

16

関数微分方程式の漸近的性質について

山梨大学 工学部 栗原光信

§0. 序

線型関数微分方程式

$$(0.1) \quad \dot{x}(t) = L(x_t) + F(t, x_t)$$

と、対応する同次方程式

$$(0.2) \quad \dot{u}(t) = L(u_t)$$

について考察する。ここで、 $L(\phi)$ と $F(t, \phi)$ は連続関数の空間 $C = C([-w, 0], \mathbb{R}^n)$ 上の線型汎関数 ($\mathbb{R}^n$ 値) である。

$w \geq 0$ は定数とする。また、 $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $(-w \leq \theta \leq 0)$ とおく。 $t \rightarrow +\infty$ のとき汎関数 $F(t, \phi)$ が「ある意味で小さく」なるとき、方程式 (0.1) の解 $x(t)$ と方程式 (0.2) の解 $u(t)$ がどのような漸近的な関係をもつかについて記述する。

$w = 0$ の場合、方程式 (0.1) と方程式 (0.2) は線型常微分方程式系

$$(0.3) \quad \dot{x}(t) = [A_0 + A(t)]x(t)$$

と、

$$(0.4) \quad \dot{u}(t) = A_0 u(t)$$

となる。方程式(0.3)と(0.4)については、行列 $A(t)$ に関して次の3つの場合に分けて、各方程式の解 $x(t)$ と $u(t)$ の漸近的な関係が論じられている。すなわち、

$$(0.5) \quad \|A(t)\| = o(1) \quad \text{as } t \rightarrow +\infty \quad (\text{Order 条件})$$

と

$$(0.6) \quad \int_0^{+\infty} \|A(t)\| dt < +\infty \quad (\text{可積分条件})$$

と

$$(0.7) \quad A(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} A_k t^{-k} \quad \text{as } t \rightarrow +\infty \quad (\text{漸近展開})$$

の場合についてである。ただし、§ 0、§ 1 においては、ベクトル $y = (y_k)$ と行列 $A = (a_{ij})$ に対し、

$$\|y\| = \sum_{k=1}^n |y_k|, \quad \|A\| = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|$$

とおく。このような考え方を、関数微分方程式(0.1)と(0.2)について拡張する試みを行うことにしよう。

§ 1. 常微分方程式の場合の結果

常微分方程式系(0.3)と(0.4)について、上記(0.5)~(0.7)の各場合に関する結果をこの節で述べておこう。

定理 1.1 (R. Bellman[1])

定数行列 A_0 の固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ がすべて実根かつ単根とする。もし、条件(0.5)が成立するならば、各固有値 λ_k

に対して、不等式

$$C_2 \exp\left\{\lambda_k t - d_2 \int_{t_0}^t \|A(s)\| ds\right\} \leq \|x_k(t)\| \leq C_1 \exp\left\{\lambda_k t + d_1 \int_{t_0}^t \|A(s)\| ds\right\} \quad (t \geq t_0)$$

従って、

$$\|x_k(t)\| = \exp[\lambda_k t + o(t)] \quad \text{as } t \rightarrow +\infty$$

をみたす方程式(0.3)の解 $x_k(t)$ が存在する。

定理 1.2 (N. Levinson [4])

定数行列 A_0 の固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ がすべて単根とする。
もし、条件(0.6)が成立するならば、各固有値 λ_k に対して、

$$x_k(t) = e^{\lambda_k t} [C_k + o(1)] \quad \text{as } t \rightarrow +\infty$$

をみたす解 $x_k(t)$ が存在する。

定理 1.3 (M. Hukuhara [3])

定数行列 A_0 の固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ がすべて単根とする。
もし、条件(0.7)が成立するならば、各固有値 λ_k に対して、

$$x_k(t) \sim e^{\lambda_k t} t^{\mu_k} \sum_{m=0}^{\infty} C_m t^{-m} \quad \text{as } t \rightarrow +\infty \quad (C_0 \neq 0)$$

を漸近展開としてもつ方程式(0.3)の解 $x_k(t)$ が存在する。

ただし、上記定理において、 C, d, μ は定数とする。

§2. 記号と仮定

§1で述べた通り、 $C = C([-w, 0], \mathbb{R}^n)$ は有限閉区間 $[-w, 0]$ で連続な $\mathbb{R}^n$ 値関数の空間とし、 $\mathbb{R}^n$ は n 次元複素列

ベクトル空間とする。 $\omega \geq 0$ である。 $\phi \in C$ に対して、ノルム $\|\phi\| = \sup\{|\phi(\theta)|; -\omega \leq \theta \leq 0\}$ を導入する。ただし、 $|\cdot|$ は $\mathbb{R}^n$ 上の任意のノルムとする。区間 $[\sigma - \omega, \sigma + A]$ ($A \geq 0$) で定義された関数 $x(t)$ に対し $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ ($t \geq \sigma$, $-\omega \leq \theta \leq 0$) と表記する。線型汎関数 $L: C \rightarrow \mathbb{R}^n$ は、

$$(2.1) \quad L(\phi) = \int_{-\omega}^0 [d\eta(\theta)] \phi(\theta)$$

と表わされる。ただし、 $\eta(\theta)$ は $[-\omega, 0]$ で有界変動な行列値関数である。汎関数 $F(t, \cdot): C \rightarrow \mathbb{R}^n$ は $t \geq 0$ で連続かつ $\phi \in C$ について線型かつ

$$(2.2) \quad |F(t, \phi)| \leq \gamma(t) \|\phi\| \quad (t \geq 0, \phi \in C)$$

をみたすとする。ただし、 $\gamma(t)$ は $t \geq 0$ で連続とする。また、変数入の方程式

$$(2.3) \quad \det \Delta(\lambda) = 0, \quad \Delta(\lambda) = \lambda I - \int_{-\omega}^0 e^{\lambda \theta} [d\eta(\theta)].$$

を特性方程式、その根を特性根とよぶ。ただし、 I は単位行列を表わす。

§3. Order条件

常微分方程式(0.3)の場合の Order条件(0.5) に相当する関数方程式(0.1) についての条件は、

$$(3.1) \quad \gamma(t) = o(1) \text{ as } t \rightarrow +\infty$$

である。ただし、 $\gamma(t)$ は(2.2)で定義されている。この場合

次の定理が得られる。

定理 3.1 (M. Kurihara [5])

Order 条件 (3.1) を仮定する。入を特性方程式 (2.3) の単根の特性根とし、 $\operatorname{Re} \lambda = \mu$ とおく。さらに、実数部が μ に等しい特性根が λ 以外に存在しないとする。このとき、 $\sigma \geq 0$ が存在して、方程式 (0.1) が不等式

$$\begin{aligned} & \beta_2 \exp[\mu t - \alpha_2 \int_{\sigma}^t \gamma(\tau) d\tau] \\ & \leq \|x_t\| \leq \beta_1 \exp[\mu t + \alpha_1 \int_{\sigma}^t \gamma(\tau) d\tau] \quad (t \geq \sigma) \end{aligned}$$

従って、

$$\|x_t\| = \exp[\mu t + o(t)] \quad \text{as } t \rightarrow +\infty$$

を満たす解 $x(t)$ を、区間 $[\sigma - \omega, +\infty)$ で有する。ただし、 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ は定数とする。

§ 4. 可積分条件

常微分方程式 (0.3) の場合の可積分条件 (0.6) に相当する、関数微分方程式 (0.1) についての条件は、

$$(4.1) \quad \int_{\sigma}^{+\infty} \gamma(t) dt < +\infty$$

である。ただし、 $\gamma(t)$ は (2.2) で定義されている。この場合、J. K. Hale 氏によって証明された次の定理を紹介しよう。

定理 4.1 (J. K. Hale [2])

λ を特性方程式 (2.3) の単根の特性根とし、 $\operatorname{Re} \lambda = \mu$ とおく。

実数部が μ に等しいすべての特性根が単根であるとする。さらに、次の(I)か又は(II)のいずれかの条件が成立すると仮定する。(I)可積分条件(4.1)をみたす。(II)任意の正数 β , 実数 ν と n 次元行ベクトル η に対して、 $t \geq 0$ で連続な関数 $\gamma_2(t)$ と定数 k が存在して、任意の $t \geq \sigma$ で連続な関数 $w(t)$ で $\sup_{t \geq \sigma} |w(t)| = 1$ かつ $w(t) \rightarrow \varphi_\lambda(0) \times \text{const.}$ as $t \rightarrow +\infty$ をみたすものに対し、以下の関係式が成立する。

$$\begin{aligned} \gamma_2(t) &\rightarrow 0 \quad \text{as } t \rightarrow +\infty, \\ \int_0^{+\infty} \gamma(t) \gamma_2(t) dt &< +\infty, \\ \int_t^{+\infty} \gamma(\tau) \exp\left[\beta(t-\tau) - \int_\tau^t \operatorname{Re} \delta(\xi) d\xi\right] d\tau &\leq \gamma_2(t) \quad (t \geq 0), \\ \int_0^t \gamma(\tau) \exp\left[-\beta(t-\tau) - \int_\tau^t \operatorname{Re} \delta(\xi) d\xi\right] d\tau &\leq \gamma_2(t) \quad (t \geq \sigma \geq 0), \\ \left| \int_t^{+\infty} \eta F(\tau, w_\tau) \exp\left[i\nu(t-\tau) - \int_\tau^t \delta(\xi) d\xi\right] d\tau \right| \\ &\leq |\eta| k \gamma_2(t) \quad (t \geq \sigma). \end{aligned}$$

このとき、 $\sigma \geq 0$ と $a \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ が存在して、方程式(0.1)は $x(t) = \exp\left[\lambda(t-\sigma) + \int_\sigma^t \delta(\xi) d\xi\right] [a + o(1)]$ as $t \rightarrow +\infty$ をみたす解 $x(t)$ を、区間 $[\sigma - \omega, +\infty)$ で有する。ただし、 $\varphi_\lambda(\theta) = ce^{\lambda\theta}$ ($-\omega \leq \theta \leq 0$) は方程式(0.4)の解、従って c は n 次元列ベクトルである。また、 d はある n 次元行ベクトルとして、 $\psi_\lambda(\tau) = de^{-\lambda\tau}$ ($0 \leq \tau \leq \omega$) が方程式(0.4), (2.1) に対する adjoint な方程式

$$\dot{v}(\tau) = - \int_{-\omega}^0 v(\tau - \theta) [d\eta(\theta)]$$

の解とする。さらに、

$$\alpha^{-1} = \psi_{\lambda}(0) \varphi_{\lambda}(0) - \int_{-\omega}^0 \int_0^{\theta} \psi_{\lambda}(\xi - \theta) [d\eta(\theta)] \varphi_{\lambda}(\xi) d\xi$$

とおくとき、

$$\delta(t) = \alpha dF(t, \varphi_{\lambda})$$

と定義する。

§5. 漸近展開

この節では、とくに $\eta = 1$ の場合、すなわち方程式(0.1)と(0.2)がスカラーの場合を仮定する。常微分方程式(0.3)の場合の漸近展開の条件(0.7)に相当する、関数微分方程式(0.1)についての条件として、次の仮定をおく。すなわち、汎関数 $F(t, \phi)$ が、任意の $\phi \in C$ に対して $t \rightarrow +\infty$ のとき、
漸近展開

$$(5.1) \quad F(t, \phi) \sim \sum_{k=1}^{\infty} L_k(\phi) t^{-k}$$

が可能であるとする。ただし、 $L_k(\phi)$ ($k=1, 2, \dots$) は C 上の線型汎関数であるとする。これは、任意の整数 $N \geq 0$ に対して実数 $\gamma_N \geq 0$ と $\sigma_N \geq 0$ が存在して、任意の $t \geq \sigma_N$ と $\phi \in C$ に対して

$$|F(t, \phi) - \sum_{k=1}^N L_k(\phi) t^{-k}| \leq \gamma_N t^{-(N+1)} \|\phi\|$$

が成立する事を意味している。このとき、次の定理を得る。

定理 5.1 (M. Kurihara [6])

漸近展開の条件(5.1)を仮定する。 λ を特性方程式(2.3)の任意の単根の特性根とする。このとき、

(1) 方程式(0.1)は $e^{\lambda t} t^r \sum_{m=0}^{\infty} C_m t^{-m}$ の形の形式解をもつ。

ただし、 C_0 は任意に選べる。 C_0 によって、 r と C_m ($m \geq 1$) が定まる。

(2) $\operatorname{Re} \lambda = \mu$ とおくと、実数部が μ に等しいすべての特性根が単根であるならば、 $\sigma \geq 0$ が存在して、方程式(0.1)は(1)の形式解を漸近展開としてもつような解 $x(t)$ を、区間

$[\sigma - \omega, +\infty)$ において有する。すなわち、

$$x(t) \sim e^{\lambda t} t^r \sum_{m=0}^{\infty} C_m t^{-m} \quad \text{as } t \rightarrow +\infty$$

をみたす。

参考文献

[1] R. Bellman; The boundedness of solutions of linear differential equations, Duke Math. J., Vol. 14, (1947), pp. 83-97.

[2] J. K. Hale; Linear asymptotically autonomous functional differential equations, Rend. Circ. Mat. Palermo, Vol. 5 (1966), pp. 331-351.

- [3] M. Hukuhara ; Sur les points singuliers des équations différentielles linéaires : Domain réel, J. Fac. Sci., Hokkaido Imp. Univ., Ser. I, Vol. 2 (1934), pp 13-88.
- [4] N. Levinson ; The asymptotic nature of solutions of linear systems of differential equations, Duke Math. J., Vol. 15 (1948), pp. 111-126.
- [5] M. Kurihara ; On an asymptotic behavior of solutions of linear functional differential equations, Funk. Ekv., Vol. 22 (1979), to appear.
- [6] M. Kurihara ; Asymptotic expansions in scalar linear functional differential equations, Tokoku Math. J., Vol. 32 (1980), to appear.