots, \beta_k^{m-1})^t) \end{aligned}$$

($j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m$) が成り立つ。ここで、

$$\det V(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (\alpha_i - \alpha_j) \neq 0, \quad \det V(\beta_1, \dots, \beta_m) \neq 0$$

より $A \otimes I_m + I_n \otimes B$ の固有多項式を $\ell(x)$ と置けば、 $\ell(x)$ は、有理係数多項式であって

$$\ell(x) = \det(x I_{nm} - (A \otimes I_m + I_n \otimes B)) = \prod_{j=1}^n \prod_{k=1}^m \{x - (\alpha_j + \beta_k)\}$$

を満たす。generic な場合は $\ell(x)$ も既約となる。多項式 f や g が具体的に与えられた場合 Mathematica 等の数式処理ソフトを用いて多項式 ℓ を求めるには、まず f や g の係数の共通分母を払って f や g を整数係数に直す（このとき、 f や g は、一般には monic でなくな

る)。 $f = f(\alpha)$, $g = g(\beta)$ に対して、 $h = -\gamma + \alpha + \beta$ と置き、 $f(\beta)$ と h の不定元 β に関する終結式 resultant, Sylvester's determinant を、 k とする。 Mathematica では、

$$k = \text{Resultant}[g, k, \beta]$$

とすればよい。さらに、 $k = k(\alpha, \gamma)$ と f の不定元 α に関する終結式を $\ell(\gamma)$ とすれば、 $\ell(\alpha_j + \beta_k) = 0$ が成り立つ。

次に 行列 A, B の数域 $W(A)$, $W(B)$ のミンコフスキー和 $K = W(A) + W(B)$ の双対 $K^\wedge$ の境界の方程式を求めるアルゴリズムを述べる。そのためにまず、 Kippenhahn による次の結果 (1951 年) が有用である。

補題 3.1 (Kippenhahn) $n \times n$ 複素行列 A に対して、 2 変数実多項式 $f(x, y)$ を、

$$f(x, y) = \det(I_n + x/2(A + A^*) - y i/2(A - A^*))$$

で定める。 代数曲線 $C: f(x, y) = 0$ の双対曲線 $C^\wedge$ の方程式を $\phi(X, Y) \in \mathbb{R}[X, Y]$ とする。 このとき、 数域 $W(A)$ は、 次の有界閉集合の凸包と一致する：

$$\{a + i b : (a, b) \in \mathbb{R}^2, \phi(a, b) = 0\}.$$

この結果の意味で、 $W(A)$ の境界の双対曲線の方程式が、

$$f(x, y) = \det(I_n + x/2(A + A^*) - y i/2(A - A^*)) = 0$$

であって、 $W(B)$ の境界の双対曲線の方程式は、

$$g(x, y) = \det(I_m + x/2(B + B^*) - y i/2(B - B^*)) = 0$$

で与えられる。 テンソル積を用いれば、 $W(A) + W(B)$ の境界の双対曲線の方程式は、

$$\begin{aligned} \ell(x, y) = \det(I_{nm} + x/2([A \otimes I_m + I_n \times B] + [[A \otimes I_m + I_n \times B]^* \\ - y i/2([A \otimes I_m + I_n \times B] - [A \otimes I_m + I_n \times B]^*))) = 0 \end{aligned}$$

で与えられる。ここでは、代数的な数の和の方程式を求める方法にならって、多項式 $f(x, y)$, $g(x, y)$ から、多項式 $\ell(x, y)$ を求めるアルゴリズムを述べる。 Mathematica を用いて計算することを考えてみよう。 $f(x, y)$, $g(x, y)$ を同次化したものを $F(t, x, y)$, $G(s, x, y)$ とする、すなわち

$$\begin{aligned} F(t, x, y) &= \det(t I_n + x/2(A + A^*) - y i/2(A - A^*)) = 0, \\ G(s, x, y) &= \det(s I_m + x/2(B + B^*) - y i/2(B - B^*)) = 0 \end{aligned}$$

とする。ここで、 $H = -u + t + s$ と置き、 G と H の不定元 s に関する終結式を K とし、 $K = K(u, t)$ と $F = F(t)$ の t に関する終結式を L とする。 $L = L(u, x, y)$ に対し、 $\ell(x, y) = L(1, x, y)$ により L を非同次化したものを ℓ とすれば、 $\ell(x, y) = 0$ が求める $K^\wedge$ の境界の方程式となる。だが、これは K の境界の方程式ではない。 K の境界そのものの方程式を求めることを次に考える。

4. 代数曲線の双対曲線の方程式を計算するアルゴリズム

実数係数の2変数多項式 $f(x, y)$ により、 $C: f(x, y) = 0$ として定義される代数曲線の双対曲線 $C^\wedge$ の定義多項式 $\phi(X, Y)$ を計算するアルゴリズムを述べる。このような計算をおこなう上で、係数のなかに、 π や e のような超越数が登場してもよいが、係数を数式处理的に扱う場合、 $\pi + e$ が無理数になるかどうかなどの問題が登場するので、2個以上の $\mathbb{Q}$ 上で1次従属であることがあらかじめわかっていない超越数を扱うことは困難である。簡単にするには、登場する係数はすべて代数的な数とするのがよいが、この場合も無理数が登場する場合、Gröbner 基底を使って複数の代数的な数をうまく処理することが必要であろう。ここでは、最も簡単な場合、すなわち $f(x, y)$ の係数は、すべて有理数、従って共通の分母を払うことにより、 $f(x, y)$ の係数が、整数である場合を扱うことにする。 $f(x, y)$ の次数は $n \geq 2$ とする。ここで、少なくとも曲線 C が特異点を持たない場合は、 $C^\wedge$ の定義方程式である整数係数多項式 $\phi(X, Y)$ を Mathematica などの数式処理ソフトで、容量の限界内である限り求めることのできるアルゴリズムを与える。

曲線 C の接線の候補として、直線 $Xx + Yy + 1 = 0$ を考える。これが、曲線 $f(x, y) = 0$ と接するための条件を考える。曲線 C が特異点を持つ場合であっても、 $f(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ が既約である限り C の特異点は有限個であるので、直線がこのような特異点を通過する場合は例外的である。直線は、generic な場合、 $Y \neq 0$ であり、方程式を y について解いて

$$y = -\frac{1}{Y} - \frac{xX}{Y}$$

と表示できる。これを $f(x, y)$ の Y に代入する。分母を払うため、 Y^n を掛けて、

$$F(x, X, Y) = Y^n f\left(x, -\frac{1}{Y} - \frac{xX}{Y}\right)$$

と置く。こうすると、 $F(x, X, Y)$ は、 x, X, Y に関する整数係数多項式になる。ここで、 $f(x, y)$ が、 y に関して $k < n$ 次である場合には、 Y^n を掛ける代りに Y^k を掛ける。こうしたとき、曲線 C と直線 $Xx + Yy + 1 = 0$ が共有点で接するならば、共有点が特異点でないときは、 $F(x, X, Y)$ が、 x に関して重根を持つ。逆に、 $F(x, X, Y)$ が、 x に関して重根を持てば、直線 $Xx + Yy + 1 = 0$ が、 C の特異点を通過するか、共有点である非特異点で、曲線と直線が接することになる。そこで、 $F(x, X, Y)$ と、

$$F_1(x, X, Y) = \frac{\partial}{\partial x} F(x, X, Y)$$

の x に関する終結式を、 $\Phi(X, Y)$ とするとき、これがおおまかに言えば $C^\wedge$ の定義多項式となる。しかし、この多項式 $\Phi(X, Y)$ は、上のような過程に対応して、 $f(x, y)$ が、 y に関して n 次である場合、 $Y^{n(n-1)}$ が $\Phi(X, Y)$ の因子となる。また、

$$F(x, X, Y) = c_n(X, Y)x^n + \dots + c_1(X, Y)x + c_0(X, Y)$$

とするとき、 $c_n(X, Y)$ も $\Phi(X, Y)$ の因子となる。

$$f(x, y) = \sum_{p+q \leq n} a_{p,q} x^p y^q$$

とするとき、

$$c_n(X, Y) = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_{k, n-k} X^k Y^{n-k}$$

となる。曲線 C に特異点がない場合、 $C^\wedge$ の方程式は、 $n(n-1)$ 次式であって、それは次のような $\tilde{\phi}(X, Y)$ によって与えられる。

$$\tilde{\phi}(X, Y) = \frac{\Phi(X, Y)}{Y^{n(n-1)} c_n(X, Y)}$$

曲線 C が特異点を持つ場合でも、上記の $\tilde{\phi}(X, Y)$ は、 X, Y の $n(n-1)$ 次式であり、 $C^\wedge$ の定義多項式 $\phi(X, Y)$ は、その因子となる。ここで、多項式

$$\psi(X, Y) = \frac{\tilde{\phi}(X, Y)}{\phi(X, Y)}$$

は、曲線 C の持つ特異点に対応する。例えば、点 (a, b) が、曲線 C の「通常2重点」であって、点 (a, b) で、曲線 C が2つの異なる接線 $X_1x + Y_1y + 1 = 0$ と $X_2x + Y_2y + 1 = 0$ を持つとする。ただし、

$$aX_1 + bY_1 + 1 = aX_2 + bY_2 + 1 = 0$$

とする。このとき、曲線 $C^\wedge$ の2点 (X_1, Y_1) と (X_2, Y_2) という2つの接点で $C^\wedge$ は共通の接線 $aX + bY + 1 = 0$ を持つ。これに対応して、 $(aX + bY + 1)^2$ が、 $\tilde{\phi}(X, Y)$ 、 $\psi(X, Y)$ の因子となる。しかし、座標 a, b は代数的な数とはなるが、一般には有理数ではない。環 $C[X, Y]$ においては、多項式 $\tilde{\phi}(X, Y)$ は可約だが、環 $Q[X, Y]$ においては既約ということが特異点をもつ曲線 C に対しては、generic な場合である。これに対応して、Mathematica の整数係数の範囲での因数分解の命令 Factor を用いては、この場合、 $\phi(X, Y)$ を取り出すことは出来ない。また、点 (a, b) が、曲線 C の単純尖点であって、

$$f(x, y) = [X_0(x-a) + Y_0(y-b)]^2 + \sum_{p+q \geq 3} b_{p,q}(X-a)^p(Y-b)^q$$

とする。ただし、 $-aX_0 - bY_0 = 1$ とする。このとき、点 (X_0, Y_0) は、曲線 $C^\wedge$ の変曲点であって、そこでの $C^\wedge$ の接線が $aX + bY + 1 = 0$ で与えられる。これに対応して、 $(aX + bY + 1)^3$ が、 $\tilde{\phi}(X, Y)$, $\psi(X, Y)$ の因子となる。代数曲線の特異点はきわめて多様であるが、 C の特異点が多くなるほど、 $C^\wedge$ の定義多項式の次数は小さくなる。

代数曲線 C の定義多項式が整数係数多項式のとき、 $C^\wedge$ の定義多項式 $\phi(X, Y)$ そのものは、Mathematica の 4 則演算と Factor のコマンドだけでは求めることができないことがあるが、それを因子として含む $\tilde{\phi}(X, Y)$ を求めることができる。 $\phi(X, Y)$ を求める計算を実行する上でのもうひとつの制約は、上記のように或る多項式

$$F(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad (4.1)$$

と

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1,$$

の x に関する終結式を求める計算 n が大きくなると、大変おおきな容量を要することである。ここで、登場する判別式は $F(x)$ が重根を持つための必要十分条件を与えるものでとりわけ重要である。ここで、

$$G(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

とする。係数 a_j と b_k は複素数で $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$ とする。このとき、2つの方程式 $F(x) = 0$ と $G(x) = 0$ が共通解を複素数平面において持つための必要十分条件は J. Sylvester によって与えられた次の $(n+m) \times (n+m)$ 行列 $R(F, G; x)$ の行列式が 0 となることである。

$$R(F, G; x) = \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & \dots & b_1 & b_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-1} & \dots & b_1 & b_0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_m & b_{m-1} & \dots & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & b_m & b_{m-1} & \dots & b_1 & b_0 \end{pmatrix},$$

ここで、第 1 行から第 m 行は、 F の係数 a_j で構成され、第 $m+1$ 行から第 $m+n$ 行までは G の係数 b_k で構成される。Sylvester のこれに関係する論文としては、1840 年の "A method

of determining by mere inspection the derivatives from two equations of any degree" (Philos. Magazine, 16, pp.132-135) と、1841 年の "Examples of the dialytic method of elimination as applied to ternary system of equations" (Cambridge Math. J. ii, 232-236) がある。これに先行する、2つの1変数多項式の「終結式」あるいは、消去法についての研究としては、E. Bézout と L. Euler (1748 年) によるものがある。Bézout の 1764 年の論文 "Recherches sur les degrés des équations résultantes de l'évanouissement des inconnues et sur les moyens qu'il convient d'employer pour trouver ces équations" (Mémoires Acad. Royale Sci. Paris, pages 288-338) が知られている。和算の中でも消去理論は研究されている。日本およびヨーロッパでのこれらの理論の発展については、竹之内氏の [T] および、後藤、小松両氏による [GK] および一般化された終結式が扱われている [BLM] を参照されたい。

上の $R(F, G; x)$ の定義より、特に $G(x) = F'(x)$ のときは、 F と F' の終結式は a_n を因子にもつことがわかる。 F と F' の終結式を $F(x)$ の最高次係数 a_n で割ったものを $F(x)$ の判別式 discriminant という。これを $\text{Dis}(F)$ と表すことにする。2次多項式 $F(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ の判別式 $-a_1^2 + 4a_2a_0$ は、高等学校の数学でも登場する。2次方程式一般の判別式を利用して、3次方程式一般の判別式が分かる、さらには $n-1$ 次方程式一般がわかると n に方程式一般の判別式がわかるといった仕組みがあれば、大層役立つことが想像できるが、このようなことを可能にする漸化公式を、Cayley が発見している。その詳細については [M, pp. 19-22] を参照されたい。2次方程式の判別式は a_0, a_1, a_2 に関する 2次同次多項式で、項数は 2 である。3次多項式 $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ は、 $a_0, \dots, a_3$ に関する 4次同次多項式となる。

n の値がかなり大きい場合に双対曲線 $C^\vee$ の定義多項式 $\phi(X, Y)$ を求める方法を述べる。先に n 次多項式 (4.1) の判別式をコンピュータで計算しておいて、その x^j の係数 a_j に、 $F(x, X, Y) = Y^n f(x, -1/Y - xX/Y) = c_n(X, Y)x^n + \dots + c_0(X, Y)$ の係数 $c_j(X, Y)$ を代入し、さらにそれを因数分解して $\tilde{\phi}(X, Y)$ が得られる。

一般に n 次多項式 $f(x) = a_nx^n + \dots + a_0$ の判別式は $a_0, \dots, a_n$ に関する $2(n-1)$ 次多項式となる。後で、述べる Mathematica でのプログラムを筆者は同僚の丹原大介氏より提供よりもらって、ここ 10 年程、利用させてもらっている ([Tam])。 n 次多項式一般の判別式 $\text{Dis}(a_nx^n + \dots + a_0)$ を定数倍したのも本質はかわらないので、それも判別式と呼ぶことにする。たいへん有用なので、ここで丹原氏のプログラムを紹介する。

さて、 $F(t)$ を (4.1) のような形ではなく、順序と係数の表示を少し変えた次のような多項式を考える。

$$F = F_n(x) = a_0x^n + {}_nC_1a_1x^{n-1} + {}_nC_2a_2x^{n-2} + \dots + {}_nC_ka_kx^k + \dots + {}_nC_1a_{n-1}x + a_n \quad (4.2).$$

ただし、ここで、 ${}_nC_j = [n!]/([j!][(n-j)!])$ は 2 項係数である。このような多項式 F の判別式 $\text{Dn}(F)$ は、 $n+1$ 個の"変数" : $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ に関する $2n-2$ 次の同次多項式である。さて、これを n に関して、帰納的に計算することが問題なのである

プログラムでは、次のような作用素や置き換えのルールを用いる。1 次の微分作用素 d_n を n 変数 $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ に関する多項式 $f = f(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ に作用させる：

$$d_n(f) = a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} f + 2a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} f + 3a_2 \frac{\partial}{\partial a_3} f + \dots + k a_{k-1} \frac{\partial}{\partial a_k} f + \dots + n a_{n-1} \frac{\partial}{\partial a_n} f$$

次に $d_n(f)$ に $1/a_{n-1}$ を掛けた式を展開したものを、 $e_n(f)$ とする。

$0 \leq j \leq n-1$ に対し、それまで、 $a[j]$ となっていたものを、 $(n/(n-j))a[j]$ で置きかえるルール $q[n]$ また、このルールに従って、 f を変形してできる多項式を $H[n][f]$ とする。

漸化式の出発点となるのは、2 次多項式 $F(t) = a_0 t^2 + 2a_1 t + a_2$ の判別式が、 $D_2 = 4a_1^2 - 4a_0 a_2$ であることである。

具体的なプログラムを以下紹介する。

$$a[0] = a_0; a[1] = a_1; a[2] = a_2; a[3] = a_3; a[4] = a_4; a[5] = a_5; a[6] = a_6; a[7] = a_7;$$

$$d[n-][f-] := \text{Sum}[ia[i-1]D[f, a[i]], \{i, 1, n\}]$$

$$e[n-][f-] := \text{Expand}[d[n][f]/a[n-1]]$$

$$q[n-] := \text{Table}[a[i] \rightarrow n/(n-i)a[i], \{i, 0, n-1\}]$$

$$H[n-][f-] := f/.q[n];$$

$$K[n-][f-] := \text{Expand}[n^2 a[n-1]^2 H[n][f]];$$

$$\text{cay}[n-][f-] := \text{Expand}[\text{Sum}[1/(r!) * (-a[n]/n)^r \text{Nest}[e[n], K[n][f], r], \{r, 0, n-1\}]];$$

$$D2 = 4a[1]^2 - 4a[0]a[2];$$

以上の準備のもとで、 $D_3, D_4, \dots$ を計算するために、

$$D3 = \text{cay}[3][D2]$$

と入力すれば、

$$81a_1^2a_2^2 - 108a_0a_2^3 - 108a_1^3a_3 + 162a_0a_1a_2a_3 - 27a_0^2a_3^2$$

と出力され、さらに、

$$D4 = \text{cay}[4][D3]$$

と入力すれば、

$$9216a_1^2a_2^2a_3^2 - 13824a_0a_2^3a_3^2 - \dots$$

と出力される。

さて、 n 次式 (4.2) の判別式 D_n は、 $a_0, a_1, \dots, a_n$ を変数とする $2(n-1)$ 式となる。その項の数は、いったいどのくらいになるであろうか？ 弘前大学総合情報センターのワークステーションを使って、2001 年 11 月 7 日、8 日に計算したところでは、 D_n の項数を、 $d(n)$ と表すことにすれば、 $d(2) = 2$, $d(3) = 5$, $d(4) = 16$, $d(5) = 59$, $d(6) = 246$, $d(7) = 1103$, $d(8) = 5247$, $d(9) = 26059$, $d(10) = 133881$, $d(11) = 706799$ であって、割り当てられた容量のなかで、11 次式までの判別式を計算できた。12 次式の判別式の計算は、容量オーバーで計算できなかった。コンクリート柱 4 本をもつ建物の水平抗力に対する安全領域の境界の方程式を求めるには、 $2^4 = 16$ 次多項式の判別式が必要となる。上記のような $d(n)$ の n の増加に対する増加傾向を基に $d(16)$ をごく粗く推測すると 20 億から 40 億程度となる。 $D(16)$ は、 $a_0, \dots, a_{16}$ に関する 30 次同次多項式である。近い将来に次の予想について、 $k = 4$ の場合を実例につきコンピュータで検証できるようになることを期待したい。

予想：平面において原点 $O = (0, 0)$ を中心とする k 個の楕円板のミンコフスキー和の境界の方程式の次数は generic な場合は $k \times 2^k$ であろう？（例外的な場合はこれより小さくなるであろう）。

$k = 2$ の場合には、この予想が成り立つことを確かめている。2 個の楕円板のミンコフスキー和の境界は、8 次の代数曲線となる。 $k = 3$ の場合には、この予想を「普通」というか、generic な 1 例となっていそうな例についてこの予想の成立を確かめている。この場合、境界は 24 次の代数曲線となる。上の予想はこのことに基づいた単純な類推である。

5. Toeplitz, Hausdorff 型の凸性をもつ一般化された数域

2 節で定義した k -数域 $W_k(A)$ は、 $k = 1$ のとき、数域 $W(A)$ であり、その境界が凸曲線になることが Toeplitz によってまた $W(A)$ そのものが凸になることが Hausdorff によってそれぞれ 1918, 1919 年に証明された。 k -数域も凸になることが C. A. Berger の学位論文によって 1963 年に証明された。これを一般化する次の結果が 1975 年に証明された。

定理 (Westwick) A を $n \times n$ 複素行列し、 $c = (c_1, c_2, \dots, c_k)$ を実数列とする。このとき、

$$W_c(A) = \left\{ \sum_{j=1}^n c_j \xi_j^* A \xi_j : \{\xi_1, \dots, \xi_n\} \text{ は } \mathbb{C}^n \text{ の正規直交基底} \right\}$$

は、複素数平面における凸集合である。

この c -数域については、C. K. Li が次の結果を与えている (1994 年)

定理 (C. K. Li) A を $m \times m$ 行列、 B を、 $(n-m) \times (n-m)$ 行列とし、 $c = (c_1, \dots, c_n)$ を実数列とすると、

$$W_c(A \oplus B) = \text{Conv}(W_{(c_{\sigma(1)}, \dots, c_{\sigma(m)})}(A) + W_{(c_{\sigma(m+1)}, \dots, c_{\sigma(n)})}(B) : \sigma \in S_n)$$

が成り立つ。

特にこの定理の系として、次の系が成り立つ。

系 $m \geq 2, n-m \geq 2$ とし、 A を $m \times m$ 行列、 B を、 $(n-m) \times (n-m)$ 行列とすると、

$$W_2(A \oplus B) = \text{Conv}(W(A) + W(B), W_2(A), W_2(B))$$

が成り立つ。

この系のアナロジーになっている次の結果が成り立つ。

命題 5.1 (cf. [NT]) 次のような $2^k \times 2^k$ 行列

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ \beta_1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & \alpha_2 \\ \beta_2 & 0 \end{pmatrix} \oplus \dots \oplus \begin{pmatrix} 0 & \alpha_k \\ \beta_k & 0 \end{pmatrix}$$

に対し、

$$W_k(A_k) = W\left(\begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ \beta_1 & 0 \end{pmatrix}\right) + W\left(\begin{pmatrix} 0 & \alpha_2 \\ \beta_2 & 0 \end{pmatrix}\right) + \dots + W\left(\begin{pmatrix} 0 & \alpha_k \\ \beta_k & 0 \end{pmatrix}\right)$$

が成り立つ。

この結果より、建築物の構造特性の問題が k -数域とも結びつくことがわかる。

References

- [BLM] L. Busé, M. Elkadi, B. Morrain : Generalized resultant over unirational algebraic varieties, J. Symbolic Computations, 11 (2001), 計 12 頁、電子出版、pdf-file がインターネット上で入手可能。
- [GK] 後藤武史、小松彦三郎 : 17 世紀日本と 18-19 世紀西洋の行列式、終結式及び判別式、数理解析研究所講究録 1392 (2004 年) , pp.117-129.
- [M] 森川寿:『不変式論』、紀伊国屋書店、1977 年、 pp. 19-22
- [NT] H. Nakazato, K. Tsumura : k -numerical range and the structural performance of buildings, to appear in "Scienticae Mathematicae Japonicae".
- [T] 竹之内脩 : 田中由真の終結式について、和算研究所紀要 2 (1999), pp. 3-18.
- [Tam] 丹原大介 : Cayley の漸化式に基づき、Mathematica で判別式計算を行うプログラム, (1994 年、 private communication).