

GL(2) の保型形式の正規周期

杉山 真吾 (大阪大学)

1. INTRODUCTION

F を有限次代数体とし、そのアデール環を $\mathbb{A}$ とする。このノートでは、 $GL(2, \mathbb{A})$ 上の関数の正規周期の定義と、カスプ形式とアイゼンシュタイン級数の正規周期の明示式について述べる。保型形式の周期は積分で定義されるが、その積分が収束しない場合にも周期を定義できるように周期を正規化することで相対跡公式への応用がある。ここでは都築 [9] によって導入された正規周期を扱う。

2. DEFINITION OF TSUZUKI'S REGULARIZED PERIODS

代数体 F の素点全体を Σ_F 、無限素点全体を Σ_∞ 、有限素点全体を Σ_{fin} とする。 $G = GL(2)$ とし、代数群の左下に環を書くことで有理点全体を表すことにする (例えば $G_{\mathbb{A}} = GL(2, \mathbb{A})$, $G_F = GL(2, F)$ など)。正規周期を定義するために、まず関数空間を導入する。

$C > 0$ に対して $\mathcal{B}(C)$ を、 $D_C := \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Re}(z)| < C\}$ 上の正則関数 β で次の条件を満たすものの全体とする:

- (1) $\beta(z) = \beta(-z)$ 、
- (2) 不等式

$$|\beta(\sigma + it)| \prec (1 + |t|)^{-l}, \quad \sigma \in [a, b]$$

が任意の $[a, b] \subset (-C, C)$ と任意の $l > 0$ に対して成立する。

$\mathcal{B}$ を、 $\mathbb{C}$ 上の整関数 β で、任意の $C > 0$ に対して β の D_C への制限が $\mathcal{B}(C)$ に属するものの全体とする。

次に $\beta \in \mathcal{B}$, $t > 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して次のような積分を考える:

$$\hat{\beta}_\lambda(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{\beta(z)}{z + \lambda} t^z dz, \quad (\sigma > -\operatorname{Re}(\lambda)).$$

さらに関数 $\varphi : G_F \backslash G_{\mathbb{A}} \rightarrow \mathbb{C}$, $\beta \in \mathcal{B}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ と $\mathbb{A}^\times / F^\times$ の Hecke 指標 η に対して、

$$P_{\beta, \lambda}^\eta(\varphi) := \int_{F^\times \backslash \mathbb{A}^\times} \{ \hat{\beta}_\lambda(|t|_{\mathbb{A}}) + \hat{\beta}_\lambda(|t|_{\mathbb{A}}^{-1}) \} \\ \times \varphi \left(\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_\eta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \eta(t) \eta_{\text{fin}}(x_{\eta, \text{fin}}) d^\times t$$

とおく。ただし $d^\times t$ は $\mathbb{A}^\times$ の“標準的”な Haar 測度、 $|\cdot|_{\mathbb{A}}$ はイデールノルムで、 x_η は η から定まるアデールである。

ここで次の3つを仮定する。

- 任意の $\beta \in \mathcal{B}$ に対して $C \in \mathbb{R}$ が存在して、もし $\text{Re}(\lambda) > C$ なら積分 $P_{\beta, \lambda}^\eta(\varphi)$ は収束する。
- 任意の $\beta \in \mathcal{B}$ に対して複素関数 $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(z) > C\} \ni \lambda \mapsto P_{\beta, \lambda}^\eta(\varphi)$ は $\lambda = 0$ のまわりに有理型接続される。
- $P_{\beta, \lambda}^\eta(\varphi)$ の $\lambda = 0$ でのローラン展開における定数項 $\text{CT}_{\lambda=0} P_{\beta, \lambda}^\eta(\varphi)$ が、 $\mathcal{B}$ 上の線形汎関数として0を台とするディラックデルタ超関数の定数倍になる。

この時、

$$\text{CT}_{\lambda=0} P_{\beta, \lambda}^\eta(\varphi) = P_{\text{reg}}^\eta(\varphi) \beta(0), \quad \forall \beta \in \mathcal{B}$$

となる定数 $P_{\text{reg}}^\eta(\varphi)$ を φ の η -正規周期 (the regularized η -period of φ) という。

ここで φ が急減少な場合に φ の η -正規周期を計算してみる。実は φ が急減少のとき $P_{\beta, \lambda}^\eta(\varphi)$ は任意の $\beta \in \mathcal{B}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して収束して、 $\lambda \rightarrow P_{\beta, \lambda}^\eta(\varphi)$ は整関数であることが分かる。 $\sigma > 0$ とすると、

$$P_{\beta, 0}^\eta(\varphi) = \int_{F^\times \backslash \mathbb{A}^\times} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} - \int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty} \right) \frac{\beta(z)}{z} |t|_{\mathbb{A}}^z dz \right\} \\ \times \varphi \left(\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_\eta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \eta(t) \eta_{\text{fin}}(x_{\eta, \text{fin}}) d^\times t$$

となり、留数定理により $\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} - \int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty} \right) \frac{\beta(z)}{z} |t|_{\mathbb{A}}^z dz = \beta(0)$ となることから、

$$P_{\text{reg}}^\eta(\varphi) = \int_{F^\times \backslash \mathbb{A}^\times} \varphi \left(\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_\eta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \eta(t) \eta_{\text{fin}}(x_{\eta, \text{fin}}) d^\times t$$

となる。つまりここでいう正規周期とは、この積分で定義される周期を関数空間 $\mathcal{B}$ を用いて“正規化”したものである。

3. MAIN RESULTS

この章では、カスプ形式とアイゼンシュタイン級数の正規周期の明示式を述べる。準備として $G_{\mathbb{A}}$ の標準的な極大コンパクト部分群を $\mathbf{K} = \prod_{v \in \Sigma_F} \mathbf{K}_v$ とし、 $\mathbf{K}_{\infty} := \prod_{v \in \Sigma_{\infty}} \mathbf{K}_v$ とおく。また $v \in \Sigma_{\text{fin}}$ の時、 $n \in \mathbb{N}_0$ に対して、

$$\mathbf{K}_0(\mathfrak{p}_v^n) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{K}_v \mid c \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_v^n} \right\}$$

とおく。また $\mathfrak{o}_F$ のイデアル $\mathfrak{a}$ に対して $\mathbf{K}_0(\mathfrak{a}) := \prod_{v \in \Sigma_{\text{fin}}} \mathbf{K}_0(\mathfrak{a}\mathfrak{o}_v)$ とおく。

まずカスプ形式の場合について述べる。 (π, V_{π}) を $G_{\mathbb{A}}$ の既約カスプ保型表現であって、中心指標が自明で $\mathbf{K}_{\infty}$ -spherical (すなわち $V_{\pi}^{\mathbf{K}_{\infty}} \neq 0$) なものとする。表現空間 V_{π} はカスプ形式の空間の部分空間とする。 π の導手 $\mathfrak{f}_{\pi}$ で割り切れる $\mathfrak{o}_F$ のイデアル $\mathfrak{n}$ を任意に固定して、不変部分空間 $V_{\pi}^{\mathbf{K}_{\infty}\mathbf{K}_0(\mathfrak{n})}$ に属するカスプ形式の正規周期について考える。

有限集合 $\{\varphi_{\pi, \rho}\}_{\rho}$ を、“うまく”構成された $V_{\pi}^{\mathbf{K}_{\infty}\mathbf{K}_0(\mathfrak{n})}$ の直交基底とする (構成法は後で述べる)。ここで η を、次の条件 $(\star)$ を満たす $\mathbb{A}^{\times}/F^{\times}$ の Hecke 指標とする:

$$(\star) \begin{cases} v \in \Sigma_{\infty} \Rightarrow \eta_v = |\cdot|_v^{t_v} \text{ となる } t_v \in i\mathbb{R} \text{ が存在する,} \\ \eta \text{ の導手 } \mathfrak{f}_{\eta} \text{ は } \mathfrak{n} \text{ と互いに素。} \end{cases}$$

なお、単射 $\mathbb{R}_{>0} \ni y \rightarrow \underline{y} = \left(\underline{y}_v \right)_{v \in \Sigma_F} \in \mathbb{A}^{\times}$ (ただし $v \in \Sigma_{\infty}$ なら $\underline{y}_v = y^{1/[F:\mathbb{Q}]}$ で、 $v \in \Sigma_{\text{fin}}$ なら $\underline{y}_v = 1$) によって $\mathbb{R}_{>0}$ を $\mathbb{A}^{\times}$ の部分群とみなし、Hecke 指標を扱う時は常に、 $\mathbb{R}_{>0}$ への制限は自明であるとする。この時、次の定理が成り立つ。

Theorem 1. 任意の添え字 ρ に対して $P_{\text{reg}}^{\eta}(\varphi_{\pi, \rho})$ は定義できる。さらに、明示的に計算可能な $Q_{\pi, \rho}(\eta) \in \mathbb{C}^{\times}$ が存在して、

$$P_{\text{reg}}^{\eta}(\varphi_{\pi, \rho}) = Q_{\pi, \rho}(\eta) L(1/2, \pi \otimes \eta)$$

となる。ここで $L(s, \pi \otimes \eta)$ は $\pi \otimes \eta$ の標準保型 L 関数である。

Remark 2. 任意の添え字 ρ に対して $Q_{\pi, \rho}(\eta) \neq 0$ である。

次にアイゼンシュタイン級数について述べる。 $\mathfrak{n}$ を $\mathfrak{o}_F$ のイデアルとし、 $\mathbb{A}^{\times}/F^{\times}$ の Hecke 指標 χ で、次の条件 $(\star\star)$ を満たすものを固定する。

$$(\star\star) \begin{cases} v \in \Sigma_{\infty} \Rightarrow \chi_v = |\cdot|_v^{s_v} \text{ となる } s_v \in i\mathbb{R} \text{ が存在する。} \\ \chi \text{ の導手 } \mathfrak{f}_{\chi}^2 \text{ は } \mathfrak{n} \text{ を割り切る。} \end{cases}$$

上三角行列全体からなる G の Borel 部分群を B とし、任意の $\nu \in \mathbb{C}$ に対して、 $I(\chi|\cdot|_{\mathbb{A}}^{\nu/2}) := \text{Ind}_{B_{\mathbb{A}}}^{G_{\mathbb{A}}}(\chi|\cdot|_{\mathbb{A}}^{\nu/2} \boxtimes \chi^{-1}|\cdot|_{\mathbb{A}}^{-\nu/2})$ を放物的誘導表現とする。すなわち、滑らかで $\mathbf{K}$ -有限な関数 $f: G_{\mathbb{A}} \rightarrow \mathbb{C}$ で次を満たす関数全体とする：

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} g\right) = \chi(a/d)|a/d|_{\mathbb{A}}^{(\nu+1)/2} f(g), \quad \forall \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in B_{\mathbb{A}}, \forall g \in G_{\mathbb{A}}.$$

有限集合 $\{f_{\chi,\rho}^{(\nu)}\}_{\rho}$ を、平坦切断から成る $I(\chi|\cdot|_{\mathbb{A}}^{\nu/2})^{\mathbf{K}_{\infty}\mathbf{K}_0(\mathfrak{n})}$ の部分集合で $\nu \in i\mathbb{R}$ なら $I(\chi|\cdot|_{\mathbb{A}}^{\nu/2})^{\mathbf{K}_{\infty}\mathbf{K}_0(\mathfrak{n})}$ の正規直交基底となるような、“うまく”構成されたものとする (構成法は後で述べる)。ここで $\nu \in i\mathbb{R}$ の時に $\mathbf{K}$ 上の積分によって $I(\chi|\cdot|_{\mathbb{A}}^{\nu/2})$ に $G_{\mathbb{A}}$ -不変内積が入ることに注意する。

任意の添え字 ρ に対して、 $f_{\chi,\rho}^{(\nu)}$ から定まる Eisenstein 級数を

$$E_{\chi,\rho}(\nu, g) = \sum_{\gamma \in B_F \backslash G_F} f_{\chi,\rho}^{(\nu)}(\gamma g), \quad g \in G_{\mathbb{A}}$$

とする。この級数は $\text{Re}(\nu) > 1$ のときに収束して正則であるが $f_{\chi,\rho}^{(\nu)}$ が平坦切断であるので、 $E_{\chi,\rho}(\nu, g)$ は ν の関数として $\mathbb{C}$ 上の有理型関数に有理型接続され、 $i\mathbb{R}$ 上で正則になる。ここで $\dot{F}/\mathbb{Q}$ の判別式を D_F とし、 $\mathfrak{f}_{\chi}$ の絶対ノルムを $N(\mathfrak{f}_{\chi})$ とする。Eisenstein 級数 $E_{\chi,\rho}(\nu, g)$ の η -正規周期は次のようになる。

Theorem 3. η を $\mathbb{A}^{\times}/F^{\times}$ の Hecke 指標で条件 $(\star)$ を満たすものとする。もし $\mathfrak{f}_{\chi} = \mathfrak{o}_F$ なら $\nu \in i\mathbb{R}$ を仮定する。この時、任意の添え字 ρ に対して $P_{\text{reg}}^{\eta}(E_{\chi,\rho}(\nu, -))$ は定義できる。さらに明示的に計算可能な $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ 上の有理型関数 $B_{\chi,\rho}^{\eta}(s, \nu)$ があって、

$$\begin{aligned} P_{\text{reg}}^{\eta}(E_{\chi,\rho}(\nu, -)) &= (2\pi)^{\#\Sigma_{\mathbb{C}}} \mathcal{G}(\eta) D_F^{-\nu/2} N(\mathfrak{f}_{\chi})^{1/2-\nu} \\ &\quad \times B_{\chi,\rho}^{\eta}(1/2, \nu) \frac{L((1+\nu)/2, \chi\eta) L((1-\nu)/2, \chi^{-1}\eta)}{L(1+\nu, \chi^2)} \end{aligned}$$

となる。

Remark 4. F が総実代数体で $\mathfrak{n}$ が square free の時、Theorem 1 と Theorem 2 は都築 [9] によって与えられている。

4. NOTATION

$v \in \Sigma_F$ に対し F の v による完備化を F_v とし、 $|\cdot|_v$ を F_v の正規付値とする。また $v \in \Sigma_{\text{fin}}$ に対して F_v の整数環とその極大イデアルを $\mathfrak{o}_v$ 、 $\mathfrak{p}_v$ とし、素元 $\varpi_v \in \mathfrak{o}_v$ を固定しておく。また q_v を $\mathfrak{o}_v/\mathfrak{p}_v$ の位数とする。

$\mathfrak{o}_F$ のイデアル $\mathfrak{a}$ に対して、 $S(\mathfrak{a})$ を $\mathfrak{a}\mathfrak{o}_v \subset \mathfrak{p}_v$ となる $v \in \Sigma_{\text{fin}}$ 全体とする。また任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して、 $S_k(\mathfrak{a})$ を $\mathfrak{a}\mathfrak{o}_v = \mathfrak{p}_v^k$ となる $v \in S(\mathfrak{a})$ 全体とする。この時、 $S(\mathfrak{a}) = \coprod_{k=1}^n S_k(\mathfrak{a})$ (n は $S_m(\mathfrak{a}) \neq \emptyset$ となる最大の非負整数 m とする。) が成り立つ。 $\mathfrak{a}$ の絶対ノルムを $N(\mathfrak{a})$ で表すことにする。

$\mathbb{A}/F$ の標準的な非自明な加法指標 $\psi = \otimes_{v \in \Sigma_F} \psi_v$ を一つ取り、 $v \in \Sigma_{\text{fin}}$ に対して ψ_v の導手を $\mathfrak{p}_v^{-d_v}$ とする。各 $v \in \Sigma_F$ に対して dx_v を ψ_v に関する F_v の self-dual な Haar 測度とする。また $v \in \Sigma_{\text{fin}}$ に対して $F_v^\times$ の Haar 測度を $d^\times x_v = (1 - q_v^{-1})^{-1} dx_v / |x_v|_v$ ととる。 $\mathbb{A}^\times$ の Haar 測度を $d^\times x = \prod_{v \in \Sigma_F} d^\times x_v$ ととっておく。

$v \in \Sigma_{\text{fin}}$ とする時、 $F_v^\times$ の準指標 χ_v に対し、 $\mathfrak{p}_v^{f(\chi_v)}$ を χ_v の導手とする。また χ_v に付随する Gauss 和を

$$\mathcal{G}(\chi_v) := \int_{\mathfrak{o}_v^\times} \chi_v(u \varpi_v^{-d_v - f(\chi_v)}) \psi_{F_v}(u \varpi_v^{-d_v - f(\chi_v)}) d^\times u$$

とする。任意の $\mathbb{A}^\times/F^\times$ の準指標 $\chi = \prod_{v \in \Sigma_F} \chi_v$ に対して、 $\chi_{\text{fin}} := \prod_{v \in \Sigma_{\text{fin}}} \chi_v$ とし、 χ に付随する Gauss 和を

$$\mathcal{G}(\chi) := \prod_{v \in \Sigma_{\text{fin}}} \mathcal{G}(\chi_v)$$

とする。

5. THE SKETCH OF THE PROOF OF THEOREM 1

まず、Theorem 1 の証明の概略を述べる。 π を既約カスプ保型表現で中心指標が自明なもので $V_\pi^{\mathbf{K}_\infty \mathbf{K}_0(n)} \neq 0$ であるとする。同型 $\pi \cong \otimes_{v \in \Sigma_F} \pi_v$, $V_\pi \cong \otimes_{v \in \Sigma_F} V_{\pi_v}$ を、各 $v \in \Sigma_F$ における許容表現 π_v の表現空間 V_{π_v} が ψ_v に関する π_v の Whittaker model になるようにとっておく。

$F_v^\times$ の準指標 η_v と $\phi \in V_{\pi_v}$ に対して局所ゼータ積分を

$$Z(s, \eta_v, \phi) = \int_{F_v^\times} \phi \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \eta_v(t) |t|_v^{s-1/2} d^\times t, s \in \mathbb{C}$$

で定めると、この積分は $\text{Re}(s) \gg 0$ で絶対収束して $Z(s, \eta_v, \phi)$ は s の関数として $\mathbb{C}$ 上の有理型関数に有理型接続される。今 π_v が unitarizable であるので V_{π_v} 上の G_{F_v} -不変エルミート内積として、

$$\langle W_1 | W_2 \rangle = C_v \int_{F_v^\times} W_1 \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overline{W_2 \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} d^\times t, \quad W_1, W_2 \in V_{\pi_v}$$

が取れることに注意しておく (cf. [2, Theorem 12])。ここで $C_v > 0$ は $C_v = \langle \phi_{0,v} | \phi_{0,v} \rangle^{-1}$ となるように取っておく。

$V_{\pi}^{\mathbf{K}_{\infty}\mathbf{K}_0(n)}$ の直交基底を構成するために、各素点ごとに直交基底を構成していく。まず $v \in \Sigma_{\infty}$ の時、 π_v は $\mathbf{K}_v$ -spherical な無限次元 unitarizable 既約許容 $(\mathfrak{g}_v, \mathbf{K}_v)$ 加群で中心指標が自明なものである。ここで $\mathfrak{g}_v$ は G_{F_v} の Lie 代数の複素化である。この時次の命題が成り立つ。

Proposition 5. $V_{\pi_v}^{\mathbf{K}_v}$ は一次元である。唯一つの spherical ベクトル $\phi_{0,v} \in V_{\pi_v}^{\mathbf{K}_v}$ があって $\eta_v = |\cdot|_v^{t_v}$, $t_v \in \mathbb{C}$, の時、

$$Z(s, \eta_v, \phi_{0,v}) = L(s, \pi_v \otimes \eta_v)$$

が成り立つ (cf. [3, Proposition 3.4.6], [10, Proposition (2.3.14)]).

次に、 $v \in \Sigma_{\text{fin}}$ の場合を考える。 π_v は中心指標が自明な G_{F_v} の無限次元 unitarizable 既約許容表現である。不変部分空間 $V_{\pi_v}^{\mathbf{K}_0(\mathfrak{p}_v^n)}$ はある n に対して nonzero であり、 $c(\pi_v) := \min\{n \in \mathbb{N}_0 | V_{\pi_v}^{\mathbf{K}_0(\mathfrak{p}_v^n)} \neq 0\}$ とおくと $GL(2)$ の local new form の理論により、次が成立する (cf. [5, p3], [6], [7, Theorem 11.13]).

Proposition 6. $V_{\pi_v}^{\mathbf{K}_0(\mathfrak{p}_v^{c(\pi_v)})}$ は 1 次元である。任意の $n \in \mathbb{N}_0$ に対して、

$$V_{\pi_v}^{\mathbf{K}_0(\mathfrak{p}_v^{c(\pi_v)+n})} = \bigoplus_{k=0}^n \pi_v \begin{pmatrix} \varpi_v^{-k} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} V_{\pi_v}^{\mathbf{K}_0(\mathfrak{p}_v^{c(\pi_v)})}$$

が成立する。さらに唯一つの $\phi_{0,v} \in V_{\pi_v}^{\mathbf{K}_0(\mathfrak{p}_v^{c(\pi_v)})}$ があって、任意の $F_v^{\times}$ の不分岐指標 η_v に対して、

$$Z(s, \eta_v, \phi_{0,v}) = \text{vol}(\mathfrak{o}_v^{\times}, d^{\times} t) \eta_v(\varpi_v)^{-d_v} q_v^{d_v(s-1/2)} L(s, \pi_v \otimes \eta_v)$$

が成り立つ。

また不変部分空間 $V_{\pi_v}^{\mathbf{K}_0(\mathfrak{p}_v^{c(\pi_v)+n})}$ の直交基底は以下の命題のように構成できる。

Proposition 7.

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、 $V_{\pi_v}^{\mathbf{K}_0(\mathfrak{p}_v^{c(\pi_v)+n})}$ の有限集合 $\{\phi_{1,v}, \dots, \phi_{n,v}\}$ で次の (1)(2) を満たすものが唯一つ存在する。

(1) 実数列 $\{c_{\pi_v}(k, j)\}_{1 \leq k \leq n, 0 \leq j \leq k-1}$ が存在して

$$\phi_{k,v} = \pi_v \begin{pmatrix} \varpi_v^{-k} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \phi_{0,v} - \sum_{j=0}^{k-1} c_{\pi_v}(k, j) \phi_{j,v}, \quad k \in \{1, \dots, n\}$$

が成り立つ。

(2) 上で定めた V_{π_v} 上の G_{F_v} -不変エルミート内積 $(\cdot | \cdot)_v$ に対して、集合 $\{\phi_{0,v}, \dots, \phi_{n,v}\}$ は $V_{\pi_v}^{\mathbf{K}_0(\mathfrak{p}_v^n)}$ の直交基底。

ここで実数列 $\{c_{\pi_v}(k, j)\}_{1 \leq k \leq n, 0 \leq j \leq k-1}$ は 2 変数非線形漸化式を解くことで以下のように求まる。

Corollary 8. $n \in \mathbb{N}$ とする。

- $c(\pi_v) \geq 2$ の時、 $c_{\pi_v}(n, k) = 0$ ($0 \leq \forall k \leq n-1$) となる。
- $c(\pi_v) = 1$ の時、 π_v は不分岐な 2 次指標を χ_v から定まる特殊表現 $\sigma(\chi_v | \cdot |_v^{1/2}, \chi_v | \cdot |_v^{-1/2})$ と同型である。この時、

$$c_{\pi_v}(n, k) = \begin{cases} \frac{1}{q_v^{n-k} \chi_v(\varpi_v)^{n-k}} & (0 \leq k \leq n-1) \end{cases}$$

となる。

- $c(\pi_v) = 0$ の時、 π_v の佐武パラメーターを (α, α^{-1}) とする。この時、

$$c_{\pi_v}(n, k) = \begin{cases} \frac{q_v \sum_{j=0}^n \alpha^{2j} - \sum_{j=1}^{n-1} \alpha^{2j}}{\alpha^n q_v^{n/2} (1 + q_v)} & (k = 0) \\ \frac{\sum_{j=0}^{n-k} \alpha^{2j}}{\alpha^{n-k} q_v^{(n-k)/2}} & (1 \leq k \leq n-1) \end{cases}$$

となる。

5.1. Zeta integrals of cusp forms on $GL(2)$. 以上の準備の下で $V_\pi^{\mathbf{K}_\infty \mathbf{K}_0(n)}$ の直交基底を構成しよう。任意の $\mathbb{A}^\times / F^\times$ の準指標 η と $\varphi \in V_\pi$ に対して大域ゼータ積分を

$$Z(s, \eta, \varphi) := \int_{F^\times \backslash \mathbb{A}^\times} \varphi \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \eta(t) |t|_{\mathbb{A}}^{s-1/2} d^\times t, \quad s \in \mathbb{C}$$

で定義する。この積分は $s \in \mathbb{C}$ に対して絶対収束し、 $Z(s, \eta, \varphi)$ は s の整関数を定める。

$\mathfrak{o}_F$ のイデアル $\mathfrak{n}$ が $\mathfrak{f}_\pi$ を割り切る時、 $V_\pi^{\mathbf{K}_\infty \mathbf{K}_0(n)}$ の直交基底を以下のように構成する。

$v \in \Sigma_{\text{fin}}$ に対して $n_v := \dim V_{\pi_v}^{\mathbf{K}_0(\mathfrak{p}_v^{c(\pi_v)})} - 1$ とおく。任意の $\rho = (j_v)_{v \in S(\mathfrak{nf}_\pi^{-1})}$ ($j_v \in \{0, \dots, n_v\}$) に対して、同型 $V_\pi \cong \bigotimes_{v \in \Sigma_F} V_{\pi_v}$ のもとで、

$$\bigotimes_{v \in \Sigma_\infty} \phi_{0,v} \otimes \bigotimes_{v \in S(\mathfrak{nf}_\pi^{-1})} \phi_{j_v,v} \otimes \bigotimes_{v \in \Sigma_{\text{fin}} - S(\mathfrak{nf}_\pi^{-1})} \phi_{0,v}$$

に対応するカスプ形式を $\varphi_{\pi,\rho} \in V_\pi^{\mathbf{K}_\infty \mathbf{K}_0(n)}$ とする。構成法から以下の命題が成り立つ。

Proposition 9. 有限集合 $\{\varphi_{\pi,\rho}\}_\rho$ は $V_\pi^{\mathbf{K}_\infty \mathbf{K}_0(n)}$ の直交基底である。ここで V_π には L^2 -内積を入れている。

ここで次の Lemma を用意しておく。

Lemma 10. 任意の $v \in \Sigma_{\text{fin}}$ と $k \in \{0, \dots, n\}$ と $F_v^\times$ の任意の不分岐準指標 η_v に対して、多項式 $Q_{k,v}^{\pi_v}(\eta_v, X) \in \mathbb{C}[X]$ を

$$Q_{k,v}^{\pi_v}(\eta_v, X) = \eta_v(\varpi_v)^k X^k - \sum_{j=0}^{k-1} c_{\pi_v}(k, j) Q_{j,v}^{\pi_v}(\eta_v, X),$$

$$Q_{0,v}^{\pi_v}(\eta_v, X) = 1,$$

で定めると

$$Z(s, \eta_v, \phi_{k,v}) = Q_{k,v}^{\pi_v}(\eta_v, q_v^{1/2-s}) Z(s, \eta_v, \phi_{0,v})$$

が成り立つ。

実際、多項式は以下のように与えられる。

Corollary 11.

- $c(\pi_v) = 0$ の時、 π_v の佐武パラメーターを (α, α^{-1}) とすると、

$$Q_{k,v}^{\pi_v}(\eta_v, X) = \begin{cases} 1 & (\text{if } k = 0) \\ \eta_v(\varpi_v) X - \frac{\alpha + \alpha^{-1}}{q_v^{1/2} + q_v^{-1/2}} & (\text{if } k = 1) \\ q_v^{-1} \eta_v(\varpi_v)^{k-2} X^{k-2} (\alpha q_v^{1/2} \eta_v(\varpi_v) X - 1) (\alpha^{-1} q_v^{1/2} \eta_v(\varpi_v) X - 1) & (\text{if } k \geq 2) \end{cases}$$

となる。

- $c(\pi_v) = 1$ の時、 π_v は特殊表現 $\sigma(\chi_v | \cdot |_v^{1/2}, \chi_v | \cdot |_v^{-1/2})$ (ただし χ_v は不分岐 2 次指標) に同型である。このとき、

$$Q_{k,v}^{\pi_v}(\eta_v, X) = \begin{cases} 1 & (\text{if } k = 0) \\ \eta_v(\varpi_v)^{k-1} X^{k-1} (\eta_v(\varpi_v) X - q_v^{-1} \chi_v(\varpi_v)^{-1}) & (\text{if } k \geq 1) \end{cases}$$

となる。

- $c(\pi_v) \geq 2$ の時、

$$Q_{k,v}^{\pi_v}(\eta_v, X) = \eta_v(\varpi_v)^k X^k, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

となる。

ここで、条件 $(\star)$ を満たす $\mathbb{A}^\times / F^\times$ の Hecke 指標 η をとる。この η と $\varphi \in V_\pi^{\mathbf{K}_\infty \mathbf{K}_0(n)}$ に対し、次のような修正された大域ゼータ積分を考える：

$$Z^*(s, \eta, \varphi) = \eta_{\text{fin}}(x_{\eta, \text{fin}}) Z \left(s, \eta, \pi \begin{pmatrix} 1 & x_\eta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \varphi \right), \quad s \in \mathbb{C}.$$

ただし $x_\eta = (x_{\eta,v})_{v \in \Sigma_F} \in \mathbb{A}$ は

$$x_{\eta,v} = \begin{cases} 0 & (v \in \Sigma_\infty) \\ \varpi_v^{-f(\eta_v)} & (v \in \Sigma_{\text{fin}}) \end{cases}$$

を満たすアデールで、 $x_{\eta,\text{fin}}$ は x_η の $\mathbb{A}_{\text{fin}}$ への射影とする。

次の命題は、 $Z^*(s, \eta, \varphi_{\pi,\rho})$ を局所ゼータ積分の無限積に分解して Lemma 10 を用いて計算することにより得られる。

Proposition 12. 任意の添え字 ρ に対して、

$$Z^*(s, \eta, \varphi_{\pi,\rho}) = D_F^{s-1/2} \mathcal{G}(\eta) \left\{ \prod_{v \in S(\text{nf}_\pi^{-1})} Q_{j_v,v}^{\pi_v}(\eta_v, q_v^{1/2-s}) \right\} L(s, \pi \otimes \eta).$$

始めに述べたように急減少関数の正規周期は次のように表せたことを思い出しておく。

Lemma 13. [9, Lemma 49]

もし $\varphi: G_F \backslash G_{\mathbb{A}} \rightarrow \mathbb{C}$ が急減少ならば $P_{\beta,\lambda}^\eta(\varphi)$ は任意の $(\beta, \lambda) \in \mathcal{B} \times \mathbb{C}$ に対して絶対収束して $\lambda \rightarrow P_{\beta,\lambda}^\eta(\varphi)$ は λ の整関数となる。さらに $P_{\text{reg}}^\eta(\varphi)$ は定義できて $P_{\text{reg}}^\eta(\varphi) = \zeta^*(1/2, \eta, \varphi)$ が成り立つ。

Proof of Theorem 1. 添え字 ρ に対して、カスプ形式が急減少関数であることから Proposition 12 により、

$$\begin{aligned} P_{\text{reg}}^\eta(\varphi_{\pi,\rho}) &= Z^*(1/2, \eta, \varphi) \\ &= \mathcal{G}(\eta) \left\{ \prod_{v \in S(\text{nf}_\pi^{-1})} Q_{j_v,v}^{\pi_v}(\eta_v, 1) \right\} L(1/2, \pi \otimes \eta). \end{aligned}$$

となり、Theorem 1 が得られる。 □

$Q_{\pi,\rho}(\eta)$ の v -成分は以下のようになる。

Remark 14. Corollary 11 により、以下が成り立つ。

- $c(\pi_v) = 0$ の時、

$$Q_{k,v}^{\pi_v}(\eta_v, 1) = \begin{cases} 1 & (\text{if } k = 0) \\ \eta_v(\varpi_v) - \frac{\alpha + \alpha^{-1}}{q_v^{1/2} + q_v^{-1/2}} & (\text{if } k = 1) \\ q_v^{-1} \eta_v(\varpi_v)^{k-2} (\alpha q_v^{1/2} \eta_v(\varpi_v) - 1) (\alpha^{-1} q_v^{1/2} \eta_v(\varpi_v) - 1) & (\text{if } k \geq 2) \end{cases}$$

- $c(\pi_v) = 1$ の時、

$$Q_{k,v}^{\pi_v}(\eta_v, 1) = \begin{cases} 1 & (\text{if } k = 0) \\ \eta_v(\varpi_v)^{k-1} (\eta_v(\varpi_v) - q_v^{-1} \chi_v(\varpi_v)^{-1}) & (\text{if } k \geq 1) \end{cases}$$

- $c(\pi_v) \geq 2$ の時、 $Q_{k,v}^{\pi_v}(\eta_v, 1) = \eta_v(\varpi_v)^k$, $k \in \mathbb{N}_0$.

6. THE SKETCH OF THE PROOF OF THEOREM 2

最後に Theorem 2 の証明の概略を述べる。アイゼンシュタイン級数を考えるために、 $\mathbb{A}^\times/F^\times$ の Hecke 指標 $\chi = \prod_{v \in \Sigma_F} \chi_v$ を固定し、 $\nu \in \mathbb{C}$ に対して放物誘導表現 $I(\chi| \cdot |_{\mathbb{A}}^{\nu/2})$ を考える。 $\mathfrak{o}_F$ のイデアル $\mathfrak{n}$ をとり、 $(\star\star)$ を仮定しておく。 $\mathbf{K}_v$ の Haar 測度 dk_v を、 $\text{vol}(\mathbf{K}_v, dk_v) = 1$ となるようにとり、 $\mathbf{K}$ の Haar 測度を $dk = \prod_{v \in \Sigma_F} dk_v$ となるようにしておく。もし $\nu \in i\mathbb{R}$ なら $I(\chi| \cdot |_{\mathbb{A}}^{\nu/2})$ は unitarizable であり、 $G_{\mathbb{A}}$ -不変内積 $(\cdot | \cdot)$ は以下で与えられる:

$$(f_1 | f_2) = \int_{\mathbf{K}} f_1(k) \overline{f_2(k)} dk, \quad f_1, f_2 \in I(\chi| \cdot |_{\mathbb{A}}^{\nu/2}).$$

各 $v \in \Sigma_F$ に対しても $I(\chi_v| \cdot |_v^{\nu/2})$ と、 $\nu \in i\mathbb{R}$ に対する G_v 不変内積 $(\cdot | \cdot)_v$ 、 $I(\chi_v| \cdot |_v^{\nu/2})$ を上と同様に定める。

$I(\chi| \cdot |_{\mathbb{A}}^{\nu/2})^{\mathbf{K}_\infty \mathbf{K}_0(\mathfrak{n})}$ の正規直交基底を構成するために、カスプ形式の場合と同様にして各素点ごとに調べていく。

$v \in \Sigma_\infty$ の時は、 $I(\chi_v| \cdot |_v^{\nu/2})$ の spherical ベクトル $f_{0,\chi_v}^{(\nu)}$ を $f_{0,\chi_v}^{(\nu)}(e) = 1$ (ただし e は G_{F_v} の単位元) となるようにしておく。

次に $v \in S(\mathfrak{f}_\chi)$ の時を考える。[6, Proposition 2.1.2] により分岐誘導表現の local new form の明示式として次が得られる。

Proposition 15. 不変部分空間 $I(\chi_v| \cdot |_v^{\nu/2})^{\mathbf{K}_0(\mathfrak{p}_v^{2f(\chi_v)})}$ は 1 次元である。 $I(\chi_v| \cdot |_v^{\nu/2})^{\mathbf{K}_0(\mathfrak{p}_v^{2f(\chi_v)})}$ の基底として以下で与えられる $f_{0,\chi_v}^{(\nu)}$ がとれる。

$$f_{0,\chi_v}^{(\nu)}(g) = \begin{cases} \chi_v(\varpi_v^{-f(\chi_v)}) q_v^{f(\chi_v)\nu/2} \chi_v(a/d) |a/d|_v^{(\nu+1)/2} & (\text{if } g \in \begin{pmatrix} a & * \\ 0 & d \end{pmatrix} \gamma_{f(\chi_v)+1} \mathbf{K}_0(\mathfrak{p}_v^{2f(\chi_v)}), a, d \in F_v^\times) \\ 0 & (\text{if } g \notin B_F \gamma_{f(\chi_v)+1} \mathbf{K}_0(\mathfrak{p}_v^{2f(\chi_v)})) \end{cases}$$

ここで

$$\gamma_i = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi_v^{i-1} & 1 \end{pmatrix} & (\text{if } i \in \mathbb{N}) \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & (\text{if } i = 0) \end{cases}$$

とおいた。

$n \in \mathbb{N}_0$ とする時、 $k \in \{0, \dots, n\}$ に対して、

$$\tilde{f}_{k,\chi_v}^{(\nu)} := q_v^{-(k+f(\chi_v))\nu/2} T(\chi_v) \pi_v \begin{pmatrix} \varpi_v^{-k} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f_{0,\chi_v}^{(\nu)},$$

とおく。ただし $T(\chi_v) = q_v^{f(\chi_v)/2}(1 - q_v^{-1})^{-1/2}$ とする。この時次が成り立つ。

Proposition 16. 任意の $k \in \{0, \dots, n\}$ に対して、 $\tilde{f}_{k, \chi_v}^{(\nu)}$ の $\mathbf{K}_v$ への制限は $\nu \in \mathbb{C}$ に依らない。また、もし $\nu \in i\mathbb{R}$ なら有限集合 $\{\tilde{f}_{k, \chi_v}^{(\nu)} | k \in \{0, \dots, n\}\}$ は $I(\chi_v | \cdot | v^{\nu/2})\mathbf{K}_0(\mathfrak{p}_v^{2f(\chi_v)+n})$ の正規直交基底になる。

次に、 $v \in \Sigma_{\text{fin}} - S(f_\chi)$ の時を考える。 $I(\chi_v | \cdot | v^{\nu/2})$ の spherical ベクトル $f_{0, \chi_v}^{(\nu)}$ を $f_{0, \chi_v}^{(\nu)}(e) = 1$ となるようにしておく。 $n \in \mathbb{N}_0$ とする時、各 $k \in \{1, \dots, n\}$ に対して、

$$f_{k, \chi_v}^{(\nu)} := \pi_v \begin{pmatrix} \varpi_v^{-k} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f_{0, \chi_v}^{(\nu)} - \sum_{j=0}^{k-1} c_{\chi_v}^{(\nu)}(k, j) f_{j, \chi_v}^{(\nu)}$$

とおく。ここで数列 $\{c_{\chi_v}^{(\nu)}(k, j)\}_{1 \leq k \leq n, 0 \leq j \leq k-1}$ は以下で与えられるものとする。

$$c_{\chi_v}^{(\nu)}(k, j) = \begin{cases} \frac{q_v \sum_{l=0}^k a^{2l} - \sum_{l=1}^{k-1} a^{2l}}{a^k q_v^{k/2} (1 + q_v)} & (\text{if } j = 0) \\ \frac{\sum_{l=0}^{k-j} a^{2l}}{a^{k-j} q_v^{(k-j)/2}} & (\text{if } 1 \leq j \leq k-1) \end{cases}$$

ただし $a := \chi_v(\varpi_v) q_v^{-\nu/2}$ としている。

もし $\nu \in i\mathbb{R}$ なら、Proposition 7 と Corollary 8 により $\{f_{k, \chi_v}^{(\nu)} | k \in \{0, \dots, n\}\}$ は $I(\chi_v | \cdot | v^{\nu/2})\mathbf{K}_0(\mathfrak{p}_v^n)$ の直交基底であることに注意しておく。さらに各 $k \in \{0, \dots, n\}$ に対して、

$$\tilde{f}_{k, \chi_v}^{(\nu)} := \begin{cases} f_{0, \chi_v}^{(\nu)} & (\text{if } k = 0) \\ (1 + q_v^{-1}) q_v^{-\nu/2} L(1 + \nu, \chi_v^2) f_{1, \chi_v}^{(\nu)} & (\text{if } k = 1) \\ \left(\frac{q_v + 1}{q_v - 1}\right)^{1/2} q_v^{-k\nu/2} L(1 + \nu, \chi_v^2) f_{k, \chi_v}^{(\nu)} & (\text{if } 2 \leq k \leq n) \end{cases}$$

とおく。このように ν に依存する定数を $f_{k, \chi_v}^{(\nu)}$ にかけることによって次の命題が成り立つ。

Proposition 17. 任意の $k \in \{0, \dots, n\}$ に対して $\tilde{f}_{k, \chi_v}^{(\nu)}$ の $\mathbf{K}_v$ への制限は $\nu \in \mathbb{C}$ に依らない。また、もし $\nu \in i\mathbb{R}$ なら $\{\tilde{f}_{k, \chi_v}^{(\nu)} | k \in \{0, \dots, n\}\}$ は $I(\chi_v | \cdot | v^{\nu/2})\mathbf{K}_0(\mathfrak{p}_v^n)$ の正規直交基底になる。

6.1. Regularized periods of Eisenstein series. 不変部分空間 $I(\chi \cdot |\cdot|_{\mathbb{A}}^{\nu/2})^{\mathbf{K}_{\infty} \mathbf{K}_0(n)}$ を考える。カスプ形式の場合と同様に、添え字 $\rho = (j_v)_{v \in S(\mathfrak{nf}_X^{-2})}$ に対して、同型 $I(\chi \cdot |\cdot|_{\mathbb{A}}^{\nu/2}) \cong \bigotimes_{v \in \Sigma_F} I(\chi_v \cdot |\cdot|_v^{\nu/2})$ のもとで、

$$\bigotimes_{v \in \Sigma_{\infty}} f_{0, \chi_v}^{(\nu)} \otimes \bigotimes_{v \in S(\mathfrak{nf}_X^{-2})} \tilde{f}_{j_v, \chi_v}^{(\nu)} \bigotimes_{v \in \Sigma_{\text{fin}} - S(\mathfrak{nf}_X^{-2})} \tilde{f}_{0, \chi_v}^{(\nu)}$$

に対応するものを $f_{\chi, \rho}^{(\nu)} \in I(\chi \cdot |\cdot|_{\mathbb{A}}^{\nu/2})^{\mathbf{K}_{\infty} \mathbf{K}_0(n)}$ とする。Proposition 16 と Proposition 17 により、次が成り立つ。

Proposition 18. 任意の添え字 ρ に対して $f_{\chi, \rho}^{(\nu)}$ の $\mathbf{K}$ への制限は ν に依らない、すなわち平坦切断である。また、もし $\nu \in i\mathbb{R}$ なら有限集合 $\{f_{\chi, \rho}^{(\nu)}\}_{\rho}$ は $I(\chi \cdot |\cdot|_{\mathbb{A}}^{\nu/2})^{\mathbf{K}_{\infty} \mathbf{K}_0(n)}$ の正規直交基底である。

添え字 ρ を固定し、 $f_{\chi, \rho}^{(\nu)}$ から定まる Eisenstein 級数 $E_{\chi, \rho}(\nu, g)$ について考察する。

$k \in \{1, \dots, n\}$ に対して、 $U_k(\rho)$ 、 $R_k(\rho)$ 、 $R_0(\rho)$ を以下のように定義する：

$$U_k(\rho) := \{v \in S(\mathfrak{nf}_X^{-2}) | j_v = k\} - S(\mathfrak{f}_X)$$

$$R_k(\rho) := \{v \in S(\mathfrak{nf}_X^{-2}) | j_v = k\} \cap S(\mathfrak{f}_X)$$

$$R_0(\rho) := (\{v \in S(\mathfrak{nf}_X^{-2}) | j_v = 0\} \cap S(\mathfrak{f}_X)) \cup (S(\mathfrak{f}_X) - S(\mathfrak{nf}_X^{-2})).$$

また $k \geq 0$ に対して、

$$S_k(\rho) := \begin{cases} R_0(\rho) & (\text{if } k = 0) \\ U_k(\rho) \cup R_k(\rho) & (\text{if } k \geq 1) \end{cases},$$

$R(\rho) := \bigcup_{k=0}^n R_k(\rho)$, $S(\rho) := \bigcup_{k=0}^n S_k(\rho)$ とおく。

η を $(\star)$ を満たす $\mathbb{A}^{\times}/F^{\times}$ の Hecke 指標とする。アイゼンシュタイン級数 $E_{\chi, \rho}(\nu, g)$ からその定数項 $E_{\chi, \rho}^{\circ}(\nu, g)$ を引いたものの大域ゼータ積分を明示的に計算するために、任意の $v \in \Sigma_{\text{fin}} - S(\mathfrak{f}_{\eta})$ と $k \in \mathbb{N}_0$ に対して多項式 $Q_{k, \chi_v}^{(\nu)}(\eta_v, X)$ を以下のように定める (cf. Corollary 11):

- $v \in \Sigma_{\text{fin}} - S(\mathbf{f}_\chi)$ に対して、

$$Q_{k,\chi_v}^{(\nu)}(\eta_v, X) := \begin{cases} 1 & (\text{if } k = 0) \\ \eta_v(\varpi_v)X - \frac{\chi_v(\varpi_v)q_v^{-\nu/2} + \chi_v(\varpi_v)^{-1}q_v^{\nu/2}}{q_v^{1/2} + q_v^{-1/2}} & (\text{if } k = 1) \\ q_v^{-1}\eta_v(\varpi_v)^{k-2}X^{k-2} \\ \times (\chi_v(\varpi_v)q_v^{(1-\nu)/2}\eta_v(\varpi_v)X - 1)(\chi_v(\varpi_v)^{-1}q_v^{(1+\nu)/2}\eta_v(\varpi_v)X - 1) & (\text{if } k \geq 2) \end{cases}$$

- $v \in S(\mathbf{f}_\chi)$ に対して、

$$Q_{k,\chi_v}^{(\nu)}(\eta_v, X) := \eta_v(\varpi_v)^k X^k.$$

Proposition 19.

$E_{\chi,\rho}^{\natural}(\nu, g) := E_{\chi,\rho}(\nu, g) - E_{\chi,\rho}^{\circ}(\nu, g)$ とおく。 $E_{\chi,\rho}^{\natural}(\nu, -)$ は左 B_F -不変であり、

$$\begin{aligned} Z^*(s, \eta, E_{\chi,\rho}^{\natural}(\nu, -)) &= (2\pi)^{\#\Sigma_{\mathbb{C}}} \mathcal{G}(\eta) D_F^{-\nu/2} N(\mathbf{f}_\chi)^{1/2-\nu} \\ &\times B_{\chi,\rho}^{\eta}(s, \nu) \frac{L(s + \nu/2, \chi\eta) L(s - \nu/2, \chi^{-1}\eta)}{L(1 + \nu, \chi^2)}, \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、

$$\begin{aligned} &B_{\chi,\rho}^{\eta}(s, \nu) \\ &= D_F^{s-1/2} \left\{ \prod_{k=0}^n \prod_{v \in S_k(\rho)} Q_{k,\chi_v}^{(\nu)}(\eta_v, q_v^{1/2-s}) L(1 + \nu, \chi_v^2) \right\} \\ &\times \prod_{v \in U_1(\rho)} (1 + q_v^{-1}) q_v^{-\nu/2} \prod_{k=2}^n \prod_{v \in U_k(\rho)} \left(\frac{q_v + 1}{q_v - 1} \right)^{1/2} q_v^{-k\nu/2} \\ &\times \left\{ \prod_{k=0}^n \prod_{v \in R_k(\rho)} q_v^{d_v/2 - k\nu/2} (1 - q_v^{-1})^{1/2} \overline{\mathcal{G}(\chi_v)} \right\} \prod_{v \in \Sigma_{\text{fin}} - R(\rho)} \chi_v(\varpi_v)^{d_v}. \end{aligned}$$

とした。

以上の準備の下で、 $E_{\chi,\rho}(\nu, -)$ の η -正規周期は以下のように明示的に表される。

Theorem 20.

$S(\mathbf{f}_\chi) = \emptyset$ なら $\nu \in i\mathbb{R}$ を仮定する。この時 $P_{\beta,\lambda}^{\eta}(E_{\chi,\rho}(\nu, -))$ は $\text{Re}(\lambda) > 1$ となる任意の $(\beta, \lambda) \in \mathcal{B} \times \mathbb{C}$ に対して絶対収束する。もし $S(\mathbf{f}_\chi) \neq \emptyset$

なら $P_{\beta,\lambda}^\eta(E_{\chi,\rho}(\nu, -))$ は任意の $(\beta, \lambda) \in \mathcal{B} \times \mathbb{C}$ に対して絶対収束する。
さらに $P_{\text{reg}}^\eta(E_{\chi,\rho}(\nu, -))$ は定義できて、

$$P_{\text{reg}}^\eta(E_{\chi,\rho}(\nu, -)) = (2\pi)^{\#\Sigma_{\text{c}}} \mathcal{G}(\eta) D_F^{-\nu/2} N(\mathbf{f}_\chi)^{1/2-\nu} \\ \times B_{\chi,\rho}^\eta(1/2, \nu) \frac{L((1+\nu)/2, \chi\eta) L((1-\nu)/2, \chi^{-1}\eta)}{L(1+\nu, \chi^2)}.$$

Proof. 簡単にするため $S(\mathbf{f}_\chi) \neq \emptyset$ の場合のみ示す。 $v \in S(\mathbf{f}_\chi)$ に対する local new form の明示式により、任意の $t \in \mathbb{A}^\times / F^\times$ に対して

$$E_{\chi,\rho}^\circ \left(\nu, \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_\eta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 0$$

となることが分かる。よって $P_{\beta,\lambda}^\eta(E_{\chi,\rho}^\circ(\nu, -)) = 0$ が任意の $(\beta, \lambda) \in \mathcal{B} \times \mathbb{C}$ に対して成り立つ。ここで $f_{\chi,\rho}^\eta(z, \nu) := Z^*(z+1/2, \eta, E_{\chi,\rho}^\natural(\nu, -))$ とおけば Proposition 19 により、 $S(\mathbf{f}_\chi) \neq \emptyset$ の時は $f_{\chi,\rho}^\eta(z, \nu)$ は z の関数として整関数である。以上の考察により、積分の順序交換をすれば、

$$P_{\beta,\lambda}^\eta(E_{\chi,\rho}(\nu, -)) = P_{\beta,\lambda}^\eta(E_{\chi,\rho}^\natural(\nu, -)) \\ = \int_{F^\times \backslash \mathbb{A}^\times} \{ \hat{\beta}_\lambda(|t|_\mathbb{A}) + \hat{\beta}_\lambda(|t|_\mathbb{A}^{-1}) \} E_{\chi,\rho}^\natural \left(\nu, \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_\eta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ \times \eta(t) \eta_{\text{fin}}(x_{\eta, \text{fin}}) d^\times t \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \{ f_{\chi,\rho}^\eta(z, \nu) + f_{\chi,\rho}^\eta(-z, \nu) \} \frac{\beta(z)}{\lambda+z} dz$$

となる。ただし $\sigma > -\text{Re}(\lambda)$ である。これにより任意の $(\beta, \lambda) \in \mathcal{B} \times \mathbb{C}$ に対して $P_{\beta,\lambda}^\eta(E_{\chi,\rho}(\nu, -))$ が収束することと $P_{\beta,\lambda}^\eta(E_{\chi,\rho}(\nu, -))$ は λ の関数として整関数であることは示された。さらに留数定理により、

$$\text{CT}_{\lambda=0} P_{\beta,\lambda}^\eta(E_{\chi,\rho}(\nu, -)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \{ f_{\chi,\rho}^\eta(z, \nu) + f_{\chi,\rho}^\eta(-z, \nu) \} \frac{\beta(z)}{z} dz \\ = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} - \int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty} \right) f_{\chi,\rho}^\eta(z, \nu) \frac{\beta(z)}{z} dz \\ = \text{Res}_{z=0} \left\{ f_{\chi,\rho}^\eta(z, \nu) \frac{\beta(z)}{z} \right\} \\ = f_{\chi,\rho}^\eta(0, \nu) \beta(0) \\ = Z^*(1/2, \eta, E_{\chi,\rho}^\natural(\nu, -)) \beta(0)$$

となるから、Proposition 19 により η -正規周期の明示式も得られた。
 $S(\mathbf{f}_\chi) = \emptyset$ の時は $P_{\beta,\lambda}^\eta(E_{\chi,\rho}^\circ(\nu, -))$ が zero でないので長い議論が必要である (cf. [8]). $\square$

REFERENCES

- [1] D. Bump, *Automorphic Forms and Representations*, Cambridge University Press, 1998.
- [2] R. Godement, *Notes on Jacquet-Langlands' theory*, The Institute for Advanced Study, 1970.
- [3] D. Goldfeld, *Automorphic Forms and L-Functions for the Group $GL(n, \mathbb{R})$* , Cambridge University Press, 2006.
- [4] H. Jacquet, R. P. Langlands, *Automorphic Forms on $GL(2)$* , Springer Lecture Notes in Mathematics, 1970.
- [5] B. Roberts, R. Schmidt, *Local new forms for $GSp(4)$* , Lecture Notes in Mathematics **1918**, Springer, 2007.
- [6] R. Schmidt, *Some remarks on local newforms for $GL(2)$* , J.Ramanujan Math. Soc., **17**, 115-147, 2002.
- [7] H. Shimizu, *Automorphic functions* (in Japanese), Iwanamishoten, 1978.
- [8] S. Sugiyama, *Regularized periods of automorphic forms on $GL(2)$* , preprint.
- [9] M. Tsuzuki, *Spectral means of central values of automorphic L-functions for $GL(2)$* , preprint.
- [10] A. Yukie, *Shintani Zeta Functions*, Cambridge University Press, 1994.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE, OSAKA
UNIVERSITY, TOYONAKA, OSAKA 560-0043, JAPAN

E-mail address: s-sugiyama@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp