

Wirsing の不等式について

岡山大 理 鹿野 健

まず notation の説明から。

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \dots n = p^m \quad (p: \text{素数}, m \in \mathbb{N}), \\ 0 & \dots \text{その他} . \end{cases}$$

(von Mangoldt 函数)

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) .$$

$$r_n = \begin{cases} \frac{1}{n} - \frac{\Lambda(n)}{n} & \dots n \geq 2 , \\ 1 - 2\gamma & \dots n = 1 , \quad (\gamma: \text{Euler 定数}) . \end{cases}$$

$$f\left(\frac{1}{s}\right) = \sum_{n \leq e^s} r_n .$$

さて, Chebyshev の研究などを通して, 素数定理

$$\pi(x) \sim x / \log x \quad (x \rightarrow \infty) \quad \text{は} \quad \psi(x) \sim x$$

と同等であることが知られていたが、素数定理の初等的証明は1949年になって A. Selberg と P. Erdős の両者によって独立に得られた。後(1951年) Iseki - Tazawa によってその証明は簡単化され、見通し良く改良された。一方、1962年になって E. Wirsing [4] は新しい初等的証明を発表したが、そこで彼が Lemma の一つとして用いた不等式(積分の合成積に関するもの)を紹介するのが本稿の目的である。(主として [2] によった。) 1963年には、Th. Bang [1] が、Wirsing とは独立に、別の不等式を用いて同様の初等的証明を得ている。この事実は余り知られていない様に思うが、最近出た W. Schwarz の本 [3] には紹介されているので参照されたい。さて、Wirsing の不等式とは次のものである。

【定理】 (E. Wirsing)

f, g は共に $[0, \infty)$ で定義された、ルベーグ可測な実数値函数とし、いずれも任意の有限区間上で2乗可積分とする。いま、

$$(1) \quad \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x f^2(y) dy = F < \infty,$$

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x g^2(y) dy = G < \infty,$$

とし,

$$(2) \quad h(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(x-y) g(y) dy \quad (x > 0)$$

が

$$(3) \quad \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x h(y) dy = 0,$$

を満たすものとする。すると,

$$(4) \quad \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x h^2(y) dy \leq \frac{1}{2} FG.$$

ここに, 右辺の定数 $\frac{1}{2}$ は best value である。

この不等式(4)で, 右辺の定数が1より小さい(実は $\frac{1}{2}$)
ことが本質的であり, 重要なのである。その理由は以下
で分るが, (4)の証明法としては Wirsing の原証明である
初等的方法以外のものが無いのは不思議である。 $\frac{1}{2}$ が
best であることは, $f(x) = g(x) = \sin x$ のとき
に $\frac{1}{2}$ が実現される事から明かである。

この Wirsing の不等式(4) が素数定理の証明にいかに関
係つくかを見るために次の Lemma を述べよう。

(Lemma) (E. Wirsing)

$\forall \varepsilon > 0$ に対して, 以下の条件を満たすような“折れ線函数” (piece-wise linear function) σ が存在する。

$$(i) \quad \sigma(\xi) = \frac{1}{\xi} \int_0^{\xi} \sigma(\xi - \eta) d\sigma(\eta) + O\left(\frac{\log \xi}{\xi}\right), \quad (\xi \geq 2)$$

$$(ii) \quad |\sigma'(\xi)| \leq 1 + \varepsilon, \quad (\xi > 0)$$

ただし可算個の点 $\xi = \xi_n$ ($n=1, 2, \dots$) を除く。

(iii)

$$|\sigma(\xi) - f(\xi)| = O\left(\frac{1}{1+\xi}\right), \quad (\xi \geq 0).$$

すると, この σ について, Wirsing の不等式によって,

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x \sigma^2(y) dy = 0,$$

であることが証明される。

なぜならば, $f(y) = \sigma(y)$, $g(y) = \sigma'(y)$, $h(x) = \sigma(x) + o(1)$, と置けば, 上の (Lemma) によって Wirsing 不等式の諸条件が満たされることが分かるから,

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x \sigma^2(y) dy \leq \frac{1}{2} \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x \sigma^2(y) dy \times$$

$$x \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x \sigma'(y)^2 dy \leq \frac{1}{2} (1+\varepsilon)^2 \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x \sigma^2(y) dy.$$

$$\therefore \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x \sigma^2(y) dy = 0.$$

さて, Cauchy - Schwarz の不等式によつて,
(Lemma) の (i) より,

$$x |\sigma(x)| \leq \left\{ \int_0^x \sigma^2(y) dy \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^x \sigma'(y)^2 dy \right\}^{\frac{1}{2}} + o(x).$$

従つて, (5) より,

$$\sigma(x) = o(1), \quad (x \rightarrow \infty).$$

よつて, (Lemma) の (iii) より,

$$\rho(x) = o(1), \quad (x \rightarrow \infty),$$

即ち,

$$(6) \quad \sum_{n \leq x} \left(\frac{\Lambda(n)}{n} - \frac{1}{n} \right) + 2\gamma = o(1), \quad (x \rightarrow \infty).$$

一方, $x \geq 1$ のとき,

$$\psi(x) - x = \sum_{n \leq x} (\Lambda(n) - 1) + O(1)$$

$$= \sum_{n \leq x} \left(\frac{\Lambda(n) - 1}{n} \cdot n \right) + O(1),$$

であるから, partial summation によつて,

$$\begin{aligned} \psi(x) - x &= -2\gamma x + o(x) + \int_1^x (2\gamma + o(1)) dt \\ &\quad + O(1) \\ &= o(x), \quad (x \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

故に素数定理は証明された。

【文 献】

- [1] Butzer & Korevaar (ed.) ; On Approximation Theory, Proc. of the Conference at Oberwolfach, 1963. Birkhäuser Verl. (1964).
- [2] K. Chandrasekharan ; Arithmetical Functions. Springer Verl. (1970).
- [3] W. Schwarz ; Einführung in Methoden und Ergebnisse der Primzahltheorie. Bibliographisches Institut (1969).

[4] E. Wirsing ; " Elementare Beweise des Prim-
zahlsatzes mit Restglied , I, II. "

Crelle 211 (1962) 205~214 & ibid 214/215 (1964)

1~18.