

局所体上の帯球関数として現れる多変数 q -超幾何多項式
Multivariate q -Hypergeometric polynomials as zonal spherical
functions over a local field

京都大学大学院 理学研究科 数学・数理解析専攻

川村晃英

Kawamura Koei

Department of Mathematics, Faculty of Science, Kyoto University

要約 abstract

超幾何型・選点系の直交多項式である Krawtchouk 多項式は、対称群の輪状積 (wreath product) の帯球関数という群論的解釈を持つ (Dunkl, 1976). その一般化として、多変数 Krawtchouk 多項式は複素鏡映群上の帯球関数という解釈を持つ (Mizukawa, 2004). また q -analogue の一つである affine q -Krawtchouk 多項式についても、有限体上の行列群の帯球関数という解釈がある (Delsarte, 1978). そこで本稿では、まず Krawtchouk 多項式の新たな一般化として、 ∞ 変数 Krawtchouk 多項式、多変数 affine q -Krawtchouk 多項式、 ∞ 変数 affine q -Krawtchouk 多項式を定義する. そして、それらが全て一貫した形で、有限体および非アルキメデスの局所体に関連する群の帯球関数として捉えられることを述べる.

Krawtchouk polynomials are orthogonal polynomials which are defined by the use of the hypergeometric function. They have a group theoretic interpretation as zonal spherical functions on wreath products of symmetric groups (Dunkl, 1976). As a generalization, multivariate Krawtchouk polynomials have an interpretation as zonal spherical functions on complex reflection groups (Mizukawa, 2004). And affine q -Krawtchouk polynomials, one of q -analogues of Krawtchouk polynomials, are also zonal spherical functions on matrices over a finite field (Delsarte, 1978). In this paper we define new generalizations of Krawtchouk polynomials, that is, ∞ -variate Krawtchouk polynomials, multivariate affine q -Krawtchouk polynomials, and ∞ -variate affine q -Krawtchouk

polynomials. And we show they have also interpretations as zonal spherical functions on groups concerning finite or non-Archimedean local field.

0 本稿の目的

選点系の直交多項式である Krawtchouk 多項式は、ガウスの超幾何関数 ${}_2F_1$ を用いて次式で定義される：

定義 1. $\langle$ Krawtchouk 多項式 $\rangle$

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $x, y \in \{0, 1, \dots, n\}$, パラメータ p に対し,

$$K_y(x; p, n) = {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -x, -y \\ -n \end{matrix} ; \frac{1}{p} \right) = \sum_{k=0}^y \frac{(-x)_k (-y)_k}{(-n)_k k! p^k}. \quad (1)$$

ここで $(a)_k = \prod_{i=0}^{k-1} (a+i)$ (Pochhammer symbol). これは x を変数とする次数 y の多項式である. 直交関係式はつぎである：2項係数 $\binom{n}{x}$ を重み (weight) に用いて,

$$\sum_{x=0}^n K_y(x; p, n) K_z(x; p, n) \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \delta_{y,z} \binom{n}{y}^{-1} \frac{(1-p)^y}{p^y} \quad (2)$$

(δ は Kronecker のデルタ).

Koornwinder(1982) がこの直交多項式についての2つの群論的解釈を述べているが、そのうちの 하나가、対称群の輪状積 (wreath product) に関する帯球関数として現れる (Dunkl, 1976) というのである.

さて Krawtchouk 多項式には少なくとも2つの方向の一般化が考えられる. すなわち、1つが多変数化、もう1つが q -analogue 化である. そのいずれの文脈においても、帯球関数としての実現という観点は引き継がれている. 多変数 Krawtchouk 多項式については、Mizukawa(2004) によって、複素鏡映群上の帯球関数として実現されている. また、 q -analogue の一つである affine q -Krawtchouk 多項式は、最初に Delsarte(1978) により、有限体上の行列群に関する帯球関数として見出された.

本稿ではこの観点に注目し、これらの Krawtchouk 多項式たちの更なる一般化を定義し、それらに帯球関数としての実現を与えることを目的とする. より具体的に述べれば、まず多変数の延長として、無限変数 Krawtchouk 多項式の定義を与える. 一方、affine q -Krawtchouk 多項式に対してはその多変数版を新たに定義し、さらに無限変数版に拡張する. 帯球関数としては、有限体とその自然な拡張としての非アルキメデスの局所体を用いて、一貫した形での実現を目指す.

本稿で扱われる Krawtchouk 多項式たちの相互関係を、下表にまとめておく。なお表中で、 $\mathbb{F}$ を有限体、 F を非アルキメデスの局所体、 $\mathfrak{o}$ をその整数環、 $\mathfrak{p}$ をその極大イデアルとする。

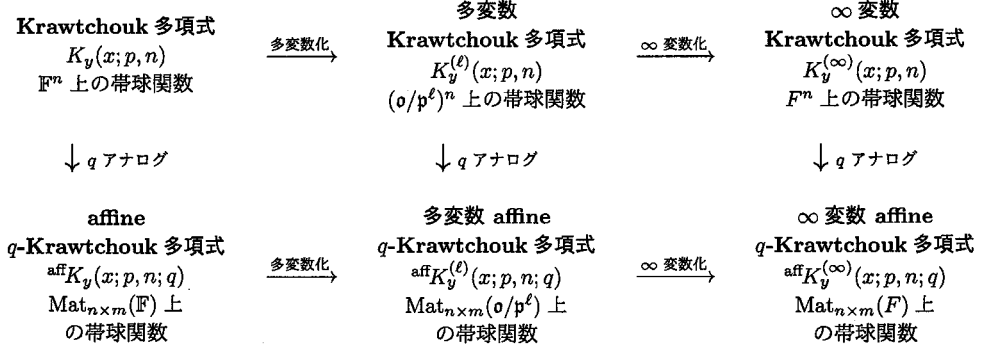


表 1: Krawtchouk 多項式たちの関係と、帯球関数としての実現

1 Krawtchouk 多項式たちの定義と基本性質

本節では、Krawtchouk 多項式 (定義 1) の一般化として、次の順に定義と基本性質 (直交性や相互関係など) を紹介してゆく: 多変数 Krawtchouk 多項式, 無限変数 Krawtchouk 多項式, affine q -Krawtchouk 多項式, 多変数 affine q -Krawtchouk 多項式, 無限変数 affine q -Krawtchouk 多項式。

多変数 Krawtchouk 多項式は、最初 Griffiths(1971) によって導入され、最近でも広く研究されている¹。 $\ell \geq 1$ とし、 ℓ 変数 $x = (x_0, x_1, \dots, x_{\ell-1})$ と $0 \leq k \leq \ell-1$ に対し、次の記号を用いる:

$$|x_k| = \sum_{i \leq k} x_i, \quad |x^k| = \sum_{i \geq k} x_i, \quad |x| = \sum_{\text{全ての } i} x_i. \quad (3)$$

変数 x および次数 $y = (y_0, y_1, \dots, y_{\ell-1})$ の動く変域として、

$$X(\ell, n) = \{x \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^\ell \mid |x| \leq n\} \quad (4)$$

と定める。これらの記号のもと、

¹ 定義は研究者により少々異なるが、簡単な置き換えや正規化で互いに移りあうものである。ここでは Xu(2015) のものを正規化し、パラメータの置き換えをした形を定義とする。

定義 2. ℓ 変数 Krawtchouk 多項式

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $x, y \in X(\ell, n)$, パラメータ $p = (p_0, p_1, \dots, p_{\ell-1})$ に対し,

$$K_y^{(\ell)}(x; p, n) = \frac{1}{(-n)_{|y|}} \prod_{i=0}^{\ell-1} (-m_i)_{y_i} K_{y_i}(x_i; p_i, m_i), \quad (5)$$

$$\text{ここで} \quad m_i = n - |x_{i-1}| - |y^{i+1}|. \quad (6)$$

これは次の直交関係式をみたす: 多項係数 $\binom{n}{x} = \frac{n!}{(n-|x|)! \prod_{i=0}^{\ell-1} x_i!}$ を重みに用いて,

$$\sum_{x \in X(\ell, n)} K_y^{(\ell)}(x; p, n) K_z^{(\ell)}(x; p, n) \binom{n}{x} \prod_{i=0}^{\ell-1} p_i^{x_i} (1-p_i)^{n-|x_i|} = \delta_{y,z} \binom{n}{y}^{-1} \prod_{i=0}^{\ell-1} \frac{(1-p_i)^{|y_i|}}{p_i^{y_i}}. \quad (7)$$

次に無限変数 Krawtchouk 多項式について述べる. 先行研究においてこれが明確に定義され, 直交関係式が記述されたことはないと思われる. 整数 $\mathbb{Z}$ を添え字集合とする無限変数 $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ に対して, $|x_k|$, $|x^k|$, $|x|$ を式 (3) と同じに定め,

$$X(n) = \{x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mid x_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, |x| = n\} \quad (8)$$

とする (このように, 無限変数とは言え, 0 でない変数は高々 n 個である). その上で,

定義 3. ∞ 変数 Krawtchouk 多項式

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $x, y \in X(n)$, パラメータ $p = (p_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ に対し,

$$K_y^{(\infty)}(x; p, n) = \frac{(-1)^n}{n!} \prod_{i \in \mathbb{Z}} (-m_i)_{y_i} K_{y_i}(x_i; p_i, m_i), \quad (9)$$

ここで m_i は式 (6) と同じとする. なお右辺の無限積は, $y_i = 0$ のときの因子が 1 とみなせるので定義できる.

∞ 変数 Krawtchouk 多項式は次の意味で, 多変数版の極限とみなせる. 無限変数 $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in X(n)$ と $\ell \geq 1$ に対し,

$$x(\ell) = (x_i)_{i=-\ell}^{\ell} \in X(2\ell+1, n) \quad (10)$$

と定める. 同様に $y(\ell)$, $p(\ell)$ も定め, 次式を考えると, ℓ が十分大のとき左辺の値は一定化し, 右辺と一致する:

$$K_{y(\ell)}^{(2\ell+1)}(x(\ell); p(\ell), n) \longrightarrow K_y^{(\infty)}(x; p, n) \quad (\ell \rightarrow \infty). \quad (11)$$

直交関係式は次のようになる：ここでは $\binom{n}{x} = \frac{n!}{\prod_{i \in \mathbb{Z}} x_i!}$ を重みに用いる。パラメータ p に対して、

$$\exists \varepsilon > 0, \forall i \in \mathbb{Z}, \varepsilon < p_i < 1 \quad (12)$$

という条件を課す。このとき、次式の左辺は絶対値収束して、右辺に一致する。

$$\begin{aligned} \sum_{x \in X(n)} K_y^{(\infty)}(x; p, n) K_z^{(\infty)}(x; p, n) \binom{n}{x} \prod_{i \in \mathbb{Z}} p_i^{x_i} \prod_{i \leq -1} (1 - p_i)^{-|x_i|} \prod_{i \geq 0} (1 - p_i)^{|x_{i+1}|} \\ = \delta_{y,z} \binom{n}{y}^{-1} \frac{\prod_{i \leq -1} (1 - p_i)^{-|y_{i-1}|} \prod_{i \geq 0} (1 - p_i)^{|y^i|}}{\prod_{i \in \mathbb{Z}} p_i^{y_i}}. \end{aligned} \quad (13)$$

次に、Krawtchouk 多項式たちの q -analogue について述べてゆく。まず 1 変数については、いくつかの q -analogue が知られているが (Koekoek ら, 2010), 我々は帯球関数として実現できるものとして, affine q -Krawtchouk 多項式を取り上げる。有限体上の行列, 交代行列, 対称行列などに関する帯球関数が, affine q -Krawtchouk 多項式を用いて記述される (Stanton, 1981 に概説がある)。定義は, q -超幾何関数 ${}_3\varphi_2$ を用いて, 次式で与えられる²。

定義 4. $\langle \text{affine } q\text{-Krawtchouk 多項式} \rangle$

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $x, y \in \{0, 1, \dots, n\}$ とパラメータ p, q に対し,

$${}^{\text{aff}}K_y(x; p, n; q) = {}_3\varphi_2 \left(\begin{matrix} q^{-x}, q^{-y}, 0 \\ q^{-n}, p \end{matrix}; q, q \right) = \sum_{k=0}^y \frac{(q^{-x}; q)_k (q^{-y}; q)_k}{(q^{-n}; q)_k (p; q)_k (q; q)_k} q^k. \quad (14)$$

ここで, $(a; q)_k = \prod_{i=0}^{k-1} (1 - aq^i)$ である。これは, 次の意味で Krawtchouk 多項式の q -analogue である:

$${}^{\text{aff}}K_y(x; p, n; q) \longrightarrow K_y(x; 1 - p, n) \quad (q \rightarrow 1). \quad (15)$$

また, 次の直交関係式をみたと: ガウスの q -2 項係数

$$\begin{bmatrix} n \\ x \end{bmatrix}_q = \frac{(q^n; q^{-1})_x}{(q; q)_x} \quad (0 \leq x \leq n) \quad (16)$$

² いくつかの流儀があるが, ここでは Stanton(1981) のものを正規化した形を採用する。

を重みに用いて,

$$\sum_{x=0}^n \text{aff}K_y(x; p, n; q) \text{aff}K_z(x; p, n; q) \begin{bmatrix} n \\ x \end{bmatrix}_q p^{n-x}(p; q)_x = \delta_{y,z} \begin{bmatrix} n \\ y \end{bmatrix}_q^{-1} \frac{p^y}{(p; q)_y}. \quad (17)$$

次に, 多変数 Krawtchouk 多項式の q -analogue を導入する. なお注意として, すでに Gasper ら (2007) により, ある種の多変数 q -Krawtchouk 多項式が定義され, Genest(2015) らにより ‘ q -rotation’ の行列要素という解釈が与えられている. しかしそれは, Koornwinder(1982) の言う Krawtchouk 多項式のもう一つの群論的解釈 ($SU(2)$ のユニタリ既約表現の行列要素) からの一般化と言え, Krawtchouk 多項式の別の q -analogue である quantum q -Krawtchouk 多項式 (Koekoek ら, 2010) の多変数化に当たると考えられる. 我々は, 帯球関数の側面からの q -analogue の構成を目指すため, affine q -Krawtchouk 多項式が多変数化を行いたい.

変数の数を $\ell \geq 1$ とし, (3) の記号および (4) の変域 $X(\ell, n)$ を踏襲して, 次のように定義する:

定義 5. ℓ 変数 affine q -Krawtchouk 多項式

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $x, y \in X(\ell, n)$ および ℓ パラメータ $p = (p_0, \dots, p_{\ell-1})$, q に対し,

$$\begin{aligned} \text{aff}K_y^{(\ell)}(x; p, n; q) & \\ &= \frac{1}{q^{N(x,y)}(q^n; q^{-1})_{|y|}} \prod_{i=0}^{\ell-1} \frac{(q^{m_i}; q^{-1})_{y_i} (p_i^{-1} q^{-n+m_i}; q^{-1})_{y_i}}{(p_i^{-1} q^{-|y^{i+1}|}; q^{-1})_{y_i}} \text{aff}K_{y_i}(x_i; p_i q^{n-m_i}, m_i; q), \end{aligned} \quad (18)$$

ここで, m_i は (6) と同一,

$$N(x, y) = \sum_{i < j} (j - i - 1) x_i y_j \quad (19)$$

とする. ただしこれは直交多項式ではなく, 双直交多項式 (biorthogonal polynomial) である. すなわち, まず次のように ‘双対’ を定義する:

$$\text{aff}\tilde{K}_y^{(\ell)}(x; p, n; q) = \text{aff}K_{x'}^{(\ell)}(y'; p', n; q), \quad (20)$$

ここで, $x' = (x_{\ell-1}, \dots, x_1, x_0)$ (逆走) とする. 他の文字・パラメータについても同様. すると, 以下のような双直交関係式 (biorthogonality relation) が成り立つ: 重みに q -多項係数

$$\begin{bmatrix} n \\ x \end{bmatrix}_q = \frac{(q^n; q^{-1})_{|x|}}{\prod_{i=0}^{\ell-1} (q; q)_{x_i}} \quad (21)$$

を用いて,

$$\begin{aligned} \sum_{x \in X(\ell, n)} \text{aff} K_y^{(\ell)}(x; p, n; q) \text{aff} \tilde{K}_z^{(\ell)}(x; p, n; q) q^{C(x)} \begin{bmatrix} n \\ x \end{bmatrix}_q \prod_{i=0}^{\ell-1} p_i^{n-|x_i|} (p_i q^{|x_{i-1}|}; q)_{x_i} \\ = \delta_{y,z} q^{-C(y)} \begin{bmatrix} n \\ y \end{bmatrix}_q^{-1} \prod_{i=0}^{\ell-1} \frac{p_i^{|y_i|}}{(p_i q^{|y^{i+1}|}; q)_{y_i}}, \end{aligned} \quad (22)$$

ここで, $C(x) = \sum_{i < j} (j - i - 1) x_i x_j + (n - |x|) \sum_{i=0}^{\ell-1} (\ell - i - 1) x_i$.

また, 多変数 affine q -Krawtchouk 多項式とその双対は, ともに多変数 Krawtchouk 多項式の直接の q -analogue である. すなわち,

$$\left. \begin{aligned} \text{aff} K_y^{(\ell)}(x; p, n; q) \\ \text{aff} \tilde{K}_y^{(\ell)}(x; p, n; q) \end{aligned} \right\} \longrightarrow K_y^{(\ell)}(x; (1 - p_i)_{i=0}^{\ell-1}, n) \quad (q \rightarrow 1) \quad (23)$$

が成り立つ.

最後に, 無限変数の affine q -Krawtchouk 多項式を構成する. 無限変数 $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ に関して (3) の記号と (8) の変域 $X(n)$ を踏襲し, 次のように定める:

定義 6. $< \infty$ 変数 affine q -Krawtchouk 多項式 $>$

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $x, y \in X(n)$, パラメータ $p = (p_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, q に対し,

$$\begin{aligned} \text{aff} K_y^{(\infty)}(x; p, n; q) \\ = \frac{1}{q^{N(x,y)}(q; q)_n} \prod_{i \in \mathbb{Z}} \frac{(q^{m_i}; q^{-1})_{y_i} (p_i^{-1} q^{-n+m_i}; q^{-1})_{y_i}}{(p_i^{-1} q^{-|y^{i+1}|}; q^{-1})_{y_i}} \text{aff} K_{y_i}(x_i; p_i q^{n-m_i}, m_i; q), \end{aligned} \quad (24)$$

ここで, m_i は (6) と同一, $N(x, y)$ は (19) と同一とする (右辺の無限積は, やはり $y_i = 0$ のとき因子が 1 とみなせるので定義できる).

(11) と同様に, ∞ 変数 affine q -Krawtchouk 多項式は, 多変数版の極限である. すなわち (10) の記号 $x(\ell)$ を用いて, 次の成り立つ.

$$\text{aff} K_{y(\ell)}^{(2\ell+1)}(x(\ell); p(\ell), n; q) \longrightarrow \text{aff} K_y^{(\infty)}(x; p, n; q) \quad (\ell \rightarrow \infty). \quad (25)$$

この関数も双直交性を持つ. まず ‘双対’ を,

$$\text{aff} \tilde{K}_y^{(\infty)}(x; p, n; q) = \text{aff} K_{x'}^{(\infty)}(y'; p', n; q), \quad (26)$$

ここで $x' = (x_{-i})_{i \in \mathbb{Z}}$, と定義する. 双直交関係式の重みには,

$$\begin{bmatrix} n \\ x \end{bmatrix}_q = \frac{(q; q)_n}{\prod_{i \in \mathbb{Z}} (q; q)_{x_i}} \quad (27)$$

を用い, パラメータ p に次の条件を仮定する:

$$\exists \varepsilon > 0, \forall i \in \mathbb{Z}, 0 < p_i < 1 - \varepsilon. \quad (28)$$

このとき, 次式の左辺は絶対値収束して, 右辺に一致する:

$$\begin{aligned} \sum_{x \in X(n)} \text{aff} K_y^{(\infty)}(x; p, n; q) \text{aff} \tilde{K}_z^{(\infty)}(x; p, n; q) q^{C(x)} \begin{bmatrix} n \\ x \end{bmatrix}_q \prod_{i \leq -1} p_i^{-|x_i|} \prod_{i \geq 0} p_i^{|x_i+1|} \prod_{i \in \mathbb{Z}} (p_i q^{|x_i-1|}; q)_{x_i} \\ = \delta_{y,z} q^{-C(y)} \begin{bmatrix} n \\ y \end{bmatrix}_q^{-1} \frac{\prod_{i \leq -1} p_i^{-|y_i-1|} \prod_{i \geq 0} p_i^{|y_i|}}{\prod_{i \in \mathbb{Z}} (p_i q^{|y_i+1|}; q)_{y_i}}, \end{aligned} \quad (29)$$

ここで $C(x) = N(x, x)$ (式 (19)).

また, ∞ 変数 affine q -Krawtchouk 多項式とその双対とともに, 先に定義した ∞ 変数 Krawtchouk 多項式の直接の q -analogue となっている. すなわち,

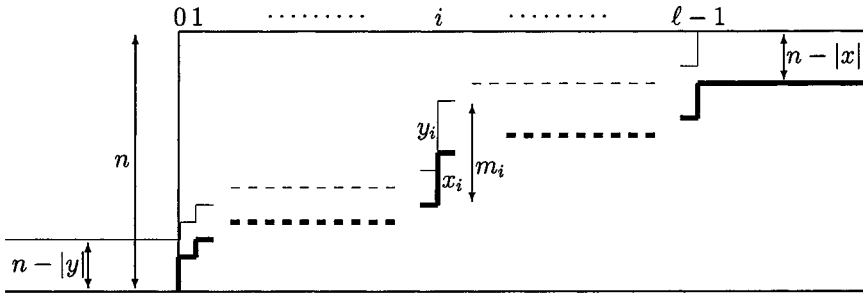
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{aff} K_y^{(\infty)}(x; p, n; q) \\ \text{aff} \tilde{K}_y^{(\infty)}(x; p, n; q) \end{array} \right\} \longrightarrow K_y^{(\infty)}(x; (1 - p_i)_{i \in \mathbb{Z}}, n) \quad (q \rightarrow 1). \quad (30)$$

以上で今回扱うすべての Krawtchouk 多項式が出揃った. なお, 多変数, 無限変数については, それぞれ多パラメータ, 無限パラメータを持つ形で定義したが, 次節以降で帯球関数として実現されるのは, 1パラメータ化した場合 (すなわち, 複数のパラメータに同一の値を代入したもの) である. 特に q -analogue 版については, 1パラメータ化をした場合, 双対が自分自身と等しくなる. すなわち,

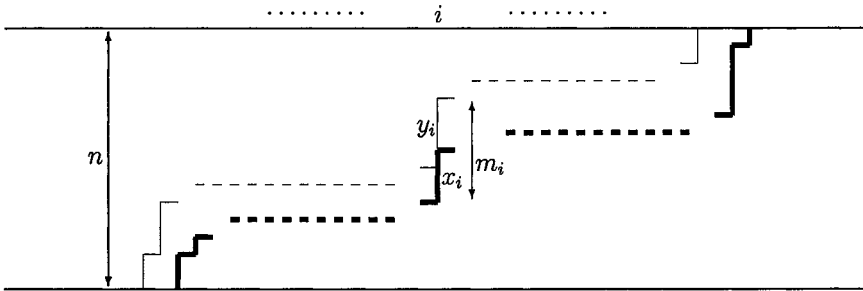
$$p_i = p_j \ (\forall i, j) \text{ のとき, } \begin{cases} \text{aff} K_y^{(\ell)}(x; p, n; q) = \text{aff} \tilde{K}_y^{(\ell)}(x; p, n; q) \\ \text{aff} K_y^{(\infty)}(x; p, n; q) = \text{aff} \tilde{K}_y^{(\infty)}(x; p, n; q) \end{cases} \quad (31)$$

が成り立つ. よって特に, これらは直交多項式となる.

ここで, 多変数および無限変数の x と次数 y の関係を表す図形を紹介しよう. まず ℓ 変数の場合, $x, y \in X(\ell, n)$ は次のように図示できる:



この図は分割のヤング図形に似ている。正確には、 x の方は非負整数値に加えて値 ∞ も取ることとして、 $(0^{x_0}, 1^{x_1}, \dots, (l-1)^{x_{l-1}}, \infty^{n-|x|})$ という「分割」に対応するヤング図形とみなせる（ここで i^{x_i} という表記は、値 i の重複度が x_i であることを表す）。同様に y の方は値 $-\infty$ を加えて、 $((-\infty)^{n-|y|}, 0^{y_0}, 1^{y_1}, \dots, (l-1)^{y_{l-1}})$ という「分割」に対応するヤング図形とみなせる。次に無限変数 $x, y \in X(n)$ の場合は、(合計が n なので) ∞ や $-\infty$ を取ることはなく、しかし今度は負の値を取ることを認めた「分割」 $(i^{x_i})_{i \in \mathbb{Z}}$ に対応するヤング図形で表せる。



このような図示の利点の一つは、多変数か無限変数か、ノーマル版か q -analogue 版かに関わらず、「 y の図形が x の図形にふくまれること」と、「Krawtchouk 多項式の値が0でないこと」とが同値となることである。もう一つの利点として、定義に共通して現れる m_i (式(6)) が表示できることがある。これらの図形は、次節以降で帯球関数としての実現を考える際、関連する群作用の軌道との対応で自然に現れるものである。

以上、定義と性質を羅列してきたが、それらの証明は本稿では省略する。現在執筆中の論文を待たれたい。特に直交・双直交関係式(13),(22),(29)の証明は、帰納法を用いた計算によるものである((2),(7),(17)については先行研究において様々の方法が知られているが)。

2 局所コンパクト可換群上の帯球関数

本節では、前節で紹介した Krawtchouk 多項式たちの実現に必要な範囲で、帯球関数の定義を行う。\$A\$ を局所コンパクト可換群とし、コンパクト群 \$G\$ が群自己同型かつ連続に作用するとする。我々の定義する帯球関数は、この作用に関するものであり、正確には Gelfand 対 \$(A \rtimes G, G)\$ の帯球関数と呼ぶべきものである (Mac, 1995, sec.VII 参照)。なお \$A\$ は有限群でもよいとする。実際、有限変数の Krawtchouk 多項式 (およびその \$q\$-analogue) を実現するには有限の設定で足りるが、無限変数へ拡張するために、より広く局所コンパクトの設定を要する。\$A\$ の Haar 測度 \$\mu\$ を取っておく (有限の場合は数え上げ測度)。

\$\mathbb{G} = A \rtimes G\$ とおく。いま、\$\mathbb{G}\$ の任意の既約ユニタリ表現は、\$G\$ 不変部分空間を高々 1 次元しか持たないことが示せる (このことを、対 \$(\mathbb{G}, G)\$ が Gelfand 対であるという)。そこで、\$\mathbb{G}\$ の既約ユニタリ表現で、実際に 1 次元の \$G\$ 不変部分空間を持つものを、対 \$(\mathbb{G}, G)\$ の球表現という。一方、\$\mathbb{G}\$ の等質空間 \$A \cong \mathbb{G}/G\$ への作用に関する置換表現として、ユニタリ表現 \$L^2(A)\$ が定まる。\$(\mathbb{G}, G)\$ の球表現のうち、\$L^2(A)\$ の部分表現とユニタリ同値になるものを、2 乗可積分球表現 (これは本稿だけの用語) と呼ぶ。

ここで、\$\hat{A}\$ を \$A\$ の双対群、すなわち \$A\$ からトーラス \$\mathbb{T} \subset \mathbb{C}^\times\$ への連続な群準同型の全体とする。ここにはコンパクト-開位相を入れることで、やはり局所コンパクト可換群になることが知られている。また、\$G\$ は \$\hat{A}\$ に対しても反傾作用で働く。このとき、\$\hat{A}\$ における開 \$G\$ 軌道の全体を \$\Omega\$ とおくと、

命題 1. \$\mathcal{P} \in \Omega\$ ごとに 2 乗可積分球表現 \$V_{\mathcal{P}} \subset L^2(A)\$ が次のように構成できる: \$\xi \in \mathcal{P}\$ を任意に固定し、\$b \in A\$ ごとに \$A\$ 上連続な関数 \$\gamma_b^{\mathcal{P}} \in L^2(A)\$ を、

$$\gamma_b^{\mathcal{P}}(a) = \int_G \xi(g(a-b)) dg \quad (a \in A) \quad (32)$$

で定める (\$dg\$ は全測度が 1 となるよう正規化した \$G\$ の Haar 測度)。そして \$V_{\mathcal{P}} = \overline{\{\gamma_b^{\mathcal{P}} \mid b \in A\}}\$ (\$L^2(A)\$ における閉包) と定める。

では帯球関数の定義を述べる。ただし、一般には球表現ごとに帯球関数が定まるが、我々は命題 1 の 2 乗可積分球表現 \$V_{\mathcal{P}}\$ に関する帯球関数のみを定める。

定義 7. \$\mathcal{P} \in \Omega\$ に対し、式 (32) の記号を用いて、\$\omega_{\mathcal{P}} = \gamma_0^{\mathcal{P}}\$ とおく。すなわち、

$$\omega_{\mathcal{P}}(a) = \int_G \xi(g(a)) dg \quad (a \in A, \xi \in \mathcal{P}). \quad (33)$$

これを球表現 \$V_{\mathcal{P}}\$ に付随する帯球関数と呼ぶ。これは次のような関数として特徴づける

ことができる： A 上の G 不変な関数で、 $V_{\mathcal{P}}$ に属し、かつ $\omega_{\mathcal{P}}(0) = 1$ をみたすただ一つのもの。

次に、 A 上のフーリエ変換について説明し、帯球関数との関係について述べる。 μ の双対測度と呼ばれる $\hat{A}$ の Haar 測度 $\hat{\mu}$ が取れて、適当な関数空間においてフーリエ変換と逆変換が定まる。すなわち、

定義 8. $\varphi \in L^1(A)$ に対して、そのフーリエ変換 $\mathcal{F}\varphi \in C(\hat{A})$ ($\hat{A}$ 上連続関数) が次式で定まる：

$$\mathcal{F}\varphi(\xi) = \int_A \varphi(a) \overline{\xi(a)} d\mu(a) \quad (\xi \in \hat{A}). \quad (34)$$

また、 $\psi \in L^1(\hat{A})$ に対して、その逆フーリエ変換 $\bar{\mathcal{F}}\psi \in C(A)$ が次式で定まる：

$$\bar{\mathcal{F}}\psi(a) = \int_{\hat{A}} \psi(\xi) \xi(a) d\hat{\mu}(\xi) \quad (a \in A). \quad (35)$$

特に $\varphi \in L^1(A)$ かつ $\mathcal{F}\varphi \in L^1(\hat{A})$ のとき、 $\bar{\mathcal{F}}\mathcal{F}\varphi = \varphi$ が成り立つ。

ここで、フーリエ変換 $\mathcal{F}: L^1(A) \rightarrow C(\hat{A})$ は G 作用と可換となる。したがって、 G -不変関数の間の変換 $\mathcal{F}: L^1(A)^G \rightarrow C(\hat{A})^G$ とみなすこともできる。逆フーリエ変換も同様である。このように見たとき、帯球関数はこの変換の積分核として現れる。すなわち、次が成り立つ：

命題 2. $\varphi \in L^1(A)^G$, $\mathcal{P} \in \Omega$ に対し、

$$\mathcal{F}\varphi(\mathcal{P}) = \int_A \varphi(a) \overline{\omega_{\mathcal{P}}(a)} d\mu(a). \quad (36)$$

次に帯球関数の直交性について述べる。これは Krawtchouk 多項式の直交性（前節）に直接、関係する：

命題 3. 2乗可積分球表現 $V_{\mathcal{P}}$ どうしは、 $L^2(A)$ において互いに直交する。特に、帯球関数どうしも直交し、次が成り立つ：

$$(\omega_{\mathcal{P}}, \omega_{\mathcal{P}'})_{L^2(A)} = \delta_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'} \frac{1}{\hat{\mu}(\mathcal{P})} \quad (\mathcal{P}, \mathcal{P}' \in \Omega). \quad (37)$$

最後に我々の帯球関数の、調和解析的な側面を述べておく。なお仮定 (38) は、次節で扱う我々の例では全てみたされる。

命題 4. Ω に属する軌道が $\hat{A}$ のほとんど至るところを占めている、すなわち

$$\hat{\mu} \left(\hat{A} \setminus \bigcup_{\mathcal{P} \in \Omega} \mathcal{P} \right) = 0 \quad (38)$$

と仮定する. すると, $\{\omega_{\mathcal{P}} \mid \mathcal{P} \in \Omega\}$ は Hilbert 空間 $L^2(A)^G$ の完全正規直交系をなす.

3 Krawtchouk 多項式たちの帯球関数としての実現

本節では, 前節の設定におけるアーベル群 A やコンパクト群 G として, 有限体および非アルキメデスの局所体に関する適当な群を取り, そのときの帯球関数として第 1 節で定めた Krawtchouk 多項式たちが実現できることを述べる.

本節を通じて, $\mathbb{F}$ を位数 q の有限体とする. また, F を非アルキメデスの局所体, $v: F \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ をその上の離散付値とする. (加法群としての) F の双対群 $\widehat{F}$ の上には, 双対付値 $r: \widehat{F} \rightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{Z}$ が次式で定まる:

$$r(\xi) = \max\{v(a) \mid a \in F, \xi(a) \neq 1\}, \quad \text{但し } r(1) = -\infty. \quad (39)$$

$\mathfrak{o} = \{a \in F \mid v(a) \geq 0\}$ を F の整数環, $\mathfrak{p} = \{a \in F \mid v(a) \geq 1\}$ を $\mathfrak{o}$ の極大イデアルとする. 剰余体 $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ は有限体なので, $\mathbb{F}$ と同定する. また, $\ell \geq 1$ に対して剰余環 $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^\ell$ を R_ℓ と表す. これは位数 q^ℓ の有限環である.

まず序説で述べたように, (オリジナル版の) Krawtchouk 多項式は対称群の輪状積の帯球関数として知られているが, その解釈では前節の定義には収まらない. そこで, 有限体を用いた別解釈を紹介する (川村, 2014):

例 1. $A = \mathbb{F}^n$, $G = (\mathbb{F}^\times)^n \rtimes \mathfrak{S}_n$ とする ($\mathbb{F}^\times$ は $\mathbb{F}$ の乗法群, $\mathfrak{S}_n$ は n 次対称群). G の A への作用は次式で与えられる:

$$(\lambda, \sigma)a = (\lambda_1 a_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, \lambda_n a_{\sigma^{-1}(n)}), \quad \sigma \in \mathfrak{S}_n, \lambda = (\lambda_k)_{k=1}^n \in (\mathbb{F}^\times)^n, a = (a_k)_{k=1}^n \in \mathbb{F}^n. \quad (40)$$

このとき, A の G 軌道はその元の 0 でない成分の数で特徴づけられる. すなわち $0 \leq x \leq n$ に対し, 軌道

$$\mathcal{O}(x) = \left\{ (a_k)_{k=1}^n \in \mathbb{F}^n \mid \#\{k \mid a_k \neq 0\} = x \right\} \quad (41)$$

が定まる. 一方, 指標群 $\widehat{\mathbb{F}^n}$ は直積 $(\widehat{\mathbb{F}})^n$ と自然に同一視した上で, $0 \leq y \leq n$ に対し, 軌道

$$\mathcal{P}(y) = \left\{ (\xi_k)_{k=1}^n \in (\widehat{\mathbb{F}})^n \mid \#\{k \mid \xi_k \neq 1\} = y \right\} \quad (42)$$

が定まる. このとき軌道 $\mathcal{P}(y)$ に付随する帯球関数の軌道 $\mathcal{O}(x)$ での値 $\omega_y(x)$ が, 次の

ように Krawtchouk 多項式となる :

$$\omega_y(x) = K_y(x; \frac{q-1}{q}, n). \quad (43)$$

なお, 命題 37 で与えられる帯球関数の直交性は, Krawtchouk 多項式の直交性 (2) を導く.

次に多変数 Krawtchouk 多項式は, 複素鏡映群の帯球関数として実現されていたが, これもその解釈では前節の定義に収まらないので, 別解釈を述べよう :

例 2. $A = (\mathbb{R}_\ell)^n$, $G = (\mathfrak{o}^\times)^n \rtimes \mathfrak{S}_n$ とする ($\mathfrak{o}^\times$ は $\mathfrak{o}$ の乗法群). これは例 1 の有限体 $\mathbb{F}$ を有限環 R_ℓ に取り替えた例である. 作用は (40) と同様である.

F 上の付値 v より, R_ℓ 上の付値 $v: R_\ell \rightarrow \{0, \dots, \ell-1\} \cup \{\infty\}$ が誘導され, $\mathfrak{o}^\times$ の作用がこの値を変えないことより, A の G 軌道は次のようになる: $x \in X(\ell, n)$ に対して,

$$\mathcal{O}(x) = \{(a_k)_{k=1}^n \in A \mid 0 \leq \forall i \leq \ell-1, \#\{k \mid v(a_k) = i\} = x_i\}. \quad (44)$$

なお, $(a_k) \in \mathcal{O}(x)$ に対して, $\{v(a_k) \mid 1 \leq k \leq n\}$ を大きい順に並べ替えた「分割」のヤング図形が, ちょうど第 1 節で紹介した x の図形に当たる. 一方, $\widehat{F}$ 上の双対付値 r (39) から, $r: \widehat{R}_\ell \rightarrow \{-\infty\} \cup \{0, \dots, \ell-1\}$ が誘導され, これを用いて $\widehat{A}$ の G 軌道は次のようになる: $y \in X(\ell, n)$ に対して,

$$\mathcal{P}(y) = \{(\xi_k)_{k=1}^n \in \widehat{A} = (\widehat{R}_\ell)^n \mid 0 \leq \forall i \leq \ell-1, \#\{k \mid r(\xi_k) = i\} = y_i\}. \quad (45)$$

やはり $(\xi_k) \in \mathcal{P}(y)$ に対して, $\{r(\xi_k) \mid 1 \leq k \leq n\}$ を並べ替えた「分割」のヤング図形が, 第 1 節で紹介した y の図形である. 本例における帯球関数は, 多変数 Krawtchouk 多項式を用いて, 次のように書ける: 軌道 $\mathcal{P}(y)$ に付随する帯球関数の軌道 $\mathcal{O}(x)$ における値 $\omega_y(x)$ について,

$$\omega_y(x) = K_y^{(\ell)}(x; \frac{q-1}{q}, n). \quad (46)$$

以下, 少し長くなるが, この計算の仕方を述べておく. フーリエ変換を利用する. 今 A は有限なので測度は数え上げで, A 上 G 不変関数 $\varphi \in \mathbb{C}[A]^G$ のフーリエ変換 (36) は次のようになる :

$$\mathcal{F}\varphi(y) = \sum_{x \in X(\ell, n)} \varphi(x) \overline{\omega_y(x)} |\mathcal{O}(x)| \quad (y \in X(\ell, n)). \quad (47)$$

軌道 $\mathcal{O}(x)$, $\mathcal{P}(y)$ に対し, その A , $\widehat{A}$ 上の定義関数をそれぞれ χ_x , χ_y と書くとする, $\mathbb{C}[A]^G$, $\mathbb{C}[\widehat{A}]^G$ の $\mathbb{C}$ 上基底として $\mathcal{B} = \{\chi_x \mid x \in X(\ell, n)\}$, $\widehat{\mathcal{B}} = \{\chi_y \mid y \in X(\ell, n)\}$ がそ

れぞれ取れる. $B, \widehat{B}$ のもと (47) の $\mathcal{F}: \mathbb{C}[A]^G \rightarrow \mathbb{C}[\widehat{A}]^G$ を行列表示すると,

$$\Phi = \left(\overline{\omega_y(x)} |\mathcal{O}(x)| \right)_{y, x \in X(\ell, n)} \quad (48)$$

である. また, 逆フーリエ変換 $\bar{\mathcal{F}}: \mathbb{C}[\widehat{A}]^G \rightarrow \mathbb{C}[A]^G$ の行列は (双対測度が, 数え上げ $\times \frac{1}{|A|}$ であることに注意して), $\frac{1}{|A|} \bar{\Phi}$ (バーは複素共役) となることがわかる.

以下, $A = (R_\ell)^n$ のサイズ n を意識するために, $A_n = (R_\ell)^n$ と表す. それに伴って, $\mathcal{O}_n(x) = \mathcal{O}(x)$, $\mathcal{P}_n(y) = \mathcal{P}(y)$, $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}$ などと表す. $\pi: A_n \rightarrow A_{n-1}$, $(a_k)_{k=1}^n \mapsto (a_k)_{k=1}^{n-1}$ (射影) とする. $\theta \in \widehat{R_\ell}$ で $r(\theta) = \ell - 1$ なるものを固定し, $\zeta \in \widehat{A_n}$, $(a_k)_{k=1}^n \mapsto \theta(a_n)$ とおく. $\pi_*: \mathbb{C}[A_n]^{G_n} \rightarrow \mathbb{C}[A_{n-1}]^{G_{n-1}}$ を

$$\pi_* \varphi(b) = \sum_{a \in \pi^{-1}(b)} \varphi(a) \overline{\zeta(a)} \quad (\varphi \in \mathbb{C}[A_n]^{G_n}, b \in A_{n-1}) \quad (49)$$

と定める. また, $\widehat{\pi}: \widehat{A_{n-1}} \rightarrow \widehat{A_n}$ を

$$\widehat{\pi} \xi = (\xi \circ \pi) \cdot \zeta \quad (\xi \in \widehat{A_{n-1}}), \quad (50)$$

とおき, $\widehat{\pi}^*: \mathbb{C}[\widehat{A_n}]^{G_n} \rightarrow \mathbb{C}[\widehat{A_{n-1}}]^{G_{n-1}}$ を

$$\widehat{\pi}^* \psi = \psi \circ \widehat{\pi} \quad (\psi \in \mathbb{C}[\widehat{A}]^G) \quad (51)$$

で定める. このとき, 下の可換図式を得る:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[A_n]^{G_n} & \xrightarrow{\mathcal{F}_n} & \mathbb{C}[\widehat{A_n}]^{G_n} \\ \pi_* \downarrow & \circ & \downarrow \widehat{\pi}^* \\ \mathbb{C}[A_{n-1}]^{G_{n-1}} & \xrightarrow{\mathcal{F}_{n-1}} & \mathbb{C}[\widehat{A_{n-1}}]^{G_{n-1}} \end{array} \quad (52)$$

π_* を基底 B_n, B_{n-1} のもとで表す行列を $E = (E(u, x))_{u \in X(\ell, n-1), x \in X(\ell, n)}$, $\widehat{\pi}^*$ を基底 $\widehat{B_n}, \widehat{B_{n-1}}$ のもとで表す行列を $\Delta = (\Delta(v, y))_{v \in X(\ell, n-1), y \in X(\ell, n)}$ とおく. これらは比較的容易に計算できて,

$$E(u, x) = \begin{cases} 1 & (x = u) \\ -1 & (x = u + e_{\ell-1}) \\ 0 & (\text{それ以外の } x) \end{cases} \quad (53)$$

$$\Delta(v, y) = \begin{cases} 1 & (y = v + e_{\ell-1}) \\ 0 & (\text{それ以外の } y) \end{cases} \quad (54)$$

となる. ここで, $u + e_{\ell-1} = (u_0, \dots, u_{\ell-2}, u_{\ell-1} + 1)$ とする. 可換図式より $\pi_* \circ \bar{f}_n = \bar{f}_{n-1} \circ \bar{\pi}^*$, すなわち $\frac{1}{|A_n|} E \Phi_n = \frac{1}{|A_{n-1}|} \Phi_{n-1} \Delta$ なので, 次の漸化式を得る:

$$\Phi_n(u + e_{\ell-1}, y) - \Phi_n(u, y) = -q^\ell \Phi_{n-1}(u, y - e_{\ell-1}) \quad (u \in X(\ell, n-1), y \in X(\ell, n)). \quad (55)$$

また, 初期値として, 次式を用いる:

$$\Phi_n((u', 0), (y', s)) = (q-1)^s q^{(\ell-1)s} \binom{n}{s} \Phi_{n-s}(u', y') \quad (u' \in X(\ell-1, n-1), y' \in X(\ell-1, n)).$$

この漸化式を解くことで,

$$\Phi_n(u, y) = (q-1)^{y_{\ell-1}} q^{(\ell-1)y_{\ell-1}} \binom{n}{y_{\ell-1}} \cdot K(u_{\ell-1}; \frac{q-1}{q}, n) \cdot \Phi_{n-y_{\ell-1}}(u', y') \quad (56)$$

を得る. ここで u' は u から $u_{\ell-1}$ を除いた $\ell-1$ 変数. y' も同様. つまり変数の数が下がっているので, 帰納法を用いて, $\Phi_n(u, y)$ は *Krawtchouk* 多項式の積に分解する. あとは係数部分を整理することで, 多変数 *Krawtchouk* 多項式としての表示 (46) が得られる.

なお, 命題 37 で与えられる帯球関数の直交性は, 1 パラメータの時の多変数 *Krawtchouk* 多項式の直交性 (7) を導くが, 多パラメータの場合の直交関係式は導けないように思われる.

次に無限変数 *Krawtchouk* 多項式の帯球関数としての実現を行う:

例 3. $A = F^n$, $G = (\mathfrak{o}^\times)^n \rtimes \mathfrak{S}_n$.

これは例 1 の有限体 F , 例 2 の有限環 $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^l$ を局所体 F に取り替えた例である. 作用は例 1, 2 と同様である. A の G 軌道は例 2 同様, 成分の付値の配分によって決まるが, 成分に 0 (付値 ∞) を含むような軌道は測度 0 であり, 開軌道でないので考えない (前節参照). それらを除く軌道は全て開であり, $x \in X(n)$ に対して,

$$\mathcal{O}(x) = \{(a_k)_{k=1}^n \in A \mid \forall i \in \mathbb{Z}, \#\{k \mid v(a_k) = i\} = x_i\} \quad (57)$$

で与えられる. $\hat{A}$ の開 G 軌道も同様に, $y \in X(n)$ に対して, 次で与えられる:

$$\mathcal{P}(y) = \{(\xi_k)_{k=1}^n \in \hat{A} \mid \forall i \in \mathbb{Z}, \#\{k \mid r(\xi_k) = i\} = y_i\}. \quad (58)$$

帯球関数は、 ∞ 変数 Krawtchouk 多項式を用いて次のようになる：

$$\omega_y(x) = K_y^{(\infty)}(x; \frac{q-1}{q}, n). \quad (59)$$

これを求めるためには、例 2 の結果と、次の命題により帯球関数の制限が一致することを用いればよい：

命題 5. A, B を局所コンパクト可換群とし、ともにコンパクト群 G の連続・群自己同型な作用を持つとする。それぞれの帯球関数を $\omega^{(A)}, \omega^{(B)}$ で表す。 $\varphi: A \rightarrow B$ を連続・群準同型で、 G 作用と可換なものとする。このとき、 $\hat{\varphi}: \hat{B} \rightarrow \hat{A}, \xi \mapsto \xi \circ \varphi$ とおくと、

$$\omega_{\mathcal{P}}^{(B)} \circ \varphi = \omega_{\hat{\varphi}(\mathcal{P})}^{(A)} \quad (\mathcal{P} \in \Omega^{(B)}) \quad (60)$$

が成り立つ。

残りは、affine q -Krawtchouk 多項式の帯球関数としての実現である。まず 1 変数の場合は、Delsarte(1978) が求めた通りの結果である：

例 4. $A = \text{Mat}_{n,m}(\mathbb{F})$ (有限体上の $n \times m$ 行列全体のなす加法群)， $G = \text{GL}_n(\mathbb{F}) \times \text{GL}_m(\mathbb{F})$ ($n \leq m$)。

A への G 作用は両側からの行列の積で与えられ、その軌道は行列のランク (0 から n の整数) で特徴づけられる。 $\hat{A}$ の G 軌道も、 A との適当な同一視のもと、0 から n の整数で表される。この場合の帯球関数は次である：

$$\omega_y(x) = {}^{\text{aff}}K_y(x, q^{-m}, n; q) \quad (x, y \in \{0, 1, \dots, n\}). \quad (61)$$

次に多変数 affine q -Krawtchouk 多項式に関する例である。

例 5. $A = \text{Mat}_{n,m}(R_\ell)$, $G = \text{GL}_n(\mathfrak{o}) \times \text{GL}_m(\mathfrak{o})$ ($n \leq m$)。

作用は例 4 同様、行列の両側からの積である。 A の G 軌道は、単項イデアル整域 $\mathfrak{o}$ 上の単因子の理論によって行われ、各軌道は、単因子の付値の配分によって決まる。すなわち軌道全体は $X(\ell, n)$ でパラメトライズされ、軌道 $\mathcal{O}(x)$, $x \in X(\ell, n)$ は代表元として次のような元を持つ：

$$\begin{pmatrix} a_1 & \dots & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{n,m}(R_\ell), \quad \#\{k \mid v(a_k) = i\} = x_i \quad (0 \leq \forall i \leq \ell - 1). \quad (62)$$

一方、双対群 $\hat{A}$ の G 軌道は、 $\hat{A}$ を $\widehat{R_\ell}$ の nm 個の直積と同一視したうえで、対角成分以外が全て単位指標であるような代表元の、対角成分の双対付値の配分によって決まる。よって軌道全体は、やはり $X(\ell, n)$ によってパラメトライズされる。

このとき、軌道 $\mathcal{P}(y) \subset \widehat{A}$ に関する帯球関数の、軌道 $\mathcal{O}(x) \subset A$ での値が次となる：

$$\omega_y(x) = {}^{\text{aff}}K_y^{(\ell)}(x; q^{-m}, n; q). \quad (63)$$

この計算は、いくぶん煩雑にはなるものの、例2と同様の方法で行える。すなわち、フーリエ変換の可換図式(52)を用いて、(55)に相当する漸化式を求めて、それを解く。ここでは詳細は略する。

最後に、無限変数 affine q -Krawtchouk 多項式の例である。

例 6. $A = \text{Mat}_{n,m}(F)$, $G = \text{GL}_n(\mathfrak{o}) \times \text{GL}_m(\mathfrak{o})$ ($n \leq m$).

詳細は略す。軌道分解は例5から類推がつくであろう。帯球関数は、例5の結果と命題5を用いて、次のように求まる：

$$\omega_y(x) = {}^{\text{aff}}K_y^{(\infty)}(x; q^{-m}, n; q), \quad x, y \in X(n). \quad (64)$$

謝辞

研究会「表現論と非可換調和解析をめぐる諸問題」のお世話をしていただき、講演の機会を与えてくださった青木茂先生に、この場を借りて御礼申し上げます。

引用・参考文献

R. C. Griffiths(1971), *Orthogonal polynomials on the multinomial distribution*, Austral. J. Statist, **13**, 27-35.

C.F. Dunkl(1976), *A Krawtchouk Polynomial Addition Theorem and Wreath Product of Symmetric Groups*, Indiana Univ. Math. J., **25**, 335-358.

Ph. Delsarte(1978), *Bilinear Forms over a Finite Field, with Applications to Coding Theory*, J. Comb. Theory, Series A **25**, 226-241.

D. Stanton(1981), *Three Addition Theorems for some q -Krawtchouk Polynomials*, Geom. Dedicata, **10** 403-425.

T.H. Koornwinder (1982), *Krawtchouk Polynomials, a Unification of Two Different Group Theoretic Interpretations*, S.I.A.M. J. Math. Anal., **13**, 1011-1023.

I.G. Macdonald(1995), *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, 2nd. ed. , Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press.

G. B. Folland(1995), *A Course in Abstract Harmonic Analysis*, CRC Press **43**, Boca Raton Ann Arbor, London, Tokyo.

G. Gasper and M. Rahman(2004), *Some Systems of multivariate orthogonal q -Racah polynomials*, Ramanujan journal, **13**, 389-405.

H. Mizukawa(2004), *Zonal Spherical Functions on the Complex Reflection groups and $(m+1, n+1)$ -hypergeometric functions*, Adv. Math. **184**, 1-17.

R. Koekoek, P.A. Lesky and R.F. Awarttouw (2010), *Hypergeometric Orthogonal Polynomials and Their q -Analogues*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

川村晃英 (2014), 「有限体上の群不変フーリエ変換と q -超幾何型多項式」, 2014 年度表現論シンポジウム報告集.

V.X.Genest, S. Post, and L. Vinet(2015), *An algebraic intepretation of the multivariate q -Krawtchouk polynomials*, on press.

Y.Xu(2015), *Hahn, Jacobi, and Krawtchouk Polynomials of Several Variabls*, Journal of Approximation Theory, **195**, 19-42.