

準線形発展方程式の解

1.1 準線形発展方程式

Toyo University Kenji Kojima
東洋大学 小島賢二

準線形発展方程式

$$u_t(\mathbf{x}, t) = P(\mathbf{x}, t)F(u(\mathbf{x}, t)), \quad (1.1)$$

の初期値問題を考える。ここで $P(\mathbf{x}, t)$ は、偏微分作用素で、必ずしも可換であるとは、限らない。 F は非線形写像である。初期条件 $u_0 = u(\mathbf{x}, 0)$ の元に、上式の解を求める。最初に、作用素と非線形写像に関して

$$PF \cdot u \equiv PF(u), \quad (1.2)$$

帰納的に

$$(PF)^n \cdot u \equiv (PF)^{n-1} \cdot PF(u), \quad (1.3)$$

指数写像

$$\exp[PF] \cdot u \equiv u + \sum_{n=1} \frac{(PF)^n}{n!} \cdot u, \quad (1.4)$$

と定義をする。この準線形発展方程式を直接解くのは、大変難しいので、最初に近似解を求める。時間 t の区間 $[0, t]$ を N 分割して、順に番号 $t_1, t_2, \dots, t_N$ を付ける。 $\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$ 式 (2.1) の近似解は、次の様である。

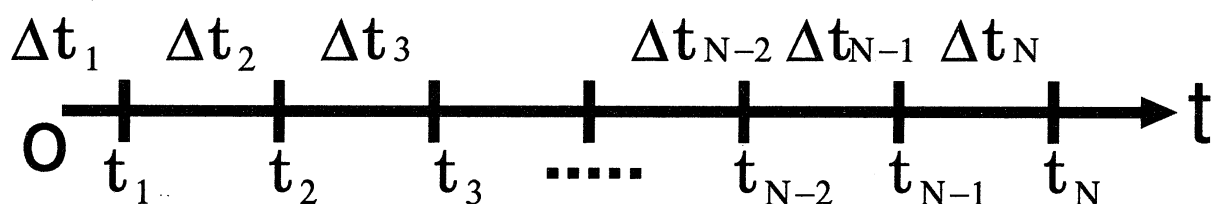


図 1.1: Division of interval $[0, t]$ of variable t

$$u(\mathbf{x}, t) = \exp[P(\mathbf{x}, t_N)\Delta t_N F] \cdots \exp[P(\mathbf{x}, t_1)\Delta t_1 F] \cdot u_0, \quad (1.5)$$

この指数作用素を 1 つの指数作用素にまとめるには、Lie 代数 L_A の包絡代数 $U(L_A)$ に出てくる Baker-Campbell-Hausdorff(BCH) の公式を利用する。 $X_1, \dots, X_N$ を N 個の非可換作用素とする時、ある作用素 Y が存在して、次の様な関係式

$$Y = \log(e^{X_N} \cdots e^{X_1}) \quad (1.6)$$

指数作用素と $\log$ の 1 での展開

$$\log(1 + e^{X_N} \dots e^{X_1} - 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (e^{X_N} \dots e^{X_1} - 1)^n, \quad (1.7)$$

から、

$$Y = \log(e^{X_N} \dots e^{X_1}) = \sum_{i=1}^N X_i + C(X_1, \dots, X_N), \quad (1.8)$$

ただし $C(X_1, \dots, X_N)$ は、 N 個の非可換作用素の多重交換子で

$$C(X_1, \dots, X_N) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \sum_{p_{ij}} \frac{(adX_1)^{p_{11}} \dots (adX_N)^{p_{1N}} (adX_1)^{p_{21}} \dots (adX_N)^{p_{2N}} \dots (adX_1)^{p_{m-1,1}} \dots (adX_N)^{p_{m-1,N}} X_N}{(p_{11} + p_{12} + \dots + p_{NN}) p_{11}! p_{12}! \dots p_{NN}!}, \quad (1.9)$$

で、 $adX_j X_k = [X_j, X_k]$ である。従って Y は多重交換子の無限和になっている。 $P(\mathbf{x}, t_j) \Delta t_j F = X_j$ とおいて、 $\text{Max}\{\Delta t_i \rightarrow 0\}$ なる極限をとり、 (Δt_j) の高次項を無視すると、

$$u(\mathbf{x}, t) = \exp[\tilde{P}F] \cdot u_0, \quad (1.10)$$

ここで $\tilde{P}F$ は

$$\tilde{P}F = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(PF), \quad (1.11)$$

であり、多重交換子 $\eta_n(PF)$ は、

$$\eta_n(PF) = (1/n) \int_0^t dt_1 \dots \int_0^t dt_n \sum_{m=1}^N ((-1)^{m-1}/m) (P_{n-m} \Pi)(\theta(t_n - t_{n-1}), \dots, \theta(t_2 - t_1)) \times \\ [P(\mathbf{x}, t_n)F, [\dots, [P(\mathbf{x}, t_2)F, P(\mathbf{x}, t_1)F] \dots]], \quad (1.12)$$

である。ただし $P_{n-m} \Pi$ は、 $n-m$ 個のすべての組み合わせの積を採ることを意味する。従って、 θ 関数の性質より、 $\tilde{P}F$ の t に関する微分は、 $\partial \tilde{P}F / \partial t = PF$ になることに注意。

最初の 3 項を上げる。

$$\eta_1(PF) = \int_0^t dt' P(\mathbf{x}, t') F, \quad (1.13)$$

$$\eta_2(PF) = \frac{1}{2} \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \theta(t_2 - t_1) [P(\mathbf{x}, t_2)F, P(\mathbf{x}, t_1)F], \quad (1.14)$$

$$\eta_3(PF) = \frac{1}{3} \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \int_0^t dt_3 \{ \theta(t_3 - t_2) \theta(t_2 - t_1) - (1/2) (\theta(t_3 - t_2) - \theta(t_2 - t_1)) \} \\ \times [P(\mathbf{x}, t_3)F, [P(\mathbf{x}, t_2)F, P(\mathbf{x}, t_1)F]], \quad (1.15)$$

例 1: $P = \Delta$ (Laplacian)

作用素 P が可換であるので、初期値問題の解は

$$u(\mathbf{x}, t) = \exp[t\Delta F] \cdot u_0, \quad (1.16)$$

Symmetry	Antisymmetry
$F(u) = F(-u)$	$F(-u) = -F(u)$
$u(\mathbf{x}, t) = \cosh(t\Delta F) \cdot u_0$	$u(\mathbf{x}, t) = \sinh(t\Delta F) \cdot u_0$

表 1.1: 関数 F の性質と解との関係

で与えられる。関数 F が対称である時と、反対称である時には、指数作用素が下記の表のようになる。

例 2: $P = \Delta^2$ (biharmonic operator)

作用素 P が可換であるので、初期値問題の解は

$$u(\mathbf{x}, t) = \exp[t\Delta^2 F] \cdot u_0, \quad (1.17)$$

となる。関数 F が対称である時と、反対称である時には、指数作用素が下記の表のようになる。

Symmetry	Antisymmetry
$F(u) = F(-u)$	$F(-u) = -F(u)$
$u(\mathbf{x}, t) = \cosh(t\Delta^2 F) \cdot u_0$	$u(\mathbf{x}, t) = \sinh(t\Delta^2 F) \cdot u_0$

表 1.2: 関数 F の性質と解との関係

例 3: $P = a\Delta + b\Delta^2$ (a, b : constants)

この時も作用素 P が可換であるので、初期値問題の解は

$$u(\mathbf{x}, t) = \exp[t(a\Delta + b\Delta^2)F] \cdot u_0, \quad (1.18)$$

となる。関数 F が対称である時と、反対称である時には、指数作用素が下記の表のようになる。

Symmetry	Antisymmetry
$F(u) = F(-u)$	$F(-u) = -F(u)$
$u(\mathbf{x}, t) = \cosh(t(a\Delta + b\Delta^2)F) \cdot u_0$	$u(\mathbf{x}, t) = \sinh(t(a\Delta + b\Delta^2)F) \cdot u_0$

表 1.3: 関数 F の性質と解との関係

1.2 2つの作用素を有する発展方程式

2つの作用素 $P(x,t), Q(x,t)$ を含んだ準線形発展方程式

$$u_t(x,t) = PF(u) + QG(u), \quad (2.1)$$

について、考えてみよう。発展方程式中の作用素を行列の形

$$\begin{bmatrix} u \\ q(u) \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} P & Q \\ Q & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F(u) \\ G(u) \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

に書いてみる。ただし補助関数 $q_t(u)$ は、 $q_t(u) = u_t(dq(u)/du)$ であるから、

$$q(u)_t = \frac{dq(u)}{du} u_t = QF(u) + PG(u), \quad (2.3)$$

つまり、

$$q(u) = \int_0^u \frac{QF(\xi) + PG(\xi)}{PF(\xi) + QG(\xi)} d\xi. \quad (2.4)$$

と表される。この方程式の初期値の解は、

$$\begin{bmatrix} u \\ q(u) \end{bmatrix} = \exp[\tilde{M}_{P,Q}\varphi_2] \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ q(u_0) \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

で与えられる。ただし $M_{P,Q}$ と非線形写像 φ_2 は、

$$M_{P,Q} = \begin{bmatrix} P & Q \\ Q & P \end{bmatrix}, \quad \varphi_2 \cdot \begin{bmatrix} u \\ q(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(u) \\ G(u) \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

である。

例1: Hartree 方程式

量子力学で現れる多体系を記述する Hartree 方程式は、次の様な式である。

$$iu_t - \Delta u + (U * |u|^2)u = 0, \quad (2.7)$$

ここで U は、ポテンシャルを表し、記号 $*$ は畳み込み (convolution) を意味している。 $P = \Delta$ 、 $Q = 1$ 、 $F(u) = -iu$ 、 $G(u) = i(U * |u|^2)u$ であるので、補助関数 $q_t(u)$ は、

$$q(u) = \int_0^u \frac{-i\xi + i\Delta(U * |\xi|^2)\xi}{-i\Delta\xi + i(U * |\xi|^2)\xi} d\xi. \quad (2.8)$$

である。作用素行列が可換であるので、この Hartree 方程式の初期値問題の解は、

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ q(u(t)) \end{bmatrix} = \exp\left(t \begin{bmatrix} \Delta & 1 \\ 1 & \Delta \end{bmatrix} \varphi_H\right) \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ q(u_0) \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

と表される。ただし非線形写像 φ_H は、

$$\varphi_H \cdot \begin{bmatrix} u \\ q(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -iu \\ i(U * |u|^2)u \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

である。

例 2: Ginzburg-Landau 方程式
超伝導現象を記述する Ginzburg-Landau 方程式は、

$$u_t = \Delta u + (1 - |u|^2)u, \quad (2.11)$$

と表される。 $P = \Delta$, $Q = 1$, $F(u) = u$, $G(u) = (1 - |u|^2)u$ であるから、補助関数 $q_t(u)$ は、

$$q(u) = \int_0^u \frac{\xi + \Delta((1 - \xi^2)\xi)}{\Delta\xi + (1 - \xi^2)\xi} d\xi. \quad (2.12)$$

で与えられる。作用素行列が可換であるので、この Ginzburg-Landau 方程式の初期値問題の解は、

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ q(u(t)) \end{bmatrix} = \exp\left(t \begin{bmatrix} \Delta & 1 \\ 1 & \Delta \end{bmatrix} \varphi_{GL}\right) \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ q(u_0) \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

と表される。ただし非線形写像 φ_{GL} は、

$$\varphi_{GL} \cdot \begin{bmatrix} u \\ q(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ (1 - |u|^2)u \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

である。

例 3: Cahn-Kolmogorov 方程式
Cahn-Kolmogorov 方程式は

$$u_t = \Delta u + u - u^3, \quad (2.15)$$

と表される。 $P = \Delta$, $Q = 1$, $F(u) = u$, $G(u) = u - u^3$ であるから、補助関数 $q_t(u)$ は、

$$q(u) = \int_0^u \frac{\xi + \Delta(\xi - \xi^3)}{\Delta\xi + \xi - \xi^3} d\xi. \quad (2.16)$$

で与えられる。作用素行列が可換であるので、この Cahn-Kolmogorov 方程式の初期値問題の解は、

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ q(u(t)) \end{bmatrix} = \exp\left(t \begin{bmatrix} \Delta & 1 \\ 1 & \Delta \end{bmatrix} \varphi_{CK}\right) \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ q(u_0) \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

と表される。ただし非線形写像 φ_{CK} は、

$$\varphi_{CK} \cdot \begin{bmatrix} u \\ q(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ u - u^3 \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

である。

例 4: Swift-Hohenberg 方程式
Swift-Hohenberg 方程式は

$$u_t(\mathbf{x}, t) = P_{SH}u - u^3, \quad (2.19)$$

と表される。ただし P_{SH} は

$$P_{SH} = -(1 - \Delta)^2 + \epsilon^3. \quad (2.20)$$

である。 $Q = 1$, $F(u) = u$, $G(u) = -u^3$ であるから、補助関数 $q_t(u)$ は、

$$q(u) = \int_0^u \frac{\xi - \Delta \xi^3}{\Delta \xi - \xi^3} d\xi. \quad (2.21)$$

で与えられる。作用素行列が可換であるので、この Swift-Hohenberg 方程式の初期値問題の解は、equation

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ q(u(t)) \end{bmatrix} = \exp(t \begin{bmatrix} -(1 - \Delta)^2 + \epsilon^3 & 1 \\ 1 & -(1 - \Delta)^2 + \epsilon^3 \end{bmatrix} \varphi_{SH}) \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ q(u_0) \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

と表される。ただし非線形写像 φ_{SH} は、

$$\varphi_{SH} \cdot \begin{bmatrix} u \\ q(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ -u^3 \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

である。

1.3 3つの作用素を有する準線形発展方程式

3つの作用素を有する準線形発展方程式について、考えてみよう。

$$u_t(\mathbf{x}, t) = PF(u) + QG(u) + RH(u), \quad (3.1)$$

について、考えてみよう。ただし、 P, Q, R は作用素で、 F, G, R は、非線形写像とする。2つの作用素を有する準線形発展方程式の拡張であるので、作用素行列として、巡回形の行列を導入と、上式は、

$$\begin{bmatrix} u \\ q(u) \\ r(u) \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} P & Q & R \\ R & P & Q \\ Q & R & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F(u) \\ G(u) \\ H(u) \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

の様に書き換えられる。ここで補助関数 $q(u), r(u)$ は、

$$q(u)_t = \frac{dq(u)}{du} u_t = QF(u) + PG(u) + RH(u), \quad (3.3)$$

$$r(u)_t = \frac{dr(u)}{du} u_t = RF(u) + QG(u) + PH(u), \quad (3.4)$$

であるから

$$q(u) = \int_0^u \frac{RF(\xi) + PG(\xi) + QH(\xi)}{PF(\xi) + QG(\xi) + RH(\xi)} d\xi, \quad (3.5)$$

$$r(u) = \int_0^u \frac{QF(\xi) + RG(\xi) + PH(\xi)}{PF(\xi) + QG(\xi) + RH(\xi)} d\xi. \quad (3.6)$$

となる。この方程式の初期値問題の解は、

$$\begin{bmatrix} u \\ q(u) \\ r(u) \end{bmatrix} = \exp[\tilde{M}_{P,Q,R}\varphi_3] \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ q(u_0) \\ r(u_0) \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

である。ただし、作用素行列 $M_{P,Q,R}$ と、非線形写像 φ_3 は

$$M_{P,Q,R} = \begin{bmatrix} P & Q & R \\ R & P & Q \\ Q & R & P \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

$$\phi_3 \cdot \begin{bmatrix} u \\ q(u) \\ r(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(u) \\ G(u) \\ H(u) \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

である。

1.4 連立準線形発展方程式

次の連立準線形発展方程式

$$u_t(\mathbf{x}, t) = PF(u, v), \quad (4.1)$$

$$v_t(\mathbf{x}, t) = PG(u, v), \quad (4.2)$$

について、考えてみよう。この連立準線形発展方程式は、

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_t = P\phi_2 \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

の様に書き換えられる。ただし、非線形写像 ϕ_2 は

$$\phi_2 \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(u, v) \\ G(u, v) \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

で定義する。この連立準線形発展方程式の初期値問題の解は、

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \exp[\tilde{P}\phi_2] \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

で与えられる。ここで u_0 and v_0 は、 u, v の初期値である。

例：

$$u_t(\mathbf{x}, t) = \Delta F(u, v), \quad (4.6)$$

$$v_t(\mathbf{x}, t) = \Delta G(u, v), \quad (4.7)$$

作用素 Δ が可換であるので、この連立準線形発展方程式の初期値問題の解は、

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \exp[t\Delta\phi_E] \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

で与えられる。ただし、非線形写像 ϕ_E は

$$\phi_E \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(u, v) \\ G(u, v) \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

1.5 3元連立準線形発展方程式

3元連立準線形発展方程式

$$u_t(\mathbf{x}, t) = P(\mathbf{x}, t)F(u(\mathbf{x}, t), v(\mathbf{x}, t), w(\mathbf{x}, t)), \quad (5.1)$$

$$v_t(\mathbf{x}, t) = P(\mathbf{x}, t)G(u(\mathbf{x}, t), v(\mathbf{x}, t), w(\mathbf{x}, t)), \quad (5.2)$$

$$w_t(\mathbf{x}, t) = P(\mathbf{x}, t)H(u(\mathbf{x}, t), v(\mathbf{x}, t), w(\mathbf{x}, t)), \quad (5.3)$$

について、考えてみよう。

Quasilinear evolution equations in the vector form

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}_t = P\phi_3 \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

ただし、非線形写像 ϕ_3 は

$$\phi_3 \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(u, v, w) \\ G(u, v, w) \\ H(u, v, w) \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

である。この連立準線形発展方程式の初期値問題の解は、

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{bmatrix} = \exp[\tilde{P}\phi_3] \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

と表される。

例：G. Halphen 方程式

G. Halphen 方程式は、

$$u_t + v_t = 2uv, \quad (5.7)$$

$$v_t + w_t = 2vw, \quad (5.8)$$

$$w_t + u_t = 2wu. \quad (5.9)$$

の様に表される。この連立準線形発展方程式は、

$$u_t = uv - vw + wu, \quad (5.10)$$

$$v_t = vw - wu + uv, \quad (5.11)$$

$$w_t = wu - uv + vw, \quad (5.12)$$

の様に書き換えられる。この連立準線形発展方程式の初期値問題の解は、

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{bmatrix} = \exp[t\varphi_H] \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{bmatrix}. \quad (5.13)$$

で与えられる。ただし、非線形写像 φ_H は

$$\varphi_H \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} uv - vw + wu \\ vw - wu + uv \\ wu - uv + vw \end{bmatrix}. \quad (5.14)$$

と表わされる。

今後の問題

1. 2つの作用素の積を有する準線形発展方程式の初期値問題
2. 準線形波動方程式の初期値問題
3. 2つの作用素を有する準線形波動方程式の初期値問題
4. 半線形 Laplace 方程式の境界値問題
5. Navier-Stokes 方程式の初期値問題
6. Yang-Mills 方程式の初期値問題
7. Monge-Ampère 方程式の境界値問題

がある。

参考文献

1. T. Cazenave and A. Haraux, Translated by Y. Martel *An Introduction to Semilinear Evolution Equations* (Oxford Science Publications, Oxford, 1998).
2. N. Jacobson, *Lie Algebras* (Dover Publication, Inc., New York, 1962) p. 151.
3. J. P. Serre, *Lie Algebras and Lie Groups* (Benjamin, Inc., Reading, Massachusetts, 1965).
4. J. Dixmier, *Enveloping Algebras* (North-Holland Publ. Com., New York, 1977).
5. K. Kojima, Research Reports of Faculty of Engineering, Toyo University, **34**(1998) 49.