

MHD の非粘性境界層

航 技 研 井 上 建 二

1. は し が き

無限遠方で一様な速度 U に平行な一様な磁場 H_∞ がかかっている電気伝導度 σ の大きな流体の中に、不導体の物体を入れると、その表面に磁気境界層とよばれる厚さ δ のうすい電流の層ができる。磁気境界層の外では、流体の速度は磁場といたるところで平行で、その大きさの比は無限遠での比に等しい。以下流体は非圧縮非粘性、物体は二次元、流れは定常であるとする。

2. 基礎方程式

磁気境界層を支配する方程式および境界条件は Sears によって与えられていて¹⁾

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\mu}{4\pi\rho} (H_x \frac{\partial H_x}{\partial x} + H_y \frac{\partial H_x}{\partial y}) &= (1-\alpha^2) u_1 \frac{du_1}{dx}, \\ -\frac{\partial H_x}{\partial y} &= 4\pi\sigma\mu (uH_y - vH_x), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで x は物体の前方よどみ点から物体表面にそつ距離、 y は物体表面から法線方向の距離、 u 、 v はそれぞれ流体の速度の x 、 y 方向の成分、 H_x 、 H_y はそれぞれ磁場の x 、 y 方向の成分、 ρ は流体の密度、 μ は流体の透磁率、 $u_1(x)$ は u の境界層外縁での値、また α^2 は

$$\alpha^2 = \frac{\mu}{4\pi\rho} \frac{H_\infty^2}{U^2}$$

である。境界条件は

$$y=0 \text{ で } v=0, H_x=0; y \rightarrow \delta \text{ で } u \rightarrow u_1, H_x \rightarrow \frac{H_\infty}{U} u_1.$$

ここでは $\alpha^2 < 1$ 、すなわち超 Alfvén 流の場合のみを考える。

変換：

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad H_x = \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad H_y = -\frac{\partial \chi}{\partial x}; \\ \xi &= \frac{\phi}{u\ell}, \quad \eta = \left(\frac{1-\alpha^2}{2\nu_m\phi}\right)^{\frac{1}{2}} u_1 y; \\ \psi &= \left(\frac{2\nu_m\phi}{1-\alpha^2}\right)^{\frac{1}{2}} G(\xi, \eta), \quad \chi = \alpha \left(\frac{8\pi\rho\nu_m\phi}{1-\alpha^2}\right)^{\frac{1}{2}} F(\xi, \eta) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

をおこなって(1)を無次元化すると

$$\begin{aligned} G \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} - \beta \left(\frac{\partial G}{\partial \eta}\right)^2 - 2\xi \left(\frac{\partial G}{\partial \eta} \frac{\partial^2 G}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial G}{\partial \xi} \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2}\right) + (1-\alpha^2)\beta \\ = \alpha^2 \left\{ F \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} - \beta \left(\frac{\partial F}{\partial \eta}\right)^2 - 2\xi \left(\frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

$$(1-\alpha^2) \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} = \frac{\partial G}{\partial \eta} F - \frac{\partial F}{\partial \eta} G + 2\xi \left(\frac{\partial G}{\partial \eta} \frac{\partial F}{\partial \xi} - \frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\partial G}{\partial \xi}\right) \quad (4)$$

となる。ここで $\nu_m = \frac{1}{4\pi\sigma}$, $\phi = \int_0^X u_1 dx$, ℓ は代表的な長さ, $\beta(\xi) = \frac{2\phi}{u_1^2} \frac{du_1}{dx}$ である。境界条件は

$$\eta = 0 \text{ で } G = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \eta} = 0; \quad \eta \rightarrow \infty \text{ で } \frac{\partial G}{\partial \eta} = \frac{u}{u_1} \rightarrow 1,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = \frac{UH_x}{H_\infty u_1} \rightarrow 1 \quad (5)$$

となる。変換(2)の中に $(1-\alpha^2)^{\frac{1}{2}}$ の因子を含めたのは次の理由による。 $R_m = \alpha\mu U\ell$ で磁気レイノルズ数を定義すれば、粘性境界層の場合との類推から、磁気境界層の厚さは $R_m^{-\frac{1}{2}}$ に比例する。ところが流体が電導性をもち磁場がかかっているときには、磁場がないときとちがって、じょう乱は Alfvén 波の速度で磁力線にそってその前後に伝播するので、境界層はある因子だけ厚くなる。その因子が $(1-\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ であることは、伴流についての研究の結果²⁾ から予想される。すなわち磁気境界層の厚さは $O(\{(1-\alpha^2)R_m\}^{-\frac{1}{2}})$ であると考えられる。

3. 磁場が弱い場合の相似解

磁場が非常に弱いとき $\alpha^2 = 0$ とおくことができ、(3), (4)は(5)をみたす解として ξ によらな

い

$$G = \eta, \quad F = \eta \operatorname{erf} \frac{\eta}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{\eta^2}{2}}$$

をもつ。すなわちこの場合、速度は磁場によって影響されない。この解は円柱の場合に対する玉田の解³⁾を含んでいる。

4. $0 < \alpha^2 < 1$ の場合の相似解

G, F が ξ によらず β が定数の場合には (3), (4) は

$$G G'' - \beta (G'^2 - 1) = \alpha^2 \{ F F'' - \beta (F'^2 - 1) \}, \quad (6)$$

$$(1 - \alpha^2) F'' = G' F - G F' \quad (7)$$

となる。ただしダッシュは η についての微分を示す。

この方程式はすでに Lewellen⁴⁾ や Sears and Mori⁵⁾ によって研究されている。Lewellen は G, F として α^2 の級数に展開した形を仮定して解いた。しかし彼の解は $\eta = 0$ で発散する積分を含んでいる上に、収束が悪く、 α が小さい場合にしか使えない。Sears and Mori は方程式を α を含まない形に変換し、 $\eta = 0$ 付近での級数解を出発値とする数値積分によって解を求めた。彼等の方法では G, F の η の大きいところでの漸近的な性質から α を決定する。あらかじめ与えられた α の値に対する解をえることはできない。ここでは G, F の η が大きいところでの漸近解を出発値として境界層の外縁から数値積分をおこなうことを試みる。

境界条件(5)から G, F は η の大きいところでは

$$G \sim \eta + K, \quad F \sim \eta + K$$

の形をしていることがわかる。ここで K は未定定数である。これに小さな補正 $g(\eta), f(\eta)$ を加えて

$$G = \eta + K + g, \quad F = \eta + K + f$$

とする。これを(6)に代入し、 g, f およびその微分の積の項を小さいとして無視し、 $\eta \rightarrow \infty$ のとき $g, f \rightarrow 0, g', f' \rightarrow 0$ でなければならないことを用いると

$$g = \alpha^2 f \quad (8)$$

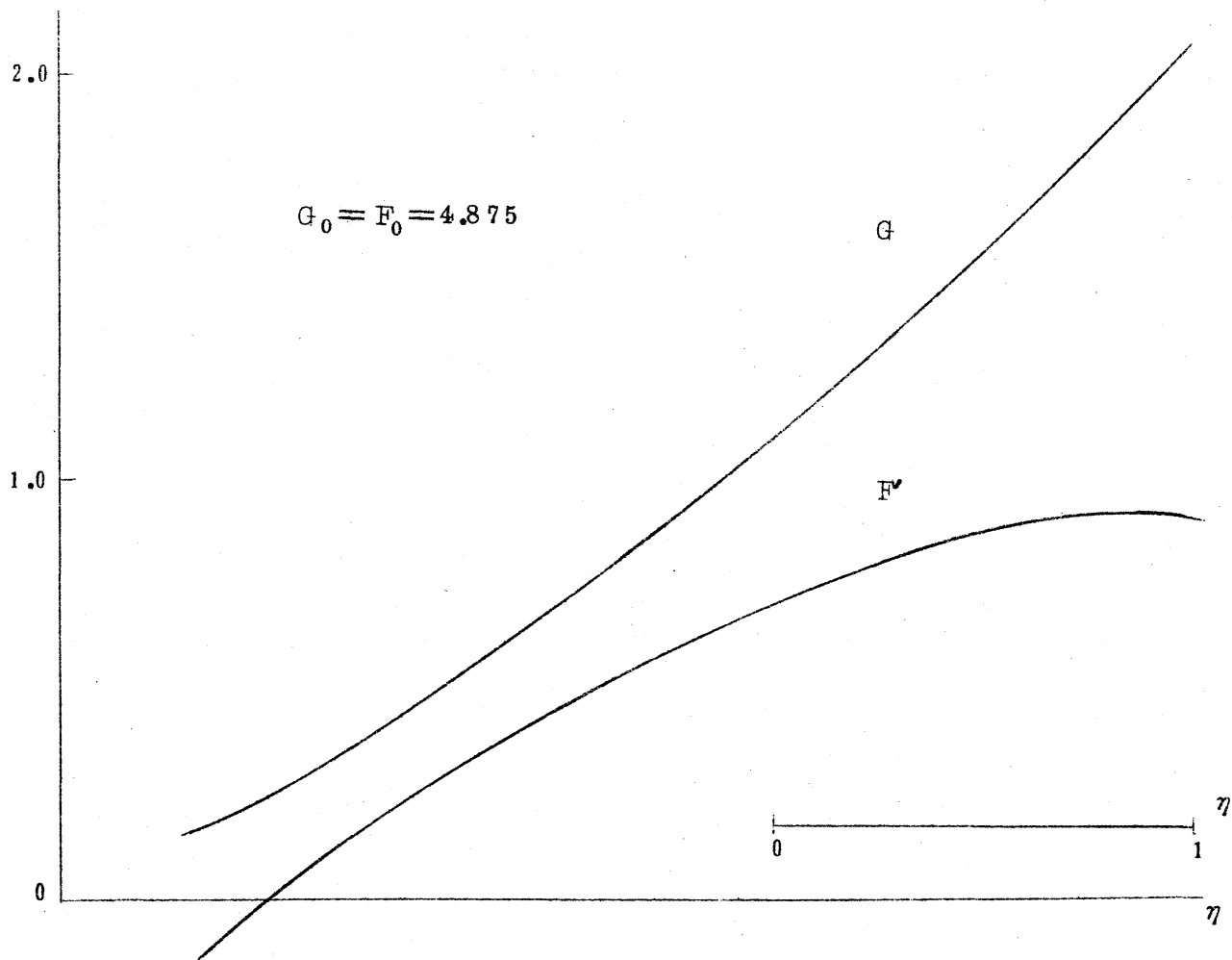
の関係をうる。これから η の大きいところでは

$$1 - G' \doteq \alpha^2 (1 - F') , \quad G \doteq F$$

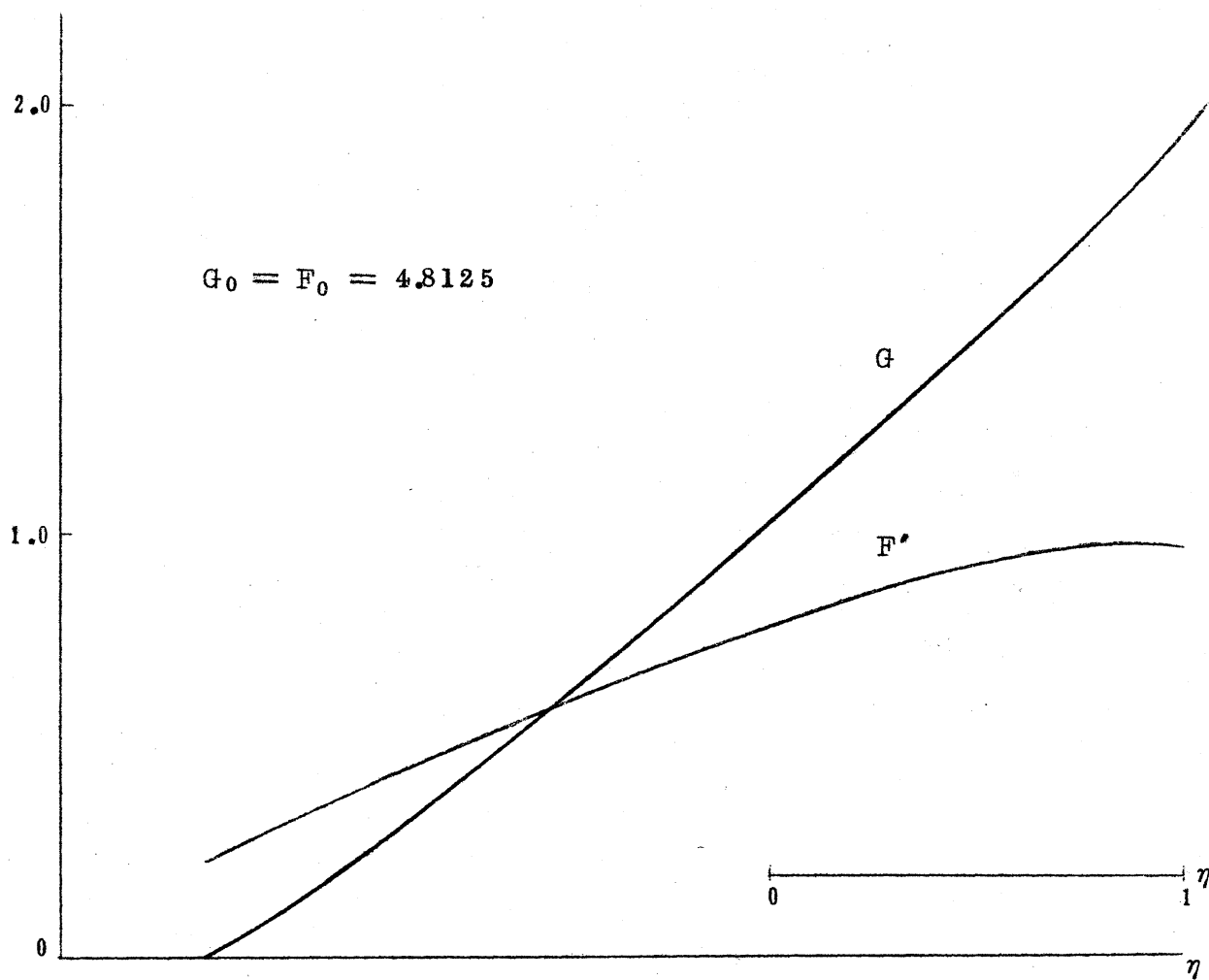
としてよいだろう。

この結果を用いて数値積分をおこなうには次のようにすればよい。方程式は η をあらわに含まないで出発点における η の値は適当にえらべる。例えば $\alpha^2 = 0.5$ のとき $G'_0 = 0.999995$, $F'_0 = 0.999990$ とし, 適当な $G_0 = F_0$ を与えて積分をおこない, G と F' が同時に 0 になるように出発点での $G_0 = F_0$ を調節する。 G と F' が同時に 0 になるような結果がえられたならば, その点を $\eta = 0$ とする。

この過程の一例を第一図 a, b に, またえられた結果の例を第二図 a, b および第三図 a, b に与えた。

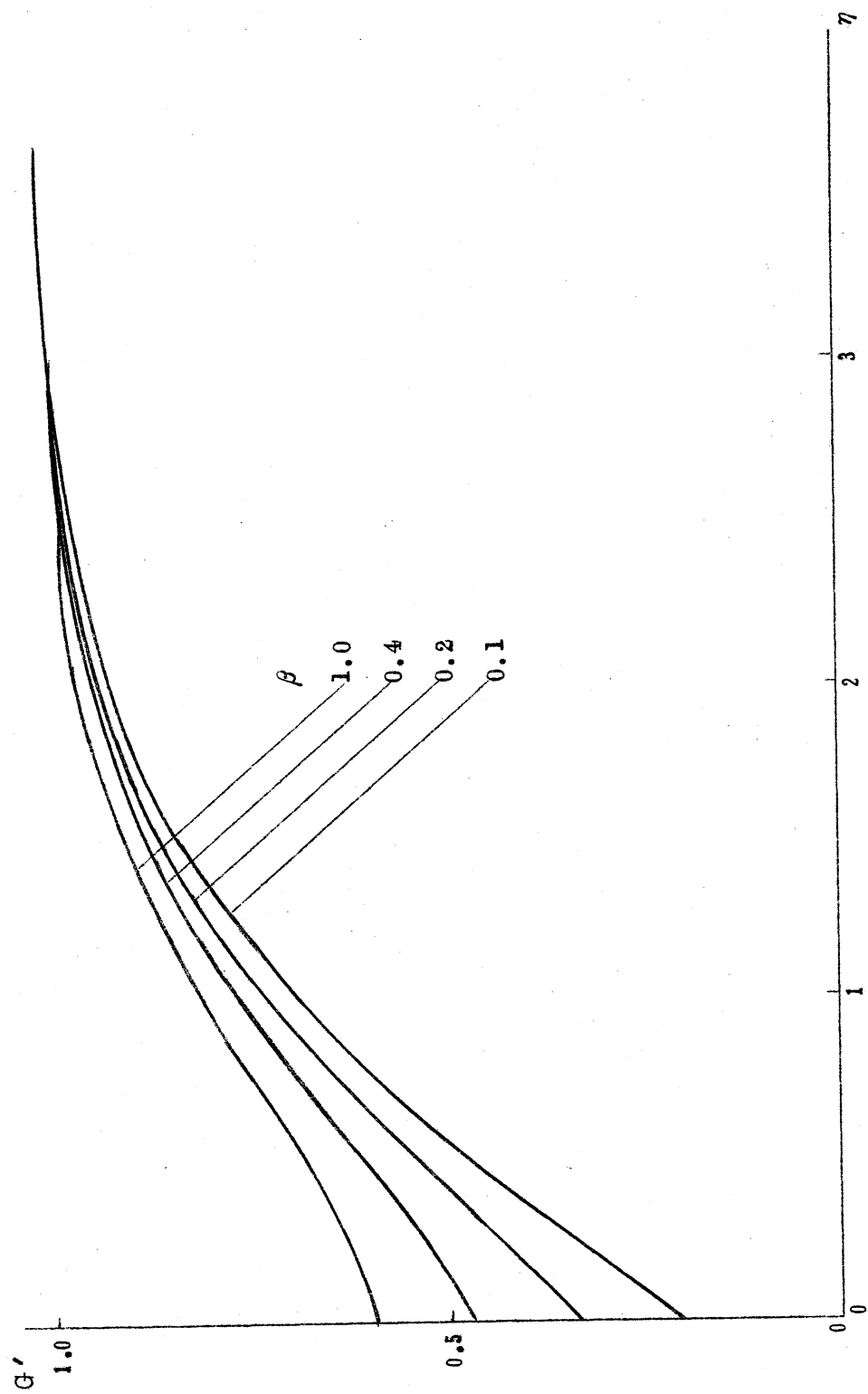


第一図 a.

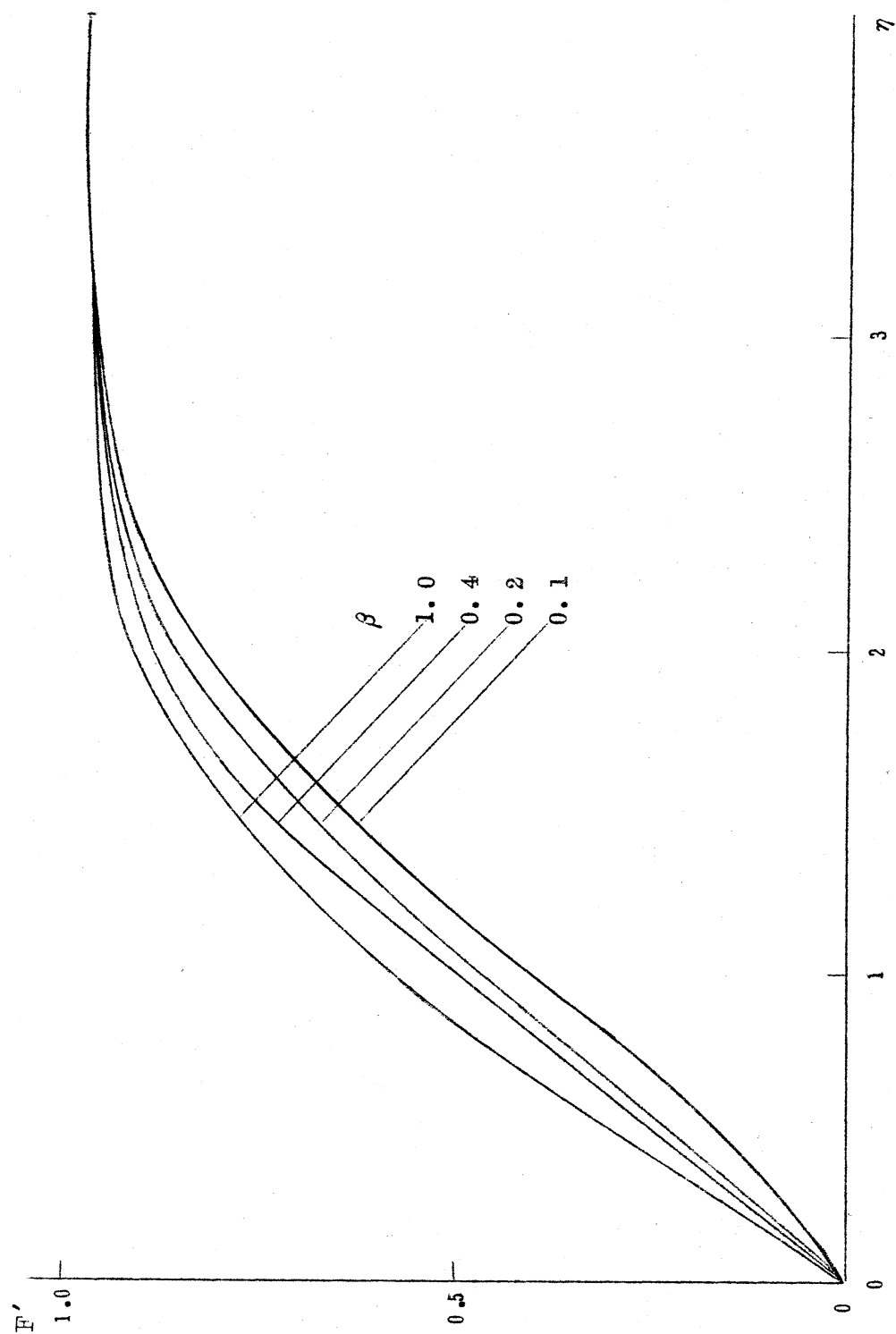


第一圖 b.

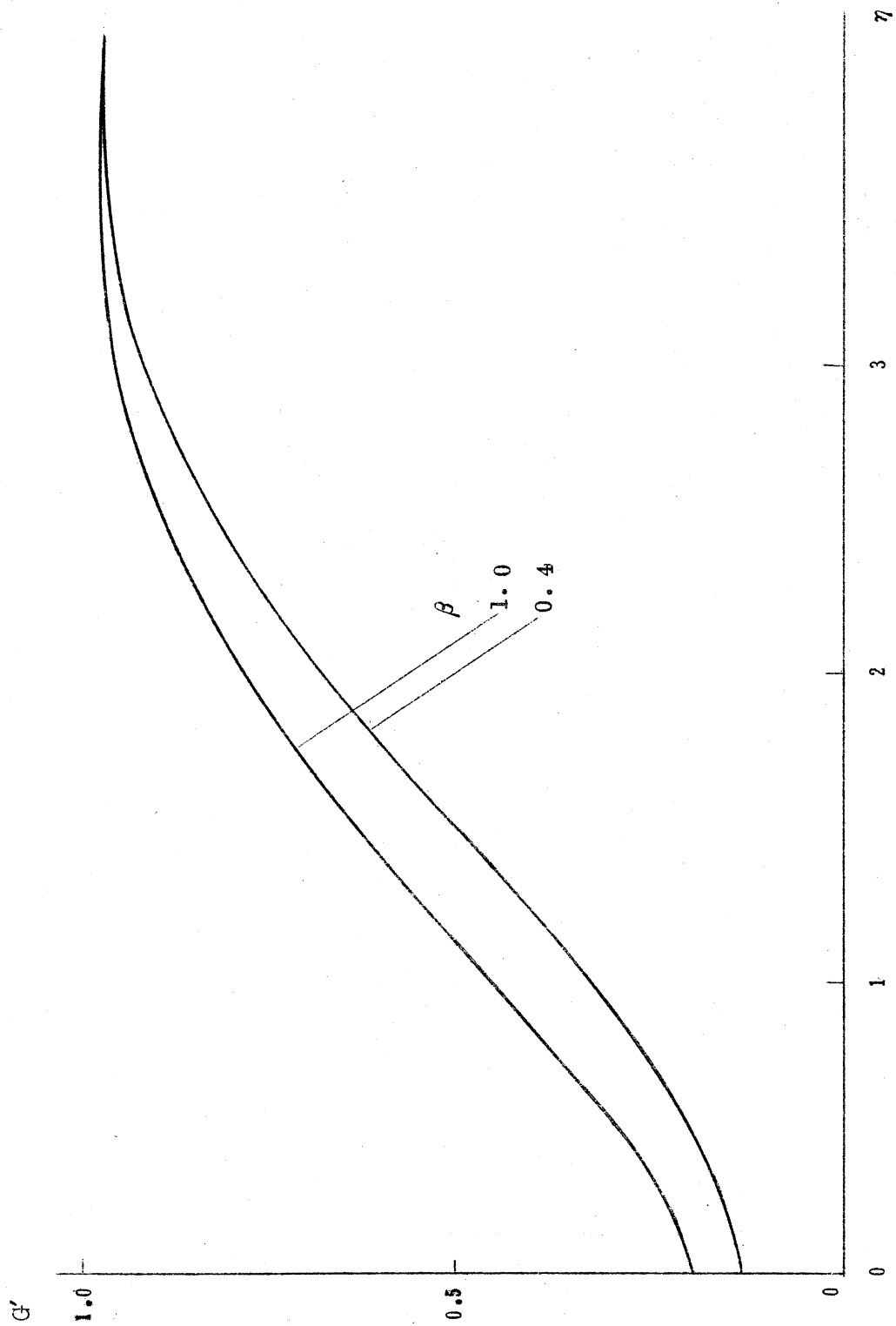
$$\alpha^2 = 0.5, \beta = 1, \quad G_0 = 0.9999995, \quad F'_0 = 0.9999990$$



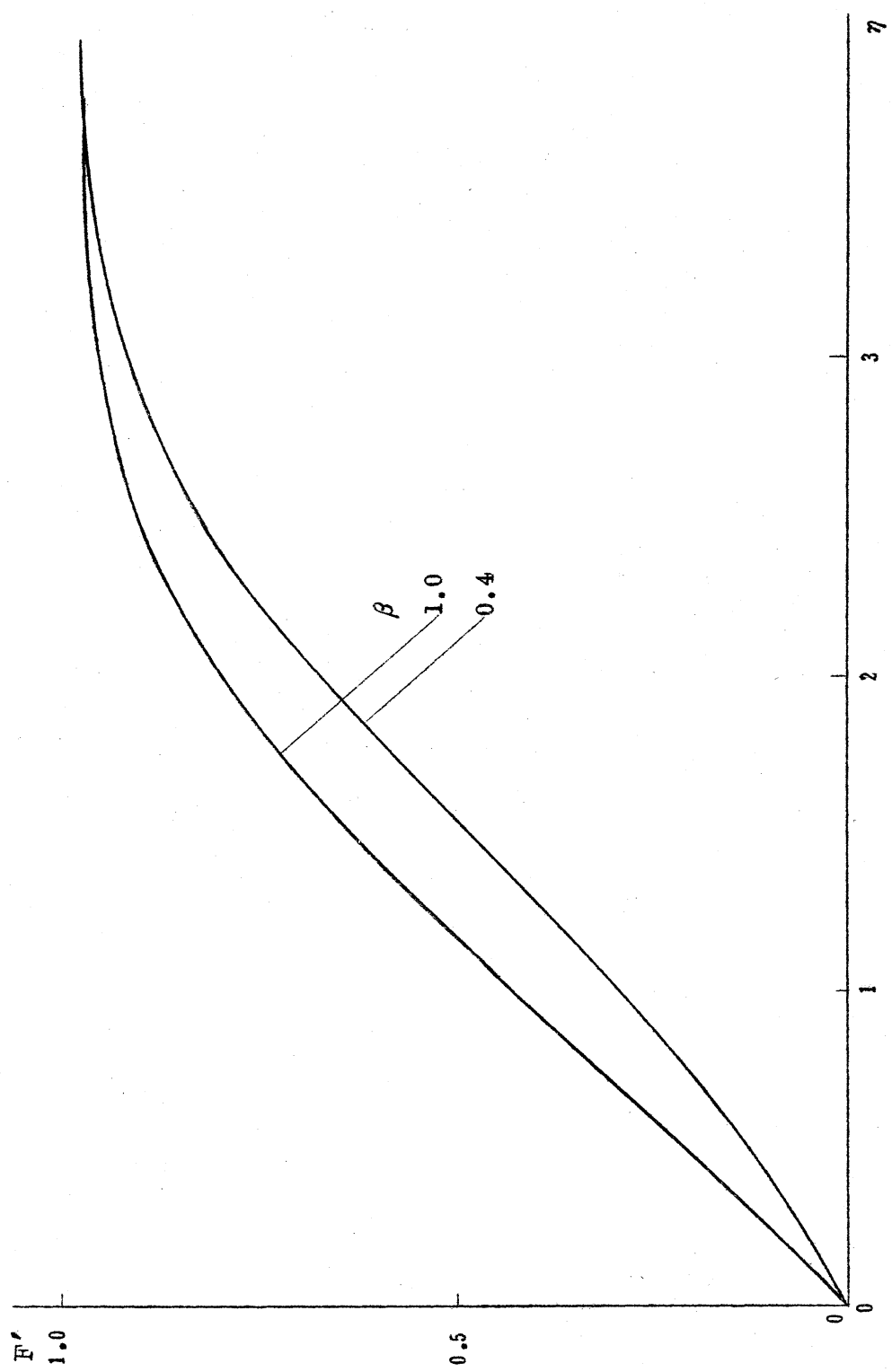
第二图 a. $\alpha^2 = 0.5$



第二图 b. $\alpha^2 = 0.5$



第三圖 a. $\alpha^2 = 0.9$



第三圖 b. $\alpha^2 = 0.9$

引用文献

- 1) Sears, W.R. Astronaut, Acta 7, 223 (1961)
- 2) 例えば Hasimoto, H. Appl. Mech. Rev. 16 , 253 (1963)
- 3) Tamada, K. J. Phys. Soc. Japan 19, 1415 (1964)
- 4) Lewellen, W.S. AFOSR-TN-59-927, Cornell Univ. (1959)
- 5) Sears, W.R. and Mori, Y. Progress in Applied Mechanics
(Macmillan, 1963) 3.