

スパイダリンケージの運動方程式の導出と数値解析

明石 望洋[†] 宮崎 修次[†]

[†] 京都大学大学院 情報学研究科 〒606-8501 京都府京都市左京区吉田本町

E-mail: [†]akashi@acs.i.kyoto-u.ac.jp, ^{††}syuji@acs.i.kyoto-u.ac.jp

あらまし 研究の進んでいるカオス理論として、双曲型力学系の理論がある。アノソフ系、すなわち相空間全体で一樣双曲的系となりうるような物理モデルとしてハント、マッカイらのトリプルリンケージを紹介する。彼らは系の運動方程式を用いることなく、配位空間のトポロジを調べることにより、アノソフ系であることを証明した。本研究ではトリプルリンケージを含むスパイダリンケージとよばれるクラスのリンク機構の自由運動の運動方程式を導出することで、相空間における様々な軌道を描くことを可能にした。得られた運動方程式をもとに数値シミュレーションを行い、周期軌道とカオスを確認した。また拘束系、保存系におけるリヤプノフ指数の数値計算方法を提案し、本モデルで実際に計算を行い、カオス性を定量的に評価した。

キーワード 力学系、保存系、アノソフ系、カオス、リヤプノフ指数

Derivation of equations of motion and numerical analysis of spider linkages

Nozomi AKASHI[†] and Syuji MIYAZAKI[†]

[†] Graduate school of Informatics, Kyoto university Yoshida-Honmachi, Sakyo-ku, Kyoto, 606-8501 Japan

E-mail: [†]akashi@acs.i.kyoto-u.ac.jp, ^{††}syuji@acs.i.kyoto-u.ac.jp

Abstract Hyperbolic system theorem is well understood chaos theory. The free motion (i.e. no friction and no potential) of the triple linkage of Hunt - MacKay was proved to be an Anosov system, a special case of Axiom A systems. In this paper, we derive the equation of free motion under constraints in a class of spider linkage, which includes the triple linkage, and we propose a method to calculate Lyapunov exponent of a constraint system or conservative system. We confirm the equations of motion is numerically analyzed to yield periodic and chaotic dynamics. In addition, we quantitatively estimate chaotic property of the system by calculating the Lyapunov exponent.

Key words dynamical system, conservative system, Anosov system, chaos, Lyapunov exponent

1. 序 論

カオスには未だ明確な定義は与えられておらず、李・ヨークの定義やドゥヴェーイニーの定義といったような複数の定義が提唱されている [1] [2]。それぞれの定義には一長一短があり、カオスを定義すること自体が未解決の問題である。これらの定義に共通するカオスの性質は初期値鋭敏性と軌道の多様性の二つがある。初期値鋭敏性とは、近傍の軌道が時間とともに十分大きく離れていくことを意味する。軌道の多様性は例えば、力学系の位相的エントロピーにより定められる。提唱されているいずれの定義においても数学的な構成の困難さと、カオスを生み出さうする非線形力学系の解析的な扱いづらさがあり、具体的な物理現象の数値モデルに対してカオスか否かを定義に従って判定することはほとんどの場合は現実的でない。

ある力学系に対して初期値鋭敏性を調べる際、リヤプノフ指数を計算するという方法がある。リヤプノフ指数を計算する方法の利点は、系の解が具体的に記述できないような場合でも、数値的に計算する明瞭なアルゴリズムが与えられている点だ [3]。ただし最大リヤプノフ指数が正であることは、初期値鋭敏性の十分条件ではあるが、カオスであることの十分条件とはならない。

一方でカオスの解析的によく研究された理論として双曲型力学系の理論がある [4]。系が一樣双曲的であれば、初期値鋭敏性や指数混合性といったカオスとして十分とみなせる性質を解析的に示すことができる。相空間全体で一樣双曲的な系はアノソフ系と呼ばれる。アノソフ系は構造安定性といった物理系のカオスとしては自然な性質を持つにもかかわらず、定義の数学の構成上の困難さから物理例を元にしたアノソフ系は長らく見つ

かっていなかった [6].

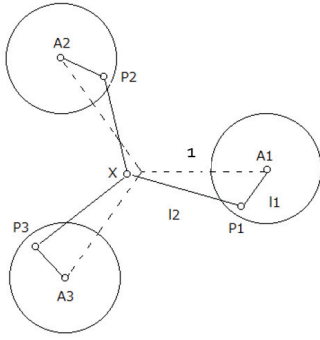


図 1 トリプルリンケージ ($n=3$ のスパイダリンケージ). A_i は固定された頂点. X, P_i は拘束のもとで平面を自由に動ける頂点.

この問題はハントとマッカイによって解決された. 彼らは図 1 に示すようなサーストンのトリプルリンケージの自由運動がある極限的なパラメータにおいてアノソフ系になることを示した [5] [6]. ハントらのアノソフ系の証明は次のようにして行われた. 自由運動を配位空間上の測地流とみなし, トリプルリンケージの棒の長さや質量のある極限的なパラメータにおいては, 配位空間のトポロジと測地流の計量が非常に単純な形となる. このとき, この計量のもとでの配位空間の断面曲率は有限個の点を除きいたところ負になる. 負曲率多様体上の測地流はアノソフ流になるという定理から [4], このパラメータにおいてトリプルリンケージの自由運動はアノソフ系であることを示した. さらにアノソフ系の構造安定性から, 近傍のパラメータや系においてもアノソフ系であることがわかる. 後に, スパイダリンケージと呼ばれるより広いクラスのリンケージにもこの議論が拡張でき, アノソフ系であることが示された [7]. この手法ではアノソフパラメータ領域においては, 非線形微分方程式を直接扱わずしてカオスやエルゴード性といった性質を示すことができる. しかし, このようなパラメータ領域がどこまで広がっているのかや, 大きく離れたパラメータでの系の性質については情報を得ることができない.

本研究ではスパイダリンケージの自由運動の微分方程式をたて, 一般のパラメータに対して数値シミュレーションを行った. また通常リヤプノフ指数を計算する際には, 相空間がユークリッド空間であることが想定されるが, 拘束系や保存系の場合は, 相空間がユークリッド空間に埋め込まれたなめらかな多様体となる. このような系に対するリヤプノフ指数の数値計算法を提案する. その手法を用いて, 実際にトリプルリンケージのリヤプノフ指数の数値計算を行った. なお, アノソフパラメータにおいては測地流の方程式として微分幾何の初等的な計算で運動方程式が求まる [8].

本紙は 2 章でリンク機構を紹介し, 3 章ではスパイダリンケージの運動方程式を導出する. 4 章では拘束系及び保存系のリヤプノフ指数の数値計算の方法を提案し, 5 章では 3 章で導出した運動方程式をもとに数値シミュレーションを行い, 4 章で提案した手法を用いリヤプノフ指数を計算した. 終わりに 6 章は

本研究のまとめにあてる.

2. リンク機構

リンク機構とは例えばロボットアームやペンチのような, 物体同士が剛体棒により連結され, 運動する機構のことである. 図 1 のような n 個の 2 重振り子を端点一点で連結したリンク機構を n th スパイダリンケージと呼ぶ [7], トリプルリンケージは 3th スパイダリンケージである. A_i は固定された頂点で, P_i, X は拘束のもとで平面上を自由に動ける頂点である. ここで A_i, P_i をつなぐ拘束の長さを l_1 , P_i, X をつなぐ拘束の長さを l_2 とする ($i = 1, \dots, n$). 以降では, A_i, P_i をつなぐ拘束を A_i 中心に回転する円板, P_i, X をつなぐ拘束を剛体棒とみなす. また A_i は同一円周上に等間隔に配置され, それぞれの円板と拘束はすべて同様の形状をとるとする.

無摩擦, 無ポテンシャルの運動を自由運動と呼び, スパイダリンケージの自由運動について考える. スパイダリンケージの運動は $\mathbb{R}^2$ 上の $n+1$ 質点の運動であり, ニュートンの運動方程式のもとでは, これらの質点の位置と速度がわかれば, 運動は完全に決定される. 例えばそれぞれの質点の $\mathbb{R}^2$ 上の位置と速度の $2 \times 2(n+1)$ 個の状態変数により, 相空間が記述できる. ただし, 今円板や剛体棒といった拘束が存在しているため, これらの変数はすべて独立にとることはできない. $2n$ 個の拘束により位置と速度が制限されるため, 状態変数は計 $2 \times 2n$ 個の拘束条件を満たしている必要がある. すなわち相空間は $2 \times 2(n+1)$ 次元のユークリッド空間上に埋め込まれた, $2 \times 2(n+1) - 2 \times 2n = 4$ 次元多様体になる. 自由運動においては運動エネルギーの保存量が 1 つ存在するので, 軌道はこの相空間上のさらに 1 次元低い 3 次元の等エネルギー多様体上にある. 従って, スパイダリンケージの自由運動は n によらず, 常に相空間の次元が 3 になる. 例えば $n=1$ の場合は無重力下での 2 重振り子となり, 角運動量も保存し 2 自由度の系となるため, 可積分系でありカオスは生じ得ないことがわかる.

パラメータを変化させることによる分岐を調べる上で, パラメータが系の相空間のトポロジにどのように影響を与えているのかを理解する必要がある. これまでの仮定のもとでのスパイダリンケージの自由運動のパラメータは, 頂点間の距離を定める剛体棒の長さや円板の半径の長さの次元を持つパラメータと, 円板と棒の質量や慣性モーメントといった質量の次元を持つパラメータの 2 種類がある.

長さパラメータについて, n 個の円板の半径 l_1 , n 個の剛体棒の長さを l_2 とする. A_i の固定される同一円の半径 R をパラメータとしてもよいが, $l_1 : l_2 : R$ が等しければスケールすることで同一視できるので, ここでは $R=1$ と 1 パラメータ縮約する. 系の配位空間を考える. 配位空間とは運動を記述する力学系の変位と速度の次元を持つ相空間の, 変位のみ次元を持つ部分空間のことである. 各円板と連結する剛体棒に対して, X の可動領域は外半径 $R = l_1 + l_2$, $r = |l_1 - l_2|$ として円環領域 $r \leq |X - A_i| \leq R$ に制限される. 従って図 2 のように $i = 1, \dots, n$ の交差領域が連結点 X の可動領域となる. 可動領域内の X に対して, $|X - P_i| = l_2$ を満たすような円周上

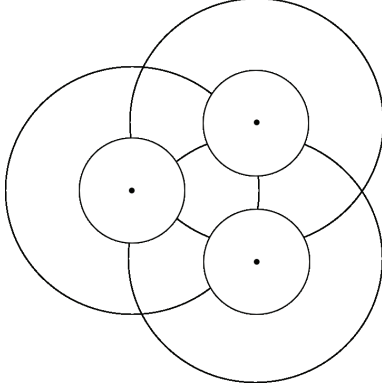


図 2 3つの円環領域に含まれる中央の領域がトリプルリンクの連結点 X の可動領域. P_i の選び方が $2^3 = 8$ 通り考えられるので, 配位空間は可動領域の曲面 8 枚の貼り合わせになる.

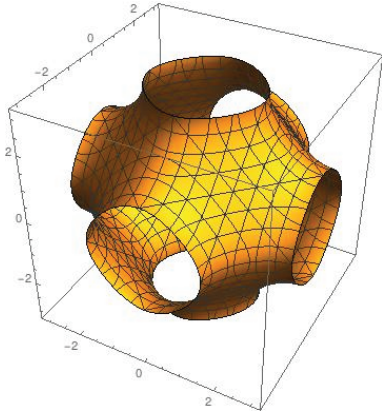


図 3 図 2 の X 可動領域 8 枚を貼り合わせて得られるトリプルリンクの配位空間と同相な多様体. 周期境界条件を持つ. ハントラの極限的なパラメータにおいては, シュワルツの P 曲面になる.

の点 P_i は一般に重複も込めて 2 通り存在する. よって, 可動領域内の X に対してスパイダリンクの配位は 2^n 通り存在する. 可動領域の境界においては対応する P_i が一意に定まるので, 境界において可動領域が貼り合わせられる. 従って, 配位空間は図 3 のような X の可動領域 2^n の貼り合わせの曲面と同相となる. 円環領域の内半径や外半径が変化することで, X の可動領域の境界と貼り合わせ方が変わり, 結果配位空間の種数が変化することがある.

次に質量パラメータについて, n 個の円板は等しい質量 M , 円板の中心を通り円板に垂直な回転軸まわりの慣性モーメント I , n 個の剛体棒も等しい質量 m , 重心のベクトル c , 重心を通りスパイダリンクを含む平面に垂直な回転軸まわりの慣性モーメント I_c を持つとする. この時スパイダリンクの運動エネルギーは

$$K(\dot{X}, \dot{P}_1, \dots, \dot{P}_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\mu_1 \dot{X}^2 + 2\mu_2 \dot{X} \dot{P}_i + \mu_3 \dot{P}_i^2 \right)$$

と表せ, 質量パラメータは 3 定数 μ_i に縮約できる. 質量の次元を持つパラメータ μ_i は円板の質量等を用いて具体的に次のように表される.

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{l_2^2} (I_c + m|p - c|^2) \\ \mu_2 &= -\frac{1}{l_2^2} (I_c + m(x - c)(p - c)) \\ \mu_3 &= \frac{I}{l_1^2} + \frac{I_c + m|x - c|^2}{l_2^2} \end{aligned} \quad (2)$$

ここで, $\mu_1, \mu_3 > 0$, $\mu_1 \mu_3 > \mu_2^2$ を満たす [6]. 質量パラメータの取り方によって, 任意の物理構成のスパイダリンクを考えることができる. 例えば, 円板と剛体棒が一樣な密度を持っていたなら, $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = (\frac{m}{3}, \frac{m}{6}, \frac{M}{2} + \frac{m}{3})$. 頂点がほとんどの質量を占めていれば $\mu_2 = 0$, また円板の質量が剛体棒の質量に対して十分大きければ $\mu_1 = \mu_2 = 0$ のように近似できる. 従って, $K(\dot{x}, \dot{p})$ は質量パラメータにより変化する.

外力がないとき正のエネルギーを持つ運動は, 運動エネルギーを計量とする配位空間上の測地流になることから, パラメータについて次のことがいえる. スパイダリンクの自由運動の流れを測地流とみなして, 長さのパラメータは測地流の動く配位空間のトポロジーを定め, 質量パラメータは測地流の計量を定める.

3. 運動方程式の導出

スパイダリンクの運動方程式を導出する. 各円板の中心 A_i を,

$$A_i = (A_{ix}, A_{iy}) \quad (i = 1, \dots, n)$$

とする, X, P_i をそれぞれ円板と剛体棒の偏角を表す, $2n$ 個の変数 θ_i, ϕ_i ($i = 1, \dots, n$) を用いて

$$P_i = (A_{ix} + l_1 \cos \theta_i, A_{iy} + l_1 \sin \theta_i)$$

$$X = (A_{ix} + l_1 \cos \theta_i + l_2 \cos \phi_i, A_{iy} + l_1 \sin \theta_i + l_2 \sin \phi_i) \quad (i = 1, \dots, n)$$

と表す. いま, X は n 通りの方法で表されており, 拘束条件はこの n 通りの x 座標, y 座標が等しいという次の $2(n-1)$ 個の式になる.

$$\begin{aligned} f_i(\theta_i, \phi_i, \theta_{i+1}, \phi_{i+1}) \\ &= A_{ix} + l_1 \cos \theta_i + l_2 \cos \phi_i \\ &\quad - (A_{i+1x} + l_1 \cos \theta_{i+1} + l_2 \cos \phi_{i+1}) \\ g_i(\theta_i, \phi_i, \theta_{i+1}, \phi_{i+1}) \\ &= A_{iy} + l_1 \sin \theta_i + l_2 \sin \phi_i \\ &\quad - (A_{i+1y} + l_1 \sin \theta_{i+1} + l_2 \sin \phi_{i+1}) \\ &\quad (i = 1, \dots, n-1) \end{aligned}$$

拘束条件に対応する未定乗数を λ_i, ω_i ($i = 1, \dots, n-1$) とし, 拘束条件のもとでのラグランジアンは

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= K(\dot{X}, \dot{P}_1, \dots, \dot{P}_n) - \sum_{i=1}^{n-1} \{\lambda_i f_i - \omega_i g_i\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \{(\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3) l_1^2 \dot{\theta}_i^2 \\ &\quad + 2(\mu_1 + \mu_2) l_1 l_2 \cos(\theta_i - \phi_i) \dot{\theta}_i \dot{\phi}_i + \mu_1 l_2^2 \dot{\phi}_i^2\} \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i f_i - \omega_i g_i) \end{aligned} \quad (3)$$

と表される. X が n 通りに表されるため, 運動エネルギーは異なる表式で表すこともできるが, いずれも拘束条件のもとで等しくなる.

以上から得られる, オイラー-ラグランジュ方程式と拘束条件の二階微分の式を併せて, 次の各変数の二階微分に関する線形方程式が得られる.

$$\begin{pmatrix} A & B \\ {}^t B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\Theta} \\ \Lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \quad (4)$$

ここで,

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ -B_2 & \ddots & \\ & \ddots & B_{n-1} \\ 0 & & -B_n \end{pmatrix}, \\ \Theta &= {}^t(\theta_1 \phi_1 \cdots \theta_n \phi_n), \quad \Lambda = {}^t(\lambda_1 \omega_1 \cdots \lambda_{n-1} \omega_{n-1}), \\ \mathbf{c} &= {}^t(c_1 \cdots c_n), \quad \mathbf{p} = {}^t(p_1 q_1 \cdots p_{n-1} q_{n-1}), \\ A_i &= \begin{pmatrix} (\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3)k & (\mu_1 + \mu_2) \cos \Delta\theta_i \\ (\mu_1 + \mu_2)k \cos \Delta\theta_i & \mu_1 \end{pmatrix}, \\ B_i &= \begin{pmatrix} -k \sin \theta_i & k \cos \theta_i \\ -\sin \phi_i & \cos \phi_i \end{pmatrix}, \\ c_i &= \begin{pmatrix} -(\mu_1 + \mu_2) \sin \Delta\theta_i \dot{\phi}_i^2 \\ (\mu_1 + \mu_2) \sin \Delta\theta_i \dot{\theta}_i^2 \end{pmatrix}, \\ p_i &= k \cos \theta_i \dot{\theta}_i^2 + \cos \phi_i \dot{\phi}_i^2 - k \cos \theta_{i+1} \dot{\theta}_{i+1}^2 - \cos \phi_{i+1} \dot{\phi}_{i+1}^2, \end{aligned}$$

$$q_i = k \sin \theta_i \dot{\theta}_i^2 + \sin \phi_i \dot{\phi}_i^2 - k \sin \theta_{i+1} \dot{\theta}_{i+1}^2 - \sin \phi_{i+1} \dot{\phi}_{i+1}^2$$

である. また, $\Delta\theta_i = \theta_i - \phi_i$, $k = \frac{l_1}{l_2}$, 0 は正方零行列である. 以上より, n th スパイダリンクエージの運動方程式が得られた. この各変数の二階微分と未定乗数に関する線形代数方程式を解くことで, θ_i, ϕ_i についての二階微分を陽に得られる. それを元に近似差分方程式をたて, 数値的に微分方程式を解くことができる.

4. リヤプノフ指数

カオスの特徴付ける初期値鋭敏性の指標にリヤプノフ指数がある. リヤプノフ指数は軌道に与えた無限小摂動の指数的拡大率(縮小率)を表しており, 系が初期値鋭敏性を持っていれば, 正のリヤプノフ指数を持つ. 十分なめらかな多様体 $M \subset \mathbb{R}^n$ と, 十分なめらかな $F: M \mapsto M$ として, 自励系

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t) \quad (x \in M) \quad (5)$$

にリヤプノフ指数の定義を与える. ある解 $x(t)$, $x(0) = x_0 \in M$ とそれに十分近初期値を持つ解 $x(t) + \delta x(t)$, $x(0) + \delta x(0) = x_0 + \delta x_0 \in M$ を考える. $z(t) = \delta x(t)$ と表すと, 変分方程式

$$\frac{dz}{dt} = \left(\frac{\partial F(x, t)}{\partial x} \right)_{x(t)} z(t) \quad (z \in M) \quad (6)$$

が得られる. z の大きさの指数的な拡大率(縮小率)の指数 λ は次の式で得られる.

$$\lambda(x) = \max_{z_0} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|z(t)|}{|z_0|} \quad (7)$$

$\lambda(x)$ を (最大) リヤプノフ指数と呼ぶ. $|\cdot|$ は M 上のノルムである. 解 $x(t)$ がカオスであるための必要条件は $\lambda(x) > 0$ である. 一般にリヤプノフ指数は解 $x(t)$ の相空間内の通過する領域に依存するが, 系がエルゴード的であれば解に独立になる.

変分方程式は線形だが, 係数は x_0 によるので, 一般に解析的な解 $z(t)$ が得られることはない. そのため, リヤプノフ指数は普通数値的に求めることになる. しかし, 変分方程式の指数的解は時間とともに, 数値的に扱えないほど大きくなってしまふ. このことは変分方程式の線形性を用いることにより, 克服することができる. $|z(0)| = |z_0|$ を十分小さいとして, 短い時間間隔 s に対して, $\alpha_1 = |z(s)|$ とする. そこから, 向きは変えずに長さを $|z_0|$ に縮小したベクトル $z_1 = \frac{|z_0|}{\alpha_1} z(s)$ を定義する. 再び時間 s だけ発展したのちの大きさを $\alpha_2 = |z_1(s)|$ とすると, 変分方程式の線形性より, $|z(2s)| = \alpha_1 \alpha_2$ が成り立つ. 時間間隔 s ごとに逐次

$$z_k = z_{k-1}(s)/\alpha_k; \quad \alpha_k = |z_k - 1(s)| \quad (8)$$

を定義すれば, $|z(ns)| = \alpha_1 \cdots \alpha_n$ より, 最大リヤプノフ指数

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{ns} \sum_{k=1}^n \ln \frac{\alpha_k}{|z_0|} \quad (9)$$

が得られる. 上式が最大リヤプノフ指数となっている理由は,

ほとんどの初期ベクトル z_0 は時間発展にしたがい最大の拡大方向を向くためである。

上記のリアプノフ指数の数値計算方法は通常相空間 M としてユークリッド空間を考える。一般の多様体を考えた場合、いくつか注意しなければいけない事項がある。いま、与えられた n 個の状態変数に対して拘束条件 $f_1(x) = 0, \dots, f_m = 0$ ($m < n$) が課せられた拘束系を考える。このとき相空間 M は $M = \{x \in \mathbb{R}^n | f_1(x) = 0, \dots, f_m = 0\} \subset \mathbb{R}^n$ と、 $\mathbb{R}^n$ に埋め込まれた $n-m$ 次元多様体となる。一般に多様体上で具体的なノルムを定義するのは困難であるが、 M の計量は埋め込まれたユークリッド空間から誘導されているので、リアプノフ指数を計算するためのノルムは $\mathbb{R}^n$ のユークリッドノルムを用いればよい。次に $x_0 \in M$ に対して、摂動ベクトル z_0 を与える際には、 $x_0 + z_0 \in M$ となるようにとる必要がある。このような z_0 の構成法は、適当に十分小さい大きさを持ったベクトル $a_0 \in \mathbb{R}^n$ をとり、次に拘束条件の勾配ベクトル ∇f_i ($i = 1, \dots, m$) を求め、 a_0 を m 個の勾配ベクトルと直交化したものを z_0 とする。 $|a_0|$ が十分小さければ、 $x_0 + z_0$ は M 上にあるとみなすことができる。同様に、摂動ベクトルの長さを縮小する際にも、 M から外れることが考えられるので直交化を行い、 M 上にのせる必要がある。より一般に相空間 M がリーマン多様体の場合であっても、埋め込み定理により、十分大きい次元を持ったユークリッド空間に具体的な構成法はわからないが、埋め込めることが保障されているので、同様の手法を適用できる。

また保存系の場合のリアプノフ指数の計算について考える。相空間は各保存量のもとで分離的になっている。すなわちエネルギーセット $M(K)$ を $M(K) = \{x \in M | k(x) = K\}$ とすると、 $M(K)$ は不変集合であり、

$$M = \bigcup_K M(K), \quad M(K_1) \cap M(K_2) = \emptyset$$

が成り立つ。軌道が異なるエネルギーセットに移ることはない。摂動ベクトルを加えた軌道もエネルギーセット上にあるようにとるのがふさわしい。ここでも、先の拘束系の場合と同様にエネルギー関数の勾配ベクトルと直交化するという方法により実装できる。またエネルギーセットごとにエルゴード的な保存系のリアプノフ指数は保存量によることになる。

5. 数値計算

3章で導出した運動方程式をもとに、トリプルリンケージ (3th スパイダリンケージ) の自由運動の数値シミュレーションを行った。

図4はハントたちの調べたアノソフパラメータでの実行結果である。配位空間の種数は3であり、エネルギーの計量のもとでほとんどいたるところ負曲率である。軌道はカオス的であり $\mathbb{R}^2$ 上の可動領域内を埋め尽くしているように見える。次に図5は軌道が準周期的になるパラメータでの実行結果である。図4のパラメータと異なり、 $l_2 < 1$ であり、配位空間の種数が0の多様体となっている。パラメータを変化させることによる最大リアプノフ指数 λ の変化を見ることで、軌道のカオス、準周

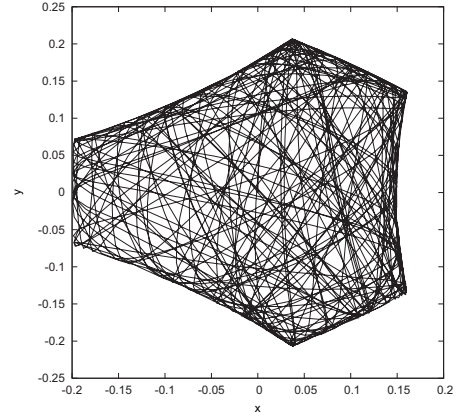


図4 トリプルリンケージの連結点 X の $\mathbb{R}^2$ 上の $t \in [0, 100]$ 軌道。パラメータ値は $(l_1, l_2) = (7/40, 41/40)$, $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = (1/10, 1/25, 43/50)$ 。エネルギーは 0.5。

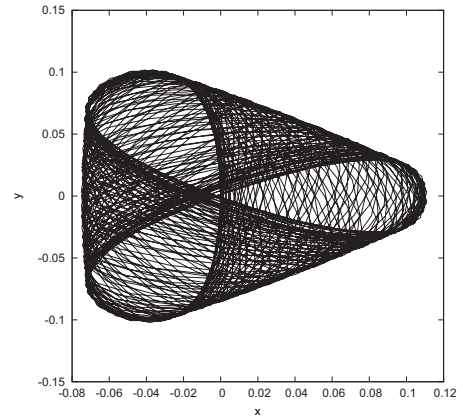


図5 トリプルリンケージの連結点 X の $\mathbb{R}^2$ 上の $t \in [0, 100]$ 軌道。パラメータ値は $(l_1, l_2) = (7/40, 36/40)$, $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = (1/10, 0, 9/10)$ 。エネルギーは 0.5。

期を確認しその分岐を調べる．スパイダリンケージは相空間の次元 3 なので，3 つのリアプノフ指数を持つ．一つは軌道方向の 0，そして自由運動は保存系なので，リアプノフ指数の和は 0 となるため，第二リアプノフ指数は 0，第三リアプノフ指数は $-\lambda$ であることがわかり，最大リアプノフ指数のみ調べれば十分である．図 6 に l_2 に応じたリアプノフ指数のグラフをあげ

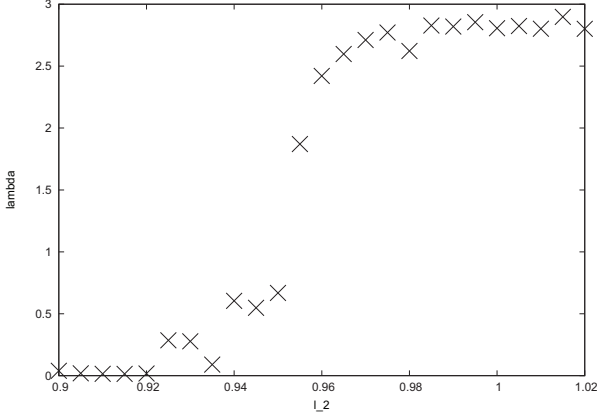


図 6 横軸は l_2 ，縦軸はリアプノフ指数．パラメータ値は $(l_1) = (7/40)$ ， $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = (1/10, 1/25, 43/50)$ ．エネルギーは 0.5． l_2 を 0.9 から 1.04 まで 0.01 度にリアプノフ指数を計算した．

た．図 5 のような軌道を描く $l_2 < 0.94$ ではリアプノフ指数はおおよそ $\lambda = 0.01$ であり，準周期を特徴付けるおおよそ 0 になっている．図 4 のような軌道をとる $l_2 > 0.97$ では $\lambda = 2.8$ であり，カオスを特徴付ける正のリアプノフ指数が得られる．この非連続的なダイナミクスの変化が起こる点は，配位空間の種数が変化する点であると考えられる．いま l_2 の変化によって種数は 0 から 3 に変化するが，その点は $4l_1l_2 + 3(l_1 - l_2) - 4 = 0$ であるので， $l_1 = 0.1$ のもとでは， $l_2 = 33/34 \simeq 0.976$ となり数値の結果と一致している．

また配位空間のトポロジが変化せずとも，計量が変化することによっても分岐が起こることが確認できた．すなわち，長さパラメータを変化させず，質量のパラメータを変化させることにより，分岐が生じた．図 7 は μ_2 に対するリアプノフ指数の変

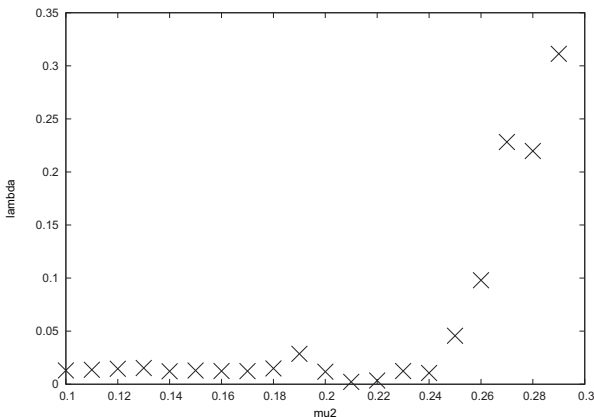


図 7 横軸は μ_2 ，縦軸はリアプノフ指数．パラメータ値は $(l_1,) = (7/40, 0.9)$ ， $(\mu_1, \mu_3) = (1/10, 9/10)$ ．エネルギーは 0.5． μ_2 を 0.1 から 0.29 まで 0.01 ごとにリアプノフ指数を計算した．

化を書いたグラフである．図 5 のような軌道を描く， $\mu_2 < 0.5$ ではリアプノフ指数はおおよそ 0 である．そこからリアプノフ指数が μ_2 の増加に伴い連続的に増加している．

6. ま と め

物理例のアノソフ系である n th スパイダリンケージの自由運動の運動方程式を $2n$ 個の変数の 2 回微分と $2(n-1)$ 個の未定乗数に関する $4n-2$ 元の線形方程式の形で記述した． n に応じて，方程式のサイズは大きくなるが，拘束条件もそれに応じて増加し，相空間の次元は n によらず常に 3 となる．適当に変数を取り直せば係数行列は対称であり，また疎行列なので線形方程式を解く際にも種々の高速化の手法を用いることができる．また，力学系の相空間がユークリッド空間に埋め込まれた多様体の場合のリアプノフ指数の数値計算方法を提案し，拘束系であり保存系であるスパイダリンケージのリアプノフ指数の計算に適用した．運動方程式をたてたことにより，任意のパラメータでのスパイダリンケージのダイナミクスをシミュレーションすることができるようになり，リアプノフ指数を計算することでダイナミクスの初期値鋭敏性を定量的に評価した．スパイダリンケージは周期のパラメータも持ちえることがわかり，そこへの分岐は，配位空間の種数が変化することによる非連続的な分岐と，配位空間の計量の変化による連続的な分岐の 2 通りの分岐の存在を確認できた．

文 献

- [1] Alligood, Kathleen T., Tim D. Sauer, and James A. Yorke. "Chaos. Springer Berlin Heidelberg", 1997.
- [2] Devaney, Robert L. "An introduction to chaotic dynamical systems." Vol. 13046. Reading: Addison-Wesley, 1989.
- [3] Shimada, I., and Nagashima T. "A numerical approach to ergodic problem of dissipative dynamical systems." *Progress of Theoretical Physics* 61.6 (1979): 1605-1616.
- [4] Katok A and Hasselblatt B "Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems" Cambridge University Press 1995.
- [5] Thurston, W. P., and Jeffrey R. Weeks. "The mathematics of three-dimensional manifolds." *Scientific American* 251 (1984): 108.
- [6] Hunt, T. J., and R. S. MacKay. "Anosov parameter values for the triple linkage and a physical system with a uniformly chaotic attractor." *Nonlinearity* 16.4 (2003): 1499-1510.
- [7] Magalhães, M. L. S., and Mark Pollicott. "Geometry and dynamics of planar linkages." *Communications in Mathematical Physics* 317.3 (2013): 615-634.
- [8] Kuznetsov, Sergey P. "Hyperbolic chaos in self-oscillating systems based on mechanical triple linkage: Testing absence of tangencies of stable and unstable manifolds for phase trajectories." *Regular and Chaotic Dynamics* 20.6 (2015): 649-666.
- [9] Kapovich, Michael, and John J. Millson. "Universality theorems for configuration spaces of planar linkages." *Topology* 41.6 (2002): 1051-1107.