

H_p 極値関数について

東工大理 小林昇治

平面領域又は Riemann 面上の函数論においては、種々の函数族での極値問題が考えられ、その極値函数の性質等が興味の対象となることが多い。ここでは Hardy 族 $H^p(R)$ ($p > 0$) において Hejhal [5], Gamelin [3] 等が扱ったような線型極値問題の極値函数の動向について調べる。大ざっぱに言って、 $H^p(R)$ は $p \rightarrow \infty$ のとき、その記法から想像されるように $H^\infty(R)$ にある意味で近づくのであるが、ある線型極値問題の $H^p(R)$ での極値函数 f_p は $p \rightarrow \infty$ のとき $H^\infty(R)$ における極値函数 f_∞ に (適当な位相で) 近づくかというのがここで考える問題である。

§ 1. 定義と問題の設定.

R を有 Riemann 面とし、1 点 $a \in R$ をとって固定する。
正の実数 p に対し、指数 p の Hardy 族 $H^p(R)$ とは R 上の

一値正則函数 f の $\|f\|_p$ が R 上である調和函数をおさえるものの族であり, $f \in H^p(R)$ に対してその $\|f\|_p$ は次式で定義される.

$$(1.1) \quad \|f\|_p = \inf_u u(x)^{\frac{1}{p}}$$

ここに $\inf$ は $\|f\|_p$ をおさえるすべての調和函数についてとる. $H^0(R)$ は R 上の有界正則函数の族で, $f \in H^0(R)$ に対して $\|f\|_0$ は R 上の一般 $\|f\|_p$ である.

K を R のコンパクト集合で, R の境界 ∂R を分離したいとする. $\mathcal{L}$ を K 上の連続函数族 $C(K)$ 上に定義された K 上の一般 $\|f\|_p$ に関して連続な線型 functional とする. Riesz の表現定理 [8] により, K 上の complex measure μ が存在して $\mathcal{L}$ は次式で表わされる.

$$(1.2) \quad \mathcal{L}(f) = \int_K f(z) d\mu(z) \quad (f \in C(K)).$$

$\mathcal{L}$ の $H^p(R)$ への制限の $\|f\|_p$ を M_p とかく. すなわち.

$$(1.3) \quad M_p = \sup \{ |\mathcal{L}(f)| : f \in H^p(R), \|f\|_p \leq 1 \}.$$

同様に $\mathcal{L}$ の $H^0(R)$ 上の $\|f\|_0$ を M_0 とかく. すなわち.

$$(1.4) \quad M_0 = \sup \{ |\mathcal{L}(f)| : f \in H^0(R), \|f\|_0 \leq 1 \}$$

(1.3), (1.4) で $\sup$ をとる函数が存在することは正規族の議論から容易にわかる. これらをそれぞれ H^p 極値函数, H^∞ 極値函数と呼ぶ. H^p 1.1.4 $\|f\|_p$ は p について単調増加であるから, M_p は単調減少である. 以下自明な場合を除くため $M_0 > 0$ と仮定する. $1 < p < \infty$ ならば $H^p(R)$ の一様凸性から H^p 極値函数が unique なることが知られてゐる ([1], [6]). また H^∞ 極値函数が unique なることもいふことができる人によって示されてゐる ([2], [3], [5]). H^p 極値函数を f_p , H^∞ 極値函数を f_0 と書く.

§2. f_p の広義一様収束.

まず一般の Riemann 面について容易にわかることを示す.

定理 1. $p \rightarrow \infty$ のとき f_p は f_0 に R 上広義一様収束する.

証明. $\{f_p\}_{p>1}$ は正規族をなすから, 適当に部分列 $\{f_{p_n}\}$ をとれば f_{p_n} はある g に広義一様収束してゐる. 任意の g , $1 < q < \infty$ に対し, n を十分大きくとれば $\|f_{p_n}\|_q \leq \|f_{p_n}\|_{p_n} = 1$. したがって $\|g\|_q \leq 1$, これから $\|g\|_\infty \leq 1$ を得る. 一方 f_{p_n} は g に K 上一様収束してゐるから,

$$(2.1) \quad \ell(g) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ell(f_{p_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} M_{p_n} \geq M_0$$

したがって g は H^0 極値関数で

$$(2.2) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} M_p = M_0$$

が成り立つ。 f_0 は unique であるから、 f_p 自身が f_0 に R 上広義一様収束していることがわかる。

定理 1 は [6] で特別な極値問題について示した。証明は本質的に同じである。

§3. 有限連結平面領域の場合.

以下 R が有限連結平面領域の場合を考える。必要ならば、等角同値な領域を考えればよいから、 R の境界 ∂R は互いに共通部分のない有限個の解析曲線からなっているとしてよい。このとき H_p 11.1 は ∂R 上の調和測度による積分で表わされる ([7]) ので、極値問題は ∂R 上の L^p 空間の双対関係によって調べることもできる。

R 内の点 z に対し、 R の内部 $\bar{R}$ 上に連続な関数の族を $A(R)$ で表わす。以下 R の連結度を m (> 0) とする。 α を $\bar{R}$ 上の有理型関数 α は微分とすると、 $Z(\alpha)$ (resp. $P(\alpha)$) で α の重複度をこめて数えた零点 (∂R 上の零点は重複度の半分で数える) (resp. 極) の個数を表わす。 Candy の定理

と Fubini の定理により, (1.2) は容易に,

$$(3.1) \quad l(f) = \int_{\partial R} k(z) f(z) dz, \quad f \in H^p(R)$$

と書き直せる. ここに k は μ の Cauchy 変換

$$(3.2) \quad k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z}$$

で与えられる. $H^\infty(R)$ における極値問題についての次の定理はよく知られている. 一応簡単に証明をつけるが, 代わりに [2], [3], [4], [5] 等を見ればよい.

定理 2. $g_0 \in A(R)$ が存在して

$$(3.3) \quad \int_{\partial R} |k(z) + g_0(z)| |dz| = M_0$$

$$(3.4) \quad \int_0(z) (k(z) + g_0(z)) dz \geq 0 \quad \text{along } \partial R$$

$$(3.5) \quad \int (f_0) \geq m.$$

f_0 が非定数ならば, g_0 は unique である.

証明. l の $A(R)$ への制限を Hahn-Banach の定理によって $C(\partial R)$ 上に拡張すれば, l は Riesz の表現定理によって, ∂R 上の測度で表現される. 亦すなわち ∂R 上の complex measure ν が存在して, 次式がなり立つ.

$$(3.6) \quad l(f) = \int_{\partial R} f(z) d\nu(z), \quad f \in A(R)$$

$$(3.7) \quad \| \nu \| \leq M_0.$$

(3.1) と (3.6) により

$$(3.8) \quad \int_{\partial R} f(z) (d\nu(z) - k(z)) dz = 0, \quad f \in A(R).$$

したがって Riesz 兄弟の定理により ν の測度はある H^1 函数によって表現される。すなわち ある $g_0 \in H^1(R)$ が存在して

$$(3.9) \quad d\nu(z) - k(z) dz = g_0(z) dz$$

(3.7), (3.9) より

$$(3.10) \quad \int_{\partial R} |k(z) + g_0(z)| |dz| \leq M_0.$$

一方 f_0 は恒値函数であるから

$$(3.11) \quad M_0 = l(f_0) = \int_{\partial R} f_0(z) k(z) dz$$

$$= \int_{\partial R} f_0(z) (k(z) + g_0(z)) dz$$

$$\leq \int_{\partial R} |f_0(z)| |k(z) + g_0(z)| |dz|$$

$$\leq \int_{\partial R} |f(z) + g_0(z)| |dz| \leq M_0.$$

LT=0, 2

$$(3.12) \quad \int_{\partial R} |f(z) + g_0(z)| |dz| = M_0.$$

$f(z) + g_0(z)$ は恒等的に 0 ではないから, ∂R 上 $\epsilon < \delta$ となる $\epsilon > 0$

$$(3.13) \quad \int_{\partial R} f_0(z)(f(z) + g_0(z)) dz \geq 0$$

$$(3.14) \quad |f_0(z)| = 1.$$

$f_0(z)(f(z) + g_0(z))$ は ∂R の上 $\epsilon > 0$ H^1 に属するから鏡像原理によって ∂R を $\pm$ 2 解析接続される. Rudin [7] の補題により, (3.14) から f_0, g_0 も $\epsilon > 0$ に ∂R を $\pm$ 2 解析接続される $\epsilon > 0$ 加わることがある. (LT=0) (3.13), (3.14) は ∂R 上 $\epsilon > 0$ の $\pm$ 2 成り立つ. (3.5) は (3.14) から偏角の原理により容易にわかる. 次に f_0 が非定数 α と g_0 が unique なることを示す. (3.13) を満たす $g_0 \in H^1(R)$ が他にあって $\epsilon > 0$ ならば h_0 とする.

$$(3.15) \quad \alpha = \int_{\partial R} f_0(z)(g_0(z) - h_0(z)) dz$$

とすれば, α は ∂R 上の $\pm$ 2 real 数 $\mathbb{R}$ 上の正則微分である

るから $Z(\alpha) = m - 2$ とする. これは (3.5) と矛盾する.

以下 f_0 が非定数であると仮定する. $K_0(z) = (k(z) + g_0(z))f_0(z)$ とおく.

次に $H^p(R)$ ($1 < p < \infty$) の場合を考える. R の点 $t=1$ における調和測度を η とする. $G(z, t)$ を R の $t=1$ に極をもつ Green 函数とすれば,

$$(3.16) \quad d\eta = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial G(z, t)}{\partial n_z} |dz| = \frac{i}{2\pi} P'(z) dz$$

とかけると, これは $P(z)$ は $G(z, t)$ の共役調和函数 $G^*(z, t)$ として $P(z) = G(z, t) + i G^*(z, t)$ である. よく知られていのように $P'(z)$ は ∂R を二つの正則 ∂R 上に覆うもたす. このとき $f \in H^p(R)$ の H^p ノルムは

$$(3.17) \quad \|f\|_p = \left(\int_{\partial R} |f(z)|^p d\eta \right)^{1/p}$$

と表わされる.

定理 3. $p^{-1} + q^{-1} = 1$ とする. $g_f \in H^q(R)$ が unique に存在して,

$$(3.18) \quad \left(\int_{\partial R} |k(z) + g_f(z)|^q \left| \frac{dz}{d\eta} \right|^q d\eta \right)^{1/q} = M_p$$

が

$$(3.19) \quad (k(z) + g_p(z)) f_p(z) dz \geq 0 \quad \text{along } \partial R.$$

$$(3.20) \quad (k(z) + g_p(z)) f_p(z) \frac{dz}{dy} = M_p |f_p(z)|^p \quad \text{on } \partial R.$$

証明. $L^p(dy)$ と $L^q(dy)$ の duality により, 存在する $h_p \in L^q(dy)$ により, 2 表現される. および

$$(3.21) \quad \ell(f) = \int_{\partial R} f(z) h_p(z) dy(z), \quad f \in H^p(R)$$

$$(3.22) \quad \|h_p\|_q = M_p.$$

(2.1) と (2.21) より

$$(3.23) \quad \int_{\partial R} f(z) (h_p(z) dy - k(z) dz) = 0.$$

L^∞ かつ, 2 Riesz 定理により, 存在する $g_p \in H^1(R)$ かつ
 $\ell(2)$

$$(3.24) \quad h_p(z) dy - k(z) dz = g_p(z) dz$$

とかけると, (3.22) より (3.18) が得られる. したがって $g_p \in H^1(R)$ かつ, Hölder の不等式により,

$$(3.25) \quad M_p = \int_{\partial R} k(z) f_p(z) dz$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\partial R} (k(z) + g_p(z)) f_p(z) dz \\
&\leq \|h_p\|_2 \|f_p\|_p = M_p.
\end{aligned}$$

等号第(4)より.

$$(3.26) \quad (k(z) + g_p(z)) f_p(z) dz \geq 0 \quad \text{a.e. along } \partial R.$$

$$(3.27) \quad (k(z) + g_p(z)) f_p(z) \frac{dz}{d\eta} = M_p |f_p(z)|^p \quad \text{a.e. on } \partial R$$

$K_p(z) = (k(z) + g_p(z)) f_p(z)$ とおけば, K_p は ∂R の近くで H^1 に属するから鏡像原理により ∂R を $\pm$ として解析接続される. したがって (3.26) は ∂R 上 $\pm$ の両方成り立つ.

$L_p(z) = K_p(z) \frac{dz}{d\eta}$ とおけば, L_p も ∂R 上正則である. (3.27) が $\pm$ の両方成り立つことを示すため次の補題を証明する.

補題 1. f_p, g_p は K_p が $\pm$ の $\pm$ 零点をもちない ∂R の任意の弧を $\pm$ として解析接続される.

証明. 必要ならば等角写像で写せばよいから, R は上半平面に含まれ, 実軸が ∂R の一つの成分になるとしてよい. K_p が区間 $[-1, 1]$ 上に零点をもちないとする. 適当な $[-1, 1]$ の近傍 N をとって K_p が $N \cap R$ に零点をもちない

おこなう。以下 $N \cap R$ を単位円内 U に等角写像し U を考える。 K_p は $\bar{U}$ 上連続で 0 にはならないから outer function である。したがって K_p の因数である $f_p \in$ outer function であるから次の表現が成り立つ。

$$(3.28) \quad f_p(z) = C \exp \int_{\partial U} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \log |f_p(e^{i\theta})| d\theta, \quad (|C|=1)$$

(3.27) を代へて

$$(3.29) \quad f_p(z) = C \exp \left\{ \int_{\Gamma_1} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \frac{1}{p} \log \left| \frac{L_p(e^{i\theta})}{M_p} \right| d\theta \right. \\ \left. + \int_{\Gamma_2} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \log |f_p(e^{i\theta})| d\theta \right\}$$

$$= C' L_p(z)^{\frac{1}{p}} \exp \left(\int_{\Gamma_2} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \left(\log |f_p(e^{i\theta})| - \frac{1}{p} \log \left| \frac{L_p(e^{i\theta})}{M_p} \right| \right) d\theta \right),$$

こゝに Γ_1 は $[-1, 1]$ に対応する ∂U の弧, Γ_2 はその complement を表わす。(3.29) より f_p が Γ_1 上 ∞ へ解折接続されることをわかる。 g_p についても同様である。

系. f_p^p, g_p^q は $\bar{R}$ 上正則である。

特に $|f_p|^p, |g_p|^q$ は $\bar{R}$ 上連続であり, (2.27) は ∂R 上

次の定理を証明する。

§4. f_p の一様収束。

前節までの結果を利用して次の主定理を示す。

定理 4. f_p は f_0 に $\mathbb{R}$ 上の高々有限個の点の任意の近傍の外で一様収束する。

証明. (3.18) により $\{g_p\}_{p>1}$ は正規族をなす。 $\{g_p\}$ を $\{g_p\}$ の R 内広義一様収束する部分列とする。定理 1 により f_p は f_0 に R 内広義一様収束するから、 $K_p = (k + g_p)f_p$ も R 内広義一様収束する。 K_p は鏡像原理により解析接続したから、 $\mathbb{R}$ を含む領域 D が存在して K_p は D 上で一様収束する。 K_p の極限函数を K_1 とすれば、 K_1 は高々有限個の零点を R 内に持つ。 P を $\mathbb{R}$ の一つの成分とする。以下 P の内部を単位円内に写して考える。 z を十分 1 に近くとれば $R_z = \{z: 1 < |z| < 1\}$ に K_1 の零点をもたないようにできる。 f_p の R_z 内の零点から作られた Blaschke 積を B_p 。 K_p の z を $\tilde{B}_p$ とかく。これらはもちろんで有限積である。 $\log |f_p / B_p|$ は R_z 内の z に有界な調和函数で $\overline{R_z}$ 上連続 (高々有限個の点で $-\infty$ となる) であるから、 R_z の z に関する調和測度を $\nu_z(z)$ とすれば

$$(4.1) \quad \log |f_{p_n}(z)/B_{p_n}(z)| = \int_{\partial R_r} \log |f_{p_n}(z)/B_{p_n}(z)| d\nu_3(z)$$

$$(3.20) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$$

$$= \frac{1}{p_n} \log |L_{p_n}(z)/M_{p_n} \widetilde{B}_{p_n}(z)|$$

$$+ \int_{|z|=r} \left[\log |f_{p_n}(z)/B_{p_n}(z)| - \frac{1}{p_n} \log |L_{p_n}(z)/M_{p_n} \widetilde{B}_{p_n}(z)| \right] d\nu_3(z)$$

Rouché の定理により B_{p_n} , $\widetilde{B}_{p_n}$ の零点は K_1 の零点に収束し, f_{p_n} は $\{z: |z|=r\}$ 上一様収束するから, f_{p_n} は K_1 の零点の任意の近傍をのこして ∂R を ε だけ一様有界である. したがって Vitali の定理により f_{p_n} は f_0 に ε だけ一様収束する. 特に ∂R 上有限個の点を除いて各点収束する. したがって g_{p_n} もある g_1 に ∂R 上有限個の点を除いて各点収束する. Fatou の補題と (3.18) により

$$(4.2) \quad \int_{\partial R} |k(z) + g_1(z)| |dz|$$

$$\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial R} |k(z) + g_{p_n}(z)| |dz|$$

$$\leq \lim_{n \rightarrow \infty} M_{p_n} = M_0.$$

したがって 2 定理 2 により $g_1 = g_0$. g_0 は unique であるから g_p 自身が g_0 に収束する. ゆえに上の議論を繰り返すことによって, K_p が $\bar{R}$ を含むある領域 D 上 K_0 に一様収束し, K_0 の $\mathbb{R}$ 上の零点の任意の近傍の外で f_p が f_0 に一様収束することがわかる.

系 1. $\bar{R}$ を含む領域 D があって, K_p は D 上 K_0 に一様収束する.

系 2. K_0 が $\mathbb{R}$ 上に零をもたなければ, f_p は f_0 に $\bar{R}$ を含むある領域 D 上一様収束する.

系 3 $l(f) = f'(z)$ ($z \in \mathbb{R}$) ならば f_p は f_0 に一様収束する.

§ 5. 結論.

K_0 が $\mathbb{R}$ 上に零をもたないときは f_p が f_0 に一様収束するかどうかは今のところわからない.

講義の後 吹田先生から K_0 が $\mathbb{R}$ 上に零をもつ場合として次の例を教えた.

$$R = \{z : |z| < 1\}, \quad 0 < x < 1 \quad (2)$$

$$(5.1) \quad l(f) = f'(0) + \frac{(1-x^2)(1-x)}{x} (f(0) - f(x))$$

とすれば

$$(1.2) \quad K_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{z} - \frac{(1-\lambda)(1-\lambda^2)}{(z-\lambda)(1-\lambda z)} \right)$$

$$(1.3) \quad f_0(z) = z$$

ただし $\lambda = 0$ が簡単な計算によりわかり、 $K_0(1) = 0$ である。

REFERENCES

1. Clarkson, J. A., Uniformly convex spaces. Trans. A.M.S. 40 (1936), 396-414.
2. Fisher, S. D., On Schwarz's lemma and inner functions. Trans. A.M.S. 138 (1969), 229-240.
3. Gamelin, T., Extremal problems in arbitrary domains. Michigan Math. J. 20 (1973), 3-11.
4. Garnett, J., Analytic capacity and measure. Lecture notes in Math. 297, Springer.
5. Hejahl, D. A., Linear extremal problems for analytic functions, Acta Math. 128 (1972) 91-122.
6. Kobayashi, S., Schwarz's lemma in H_p spaces. Kōdai Math. Semi. Rep. 27 (1976), 291-299.
7. Rudin, W., Analytic functions of class H_p . Trans. A.M.S. 78 (1955), 46-66.
8. _____, Real and complex analysis, 2nd edition, MacGraw-hill, 1974.