

高階の微分作用素の生成する半群

山形大. 理

中里 博 (Hiroshi Nakazato)

§1. 設定 および 基本的な例

G : Lie 群, K : G のコンパクト部分群
(例えば, $K = \{e\}$) とし.

G の等質 Riemann 空間 G/K への作用

$$G \curvearrowright G/K \quad g \cdot hK = (gh)K, \quad g, h \in G$$

および G の $C_0(G/K)$ への作用

$$G \curvearrowright C_0(G/K); (g \cdot f)(x) = f(g^{-1}x) \\ g \in G, f \in C_0(G/K), x \in G/K$$

を考える. ただし $C_0(G/K)$ は, G/K 上の複素数値連続関数で, 無限遠点で 0 となるもの全体とする. D を G/K 上の G -不変^(*)

な微分作用素とする. ただし, D の定義域

$\mathcal{D}(D)$ は, G/K 上の無限回連続微分可能なコンパクト台をもつ関数の全体 $C_c^\infty(G/K)$ とする.

[^(*)] 即ち, $g(Df) = D(gf), \quad \forall f \in C_c^\infty(G/K), \forall g \in G$

[[問]] 1. D は, どのような条件の下で, $C_0(G/K)$ における強連続一径数半群 $\{T_t\}_{t \geq 0}$ の前生成

作用素になるか? 即ち, 11つ

$$T_0 = I, \quad T_{t+s} = T_t \circ T_s, \quad t, s \geq 0,$$

$$\|T_t f - f\|_\infty \rightarrow 0 \quad \text{as } t \downarrow 0$$

$$\text{for } \forall f \in C_0(G/K)$$

$$Df = s\text{-}\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{T_t f - f\} : \forall f \in C_c^\infty(G/K)$$

$$\text{かつ } \overline{D} = s\text{-}\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{T_t - I\} \quad (\text{定義域の一致を念のため})$$

となるか?

2. D が生成作用素である場合に,

$\{\exp tD\}_{t \geq 0}$ の基本解をどう求めるか?

次に, 簡単な例を $\Rightarrow$ 考える

ここで $G = \mathbb{R}$, $K = \{0\}$, $G/K = \mathbb{R}$ とする

$$\textcircled{1} \quad D = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2}$$

$$(T_t f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) e^{-\frac{y^2}{2t}} dy$$

$$f \in C_0(\mathbb{R}) \quad (t > 0, x \in \mathbb{R})$$

基本解 $f_t(x)$

$$f_t(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} e^{-\frac{t\lambda^2}{2}} d\lambda$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} \quad (t > 0) \quad \text{で}$$

与えられ, $f_t \in L^1(\mathbb{R}, dx) \quad (t > 0)$ である

$$f_t(x) = t^{-\frac{1}{2}} f_1(t^{-\frac{1}{2}} x) \quad \left(\begin{array}{l} t > 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{array} \right) \text{ が成立する.}$$

$$\textcircled{2} \quad D = -\frac{d^2}{dx^2} \quad f \in C_0(\mathbb{R}) \text{ に対し}$$

$$\begin{aligned} (T_t f)(x) &= (f * f_t)(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) f_t(y) dy \end{aligned}$$

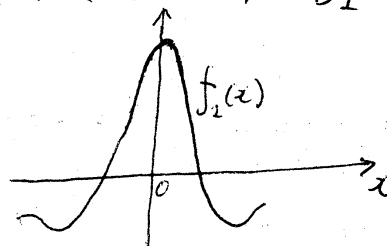
$$\text{基本解 } f_t \text{ は, } f_t(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} e^{-ty^2} dy$$

$(t > 0, x \in \mathbb{R})$ で与えられ,

(*) $f_t(x) = t^{-\frac{1}{2}} f_1(t^{-\frac{1}{2}}x)$, $\forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}$
 が成り立つ. f_1 は Schwartz 空間に属するから,
 $f_1 \in L^1(\mathbb{R}, dx)$ となり, さらに上記の(*)より

$$\|f_t\|_{L^1} = \|f_1\| (< \infty) (\forall t > 0) \text{ となることが}$$

わかる. $x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-x^2}$ が $\mathbb{R}$ 上の正定値関数ではないことから, f_1 が負の値も取ることがわかる.



§2. Langlands の定理 及び その一般化の限界

まず可微分多様体 M (n 次元) 上の微分作用素 (= 反変テンソル場) D を局所座標系 $(U, x_1, \dots, x_n)$ を用いて

$$D = \sum_{i_1 + i_2 + \dots + i_n \leq m} a_{i_1, i_2, \dots, i_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial^{i_1 + i_2 + \dots + i_n}}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \dots \partial x_n^{i_n}}$$

と U 上で表示する.

ただし, $a_{i_1, \dots, i_n}$ は U 上の C^∞ 級の複素数値関数とする. このとき, 点 $(x_1, \dots, x_n)$ における

D の 主表象 principal symbol :

$$\sigma(D)(x) \quad \text{を} \quad \sigma(D)(x; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \\ = \sum_{i_1 + i_2 + \dots + i_n = m} a_{i_1, \dots, i_n}(x_1, \dots, x_n) \sqrt{-1}^{i_1 + i_2 + \dots + i_n} \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \dots \xi_n^{i_n}$$

$(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in \mathbb{R})$ なる齊次多項式として

定める.

定義. M 上の微分作用素 D に対し
次の条件が成り立つとき, D は 強楕円型
である (strongly elliptic) といい: m は偶数
かつ 各 $x \in M$ に対し, $\exists \rho_x > 0$
$$\operatorname{Re} \sigma(D)(x; \xi_1, \dots, \xi_n) \geq \rho_x (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2)^{\frac{m}{2}}$$

for $\forall (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$

[[R. P. Langlands の定理 ([1], [2])]]

D が Lie 群 G 上の左不変な強楕円型偏微分作用素 ならば, $-\bar{D}$ は $C_c(G)$ における強連続一径数半群 (さらに実はもっと強く, 正則半群) の生成作用素となる. //

この定理の系として 仮定に 次の結論 が得られる.

系. D を Lie 群 G 上の左不変な強楕円型の偏微分作用素とする. このとき, D は $L^2(G, d\rho)$ において [ただし ρ は G 上の左不変 Haar 測度]

$$-\infty < M < \infty : \operatorname{Re} (D\xi, \xi)_{L^2(G)} \geq M(\xi, \xi)_{L^2(G)} \\ \text{for } \forall \xi \in C_c^\infty(G)$$

を満たす. //

さて, 上述の定理及び系の結論が成立するためには, D が強楕円型であることは必要であるか? 次のような例より必要条件ではないことがわかる.

(例) G を 3次元 Heisenberg 群とし, G の Lie 環を $\mathfrak{g}$ とし, $\mathfrak{g}$ の基底 $\{X, Y, Z\}$:

$$[X, Y] = Z, \quad [X, Z] = [Y, Z] = 0 \quad \text{を取る.}$$

$$\text{このとき, } D = (-1)^n (X^2 + Y^2 + Z^2)^n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$\tilde{D} = (-1)^n (X^2 + Y^2)^n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

なる G 上の左不変微分作用素 $D, \tilde{D}$ を考える. D は強楕円型であるが, $\tilde{D}$ は強楕円型ではない. しかしながら, $-D, -\tilde{D}$ とともに $C_c(G)$ における強連続一径数半群を生成する (cf. [4])

そこで, Langlands 型の定理 を成立させる
 十分条件の候補 として, 筆者 は, 次の 1), 2), 3)
 を 提案 した II.

まず, G を Lie 群, $\mathfrak{g}$ を G の Lie 環,
 $\mathfrak{g}^*$ を 実線形空間 $\mathfrak{g}$ の 共役空間 として,
 $\mathfrak{g}$ の 基底 $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 及び $\mathfrak{g}$ の 双対基底 $\{X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*\}$
 を取る. G 上の 左不変な m 階の 微分作用素

$$D \text{ を } D = \sum_{\substack{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_k \leq n \\ 0 \leq k \leq m}} a_{i_1, i_2, \dots, i_k} X_{i_1} X_{i_2} \dots X_{i_k} \\ , a_{i_1, \dots, i_k} \in \mathbb{C}$$

と表示する. ただし, 各 $2 \leq k \leq m$ に対して

$$a_{i_{\sigma(1)}, i_{\sigma(2)}, \dots, i_{\sigma(k)}} = a_{i_1, i_2, \dots, i_k}$$

$\forall \sigma \in S_k : (S_k \text{ は } \{1, 2, \dots, k\} \text{ の置換の全体})$

とする. このとき, D の 主表象 $\sigma(D)$ を
 $\mathfrak{g}^*$ 上の 多項式関数 として

$$\sigma(D) (\xi_1 X_1^* + \xi_2 X_2^* + \dots + \xi_n X_n^*) \\ = \sum_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_m \leq n} \sqrt{-1}^m a_{i_1, i_2, \dots, i_m} \xi_{i_1} \xi_{i_2} \dots \xi_{i_m}$$

と定める. (この関数は 基底 $\{X_1, \dots, X_n\}$ の取り方に
 依らず, $\mathfrak{g}^*$ 上の 関数 として一意) . そこで, 次の
 三条件 を考える 1) $\operatorname{Re} \sigma(D)(\xi) \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathfrak{g}^* ;$
 2) $\mathcal{N} \equiv \{ \xi \in \mathfrak{g}^* : \sigma(D)(\xi) = 0 \}$ が $\mathfrak{g}^*$ の 線形部分空間

$$\text{となる;} \quad 3^\circ) \quad \sigma(D)(\xi + \eta) = \sigma(D)(\xi)$$

$$\forall \xi \in \mathcal{D}^*, \quad \forall \eta \in \mathcal{L} \quad ;$$

この条件に関して、次の例より、条件 1°) を満たすだけでは、前出の系の結論が導き出せないことがわかる [さらに、次の例を少しあてめると、1°), 2°) を満たし、3°) を満たさず、系の結論が成立しないという例も作れる]

(例) G を 3次元 Heisenberg 群とし、先ほどの例のように $\mathcal{D}$ の基底を取り、

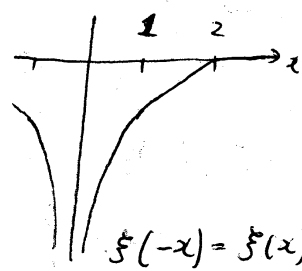
$$D = X^2 Y^2 + Y^2 X^2 + X Y Y X + Y X X Y + X Y X Y + Y X Y X$$

で与えられる 4 階の左不変微分作用素 D を考える。 D は、前出の条件 1°) を満たす。

$\overline{D}^{L^2(G)}$ は、 $L^2(G)$ における 対称 (閉) 作用素となる。ここで、 $\overline{D}$ が、下に有界とはならないことが次のようにしてわかる。 $\pi_t \quad (t \in \mathbb{R}, t \neq 0)$ を G の既約 unitary 表現で、 χ_η を $\mathcal{U}(\mathcal{D})$ に拡張したものが、 $(\pi_t(X) \xi)(x) = -\frac{d}{dx} \xi(x)$ $(\pi_t(Y) \xi)(x) = 2itx \xi(x)$, $\xi \in L^2(\mathbb{R}), x \in \mathbb{R}$ を満たすものとする [π_t の表現空間は $L^2(\mathbb{R}, dx)$]

このとき, $\pi_t(D) = -6t^2 x^2 \frac{d^2}{dx^2} - 12t^2 x \frac{d}{dx} - 3t^2 I$

であり, $\pi_t(D) = -t^2 \pi_1(D) \quad (t \in \mathbb{R}, t \neq 0)$

$$\xi(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{8} - x^{-\frac{1}{4}} & : 0 < x \leq 1 \\ -\frac{1}{8}(x-2)^2 & : 1 < x \leq 2 \\ 0 & : 2 < x \end{cases}$$


なる関数 $\xi \in L^2(\mathbb{R})$ に対して

$$(\pi_1(D) \xi | \xi)_{L^2(\mathbb{R})} \leq 0.$$

§3 コンパクト群上の強楕円型微分

作用素の生成する半群

まず, G を中心有限な非コンパクト・半単純 Lie 群
 K を G の極大コンパクト群とし, 非コンパクト型の
 対称 Riemann 空間 G/K を考える. このとき G/K
 上の G -不変な強楕円型微分作用素 D が
 生成する半群 $\{\exp(tD)\}_{t \geq 0}$ の基本解

$\{f_t\}_{t \geq 0} \subset L^1(K \backslash G/K)$ は, 次のような特殊な
 場合に対しては, $\mathbb{R}^n$ における Fourier 変換と
 Abel 変換の反転を用いて求めることができる

I) G が複素 Lie 群の場合 II) G の real
 rank が 1 である場合, III) $G = SU(p, q)$ の場合

(cf [4])

ここでは, G を単連結なコンパクト半単純 Lie 群, A を G の一つの極大トーラス,

D を G 上の両側不変な強楕円型微分作用素 とするとき,

$$\exp\{-t\bar{D}\}(f) = f * f_t \quad (t > 0)$$

$f \in L^1(G)$ なる基本解 $(f_t)_{t>0} \subset L^1(G)$

$[f_t(x) = f_t(yx) \quad \forall x, y \in G]$ を, A 上の微分作用素の生成する半群との関連で求める.

$\mathcal{O}$: A の Lie 環 $\exp: \mathcal{O} \rightarrow A$

を考え, $a \in \mathcal{O}$ に対し, $j(a)$: Weyl の指標公式に於ける分母とすれば,

$$f \in C(G)_{st.} \quad f(gxg^{-1}) = f(x) \quad \forall g, x \in G$$

$$\text{に 対 し,} \quad \int_G f(g) d\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Haar 測度}}}{g} = \int_A f(a) |j(a)|^2 da \quad [\text{積分公式}]$$

[熱方程式の基本解] (浦川 [3])

D : G 上の Laplace-Beltrami 作用素 とすれば, $\exp(-t\bar{D})(f) = f * f_t \quad (t > 0)$

なる $f_t \in L^1(G)$ に 対 し て, 次のような

公式が成り立つ:

$$\begin{cases} f_t(\exp a) \cdot j(a) \\ = C e^{t(\delta, \delta)} \prod_{\alpha > 0} \partial_{t_\alpha}(h_t)(\exp a) \end{cases}$$

($a \in \mathcal{O}$) , $t > 0$: C は定数 $\neq 0$.

ただし $(h_t)_{t>0}$ は A 上の Laplacian $\dot{D}$ に対する

$$\exp\{-t \dot{D}\}(\varphi) = \varphi * h_t \quad (t > 0), \quad \varphi \in L^1(A)$$

なる基本解. $\alpha > 0$... 正のルート ($\alpha \in \mathcal{O}^*$)

$$t_\alpha \in \mathcal{O} : \beta(t_\alpha) = (\alpha, \beta) \quad \forall \beta \in \mathcal{O}^*$$

$$(\partial_{t_\alpha} \psi)(\exp a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \{ \psi(\exp(a + h t_\alpha)) - \psi(\exp a) \},$$

$$\delta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} \alpha.$$

上記の公式は, 次のように一般化される

D : G 上の両側不変な (高階の) 強楕円型
微分作用素 とするとき,

$\{\exp(-t \bar{D})\}_{t \geq 0}$ の基本解 (の A への制限)

$\sum_{\lambda \in p^+} e^{-t Q(\lambda + \delta)} \chi_\lambda(\exp a)$ が, A 上の関数

$\sum_{\mu \in p} e^{-t Q(\mu)} e_\mu(\exp a)$ を 正のルートに

対応する方向に偏微分を有限回施して

得られる関数を用いて表示される:

(G, A) なる pair に対して

P : 整形式の全体の成す格子

P^+ : 優整形式の全体

χ_λ ($\lambda \in P^+$): λ に対応する G の既約 unitary 表現の指標

e_μ ($\mu \in P$): μ に対応する A の一次元 unitary 表現

W : (G, A) に対する Weyl 群

とすると, 強楕円型作用素 D に対し

$$D(\chi_\lambda) = Q(\lambda + \delta) \chi_\lambda \quad (\forall \lambda \in P^+)$$

となる $\mathcal{O}^*$ 上の W -不変な多項式 Q が存在

(Brezin の定理) し, Q の最高次部分を Q_m

とすれば, $\min \{ \operatorname{Re} Q_m(\beta) : \beta \in \mathcal{O}^*, |\beta|=1 \} > 0$

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{\lambda \in P^+} e^{-t Q(\lambda + \delta)} \chi_\lambda(\exp a) \cdot j(a) \\ &= C \cdot \prod_{\alpha > 0} \partial_{t_\alpha} \left(\sum_{\mu \in P} e^{-t Q(\mu)} e_\mu(\exp a) \right) \end{aligned} \right.$$

C は定数, $C \neq 0$

参考文献

- [1] R. P. Langlands "Semigroups and Representation of Lie groups" (Yale Univ. thesis.) 1960.
- [2] R. P. Langlands "Some holomorphic semigroups" Proc. NAS '60
- [3] H. Urakawa "the Heat Equations on Compact Lie groups" Osaka J. Math. 12 (1975)
- [4] H. Nakazato "Semigroups generated by higher order..." preprint '87.