

Weighting 行列について

愛媛大 教育 大森博之 (Hiroyuki Ohnori)

$W = W(n, k)$ が位数 n , ウェイト k の weighting 行列とは成分が $0, 1, -1$ で各行各列の非零要素の個数が一定 (k) の $n \times n$ 直交行列の事である。特に $W(n, n)$ は P サーマール 行列 (位数 n) と呼ばれている。

2つの行列 $W_1 = W_1(n, k)$, $W_2 = W_2(n, k)$ が与えられている時, W_1 と W_2 が同値であるとは一方の行列に対し, 適当な行又は列に -1 を乗じ又適当な行又は列の置換を施す事により他方の行列が得られる時をいう。

この同値関係により与えられた位数 n のウェイトを持つ weighting 行列全体を分類する問題を考える。この事に関して今まで知られている事は以下の通りである (文献 [1])。

$W(n, k)$ において

$k \leq 5$ に対して すべての n について。

$n \leq 11$ に対して すべての k について。

今回は $W(12, k)$ ($1 \leq k \leq 12$) の分類が完成されたのでその方法の概説及び結果を報告したい。詳しくは [6] を参照されたい。

(1)

。構成

一般の n, k に対して $W(n, k)$ が存在する為のいくつかの必要条件が知られている (文献 [3])。例えば (i)

n が奇数の時 k は平方数かつ $(n-k)^2 + (n-k) + 1 \geq n$ 。(ii)

$n \equiv 2 \pmod{4}$ の時 $k \leq n-1$ かつ k は 2つの平方数の和。

又, $n \equiv 0 \pmod{4}$ の時 すべての k ($1 \leq k \leq n$) に対して $W(n, k)$ が存在するだろうという予想もある。所々 n, k を与えた時 $W(n, k)$ を具体的に又同値でないものをすべて構成するには次の方法が一般的である。

$W(n, k)$ を与えられた時 任意の 1 行 (例えば i 行) を固定した時 i 行と他の行が直交する為には 同時に 0 でない成分の個数が偶数でなくてはならない。そこで i 行と $2j$ 行所で同時に 0 でない成分をもつような行の個数を p_{2j} とする。この時 i 行は intersection pattern $(p_0, p_2, p_4, \dots)$ を持つという事にする。すると $(p_0, p_2, p_4, \dots)$ は次の 2つの方程式を満たす事がわかる。

$$(1) \quad \sum_{i=0}^{\infty} p_{2i} = n-1, \quad (2) \quad \sum_{i=0}^{\infty} i p_{2i} = k(k-1)/2$$

上の方程式を IPC と呼ぶ事にする。

今 $(p_0, p_2, p_4, \dots)$ が IPC の解とする。この時 $(p_0, p_2, p_4, \dots)$ は intersection pattern とは持つような $W(n, k)$ が常に存在する訳ではない。

(2)

$W(12,6)$ を例にとりみる。IPC の解は 6 組存在する。

$$(P_0, P_2, P_4, P_6) = (2, 3, 6, 0), (1, 5, 5, 0), (2, 4, 4, 1), (0, 8, 2, 1), \\ (0, 7, 4, 0) \text{ と } (1, 6, 3, 1)$$

上の解を順に $P_1, \dots, P_6$ とする。この時 P_1 から構成したものと P_6 から構成したものはもし存在したとすればそれは同値である事がわかる。しかし P_1 を intersection pattern としても行列は存在しない事が証明される ([6])。

P_3 の場合 3 行まで一般性を失う事なく固定出来るが残りの行を決定するのにいくつかの場合があるが、同値により場合の数と少くしその場合 場合に依りて逐次構成する事により 10 個の行列を得る (必ずしも非同値という訳ではない)。他の P_i に対しても同様にして行列を構成する。

他の $W(12, k)$ ($4 \leq k \leq 10$) に対しても上の例と全く同様の方法で weighing 行列を構成する。尚 $W(12, i)$ ($1 \leq i \leq 3$) は一意的 $W(12, 4)$, $W(12, 5)$ はそれぞれ 5, 2 個の同値でないものが知られている ([1])。

○ 分類

2 つの weighing 行列が同値か否かの判定に自己同形群とか、線形符号の立場からの最小距離 として フォスル ([2]) が有用である事が良く知られている。

$W(12, k)$ ($6 \leq k \leq 10$) の分類には、4 行を選んで来る
(3)

generalized inner product を用いる。即ち $W = W(R, k)$
 $= (w_{ij})$ に対し 各 i 行に対し 又 i', i'', i''' に対し

$$(*) \quad \sum_{j=1}^k |w(i, j) \cdot w(i', j) \cdot w(i'', j) \cdot w(i''', j)|$$

の値の分布を考える (全体で $11C_3$)。又 i 行に対し
ベクトル $g(i) = (g_0^{(i)}, \dots, g_k^{(i)})$ と対応させる。(ここには
 $g_0^{(i)}$ は $(*)$ の値からとれる組 $\{i', i'', i'''\}$ の数。)

更に W に対し $g(i)$ の重複度を考慮に入れた表を想定
する事を求める。この表 (G -表) が異なれば 2つの行列
は同値ではない。このような表の考えは位数 28 の
アダマール行列の分類に用いた k -行列と類似する ([5])。

。結論

以上の考えのもとで $W(R, k)$ ($6 \leq k \leq 10$) の同値で
ない行列及びこれらの G -表を結果のみ表示する。
尚 行列の中で $-$ は -1 と又 空白は 0 と表わすものとする。
また、行列 X_i に対し $*$ をつけた場合 X_i と X_i^T (X_i
の転置行列) は同値でない事を示し もし $*$ がない時は
 X_i と X_i^T は同値である事を示す。 $W(12, 11)$ 及び
 $W(12, 12)$ の一意性はそれぞれ [1] 及び [4] で示されている。

結果 1. 位数 12, ウェイト 6 の Weighing 行列の同値でないものの個数は 7. 行列及び G-表は以下の通り.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & \\ 1 & - & & & & & 1 & 1 & - & - & - & \\ & 1 & - & & & & & 1 & - & - & - & \\ 1 & & & - & & & & & 1 & - & 1 & \\ 1 & & & & - & & & & & 1 & 1 & \\ & - & - & 1 & & 1 & - & & & & & \\ & & 1 & - & 1 & - & & & & & & \\ 1 & & & & 1 & - & & & & & & \\ & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ & & & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_2^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & \\ 1 & - & & & & & 1 & 1 & - & - & - & \\ 1 & & - & & & & & 1 & - & - & - & \\ 1 & & & 1 & - & - & & & & 1 & 1 & \\ 1 & & & & - & & & & & & 1 & \\ & 1 & 1 & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & \\ & & & & & & & & & 1 & 1 & \\ & & & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & \\ 1 & - & & & & & 1 & 1 & - & - & - & \\ 1 & & 1 & - & - & & & & & & 1 & \\ 1 & & & 1 & - & & & & & & & \\ 1 & & & & - & & & 1 & 1 & - & - & \\ & 1 & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ & & 1 & - & 1 & - & & & & & & \\ & & & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_4^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & \\ 1 & - & & & & & 1 & 1 & - & - & - & \\ 1 & & - & & & & & 1 & - & - & - & \\ 1 & & & - & & & & & & 1 & 1 & \\ 1 & & & & - & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & \\ & & & & & & & & & 1 & 1 & \\ & & & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & \\ 1 & - & & & & & 1 & - & & 1 & - & \\ 1 & 1 & 1 & - & - & - & & & & & & \\ 1 & & - & 1 & - & & & 1 & - & & & \\ 1 & & & & 1 & & & & & & 1 & \\ & 1 & & & & & & 1 & - & & & \\ & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ & & & & & & & 1 & 1 & 1 & - & \\ & & & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Matrices	Mult.	0	1	2	3	4	5	6
E_1	12	115	40	10	0	0	0	0
E_2	4	125	30	8	2	0	0	0
	8	124	33	5	3	0	0	0
$(E_2)^T$	4	117	38	8	2	0	0	0
	8	112	47	5	1	0	0	0
E_5	12	115	40	10	0	0	0	0
E_{14}	12	148	0	16	0	1	0	0
$(E_{14})^T$	12	112	48	4	0	1	0	0
G_2	4	125	32	6	0	2	0	0
	8	122	36	6	0	1	0	0

尚 E_1 と E_5 は 3 行の generalized inner product の絶対値の分布を考へる事により同値でない事がわかる。

結果2。 位数12, ウェイト7の Weighing 行列の同値でないものの個数は3。 行列及びそのG-表は以下の通り。

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & - & - & - & 1 \\ 1 & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & & 1 & - & & - & - & - & - \\ & & 1 & - & 1 & - & - & - & - & - \\ 1 & - & & & 1 & & - & & 1 & - \\ 1 & - & & & 1 & & - & & 1 & - \\ 1 & & - & - & 1 & & - & - & 1 & - \\ & 1 & - & - & & 1 & - & & 1 & - \\ & & 1 & - & 1 & - & & 1 & & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & - & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & & 1 & - & - & & 1 & - & - & 1 \\ 1 & & & 1 & - & & - & & 1 & - \\ 1 & & & & 1 & - & & & 1 & - \\ 1 & & & & & 1 & - & & 1 & - \\ & 1 & 1 & & & - & - & 1 & & 1 \\ & 1 & - & - & & 1 & & & 1 & 1 \\ & 1 & - & & 1 & & & 1 & - & 1 \\ & 1 & & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - \\ & 1 & & & 1 & - & & 1 & & - \end{bmatrix}$$

$$A_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & - & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & & 1 & - & - & & 1 & - & - & - \\ 1 & & & - & & 1 & & & 1 & - \\ 1 & & & & - & 1 & & 1 & - & - \\ 1 & & 1 & - & & & 1 & - & - & - \\ 1 & & & 1 & - & - & - & & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & & - & - & & 1 & & 1 \\ & 1 & - & 1 & & & 1 & & - & 1 \\ & 1 & - & & & 1 & & - & 1 & 1 \\ & 1 & & - & 1 & & & 1 & & - \\ & 1 & & & 1 & - & 1 & 1 & & - \\ & 1 & & & 1 & - & & 1 & & - \end{bmatrix}$$

Matrices	Mult.	0	1	2	3	4	5	6	7
A_1	12	77	64	22	0	2	0	0	0
A_3	12	45	100	20	0	0	0	0	0
A_8	12	45	100	20	0	0	0	0	0

結果3。 位数12, ウェイト8の Weighing 行列の同値でないものの個数は6。 行列及びそのG-表は以下の通り。

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & - \\ 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - \\ 1 & 1 & - & - & & & 1 & 1 \\ 1 & - & 1 & - & & & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ - & 1 & - & 1 & & & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & - & & 1 & & & & - & 1 & 1 & 1 \\ - & 1 & 1 & - & & & & - & 1 & 1 & 1 \\ & & & & 1 & - & 1 & - & & - & 1 & 1 \\ & & & & - & 1 & - & 1 & - & & - & 1 \\ & & & & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - & 1 \\ & & & & - & 1 & 1 & - & 1 & - & - & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & - \\ 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - \\ 1 & 1 & - & - & & & 1 & 1 \\ 1 & - & 1 & - & & & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ - & 1 & & & 1 & - & & - & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & - & 1 & & & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 \\ & & & & - & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & 1 \\ & & & & & & - & 1 & - & 1 & - & 1 \\ - & 1 & 1 & - & & & & 1 & - & - & 1 & 1 \\ 1 & - & & & 1 & - & & - & - & - & 1 \end{bmatrix}$$

(6)

$$A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & - \\ 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - \\ 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - \\ 1 & - & - & 1 & - & - & - & - \\ - & 1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 \\ - & - & 1 & - & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 \\ - & - & - & 1 & - & - & 1 & - & 1 & 1 \\ 1 & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 & - & 1 \\ 1 & - & - & - & - & 1 & - & 1 & - & 1 \\ - & 1 & - & - & - & 1 & 1 & - & - & 1 \\ - & - & 1 & 1 & - & - & - & - & - & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_7 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & - \\ 1 & - & - & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 \\ - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 \\ - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & 1 \\ - & - & - & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & 1 \\ - & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & 1 \\ 1 & - & - & - & - & 1 & - & - & 1 & - \\ 1 & 1 & - & - & - & - & 1 & - & - & 1 \\ - & - & 1 & 1 & - & - & - & 1 & - & - & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & - \\ 1 & - & - & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 \\ - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 \\ - & 1 & 1 & - & 1 & - & - & 1 & 1 \\ 1 & - & 1 & - & - & 1 & - & 1 & 1 \\ - & - & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & 1 \\ - & 1 & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 \\ 1 & 1 & - & - & - & - & - & 1 & - & 1 \\ - & - & 1 & 1 & - & - & - & 1 & - & 1 \\ - & - & - & 1 & 1 & - & 1 & - & - & 1 \end{bmatrix}$$

Matrices	Mult	0	1	2	3	4	5	6	7	8
A_1	12	144	0	0	0	20	0	0	0	1
A_3	4	108	0	48	0	8	0	0	0	1
	8	114	0	40	0	9	0	2	0	0
A_3^T	4	111	0	40	0	14	0	0	0	0
	8	123	0	28	0	12	0	2	0	0
A_6	4	81	32	0	0	12	0	0	0	0
	8	72	48	36	0	5	4	0	0	0
A_7	4	102	0	56	0	5	0	2	0	0
	8	103	0	53	0	8	0	1	0	0
A_8	12	104	0	50	0	11	0	0	0	0

結果4。位数12, ウェイト9の Weighing 行列の同値で
ものの個数は4。行列及びそのG-表は以下の通り。

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & - & 1 \\ 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - & 1 \\ 1 & 1 & - & - & - & 1 & 1 & - & 1 \\ - & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 & 1 & 1 \\ - & - & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 & 1 \\ 1 & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 \\ - & 1 & 1 & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 \\ - & - & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 \\ - & - & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & - & 1 \\ 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - & 1 \\ 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 \\ - & - & - & 1 & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 \\ - & - & 1 & - & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & 1 \\ 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & 1 & 1 \\ - & 1 & 1 & - & - & - & 1 & - & - & 1 & 1 \\ - & 1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 \\ 1 & - & - & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 \\ - & 1 & - & 1 & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & - & 1 \\ 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - & 1 \\ 1 & - & 1 & - & 1 & - & - & - & 1 \\ - & - & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & - & - & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 \\ - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 \\ 1 & - & - & - & 1 & - & - & 1 & 1 \\ - & 1 & - & - & - & 1 & 1 & - & 1 \\ 1 & - & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 \\ 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_9 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & - & 1 \\ 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - & 1 \\ 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 \\ 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 \\ - & - & 1 & 1 & - & - & - & 1 & 1 \\ - & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 \\ - & 1 & - & - & 1 & - & 1 & 1 & - \\ 1 & - & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 \\ 1 & - & 1 & - & 1 & - & - & - & 1 \end{bmatrix}$$

Matrices	Mult.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A_1	12	48	32	64	0	20	0	0	0	1	0
A_3	12	55	12	72	14	6	6	0	0	0	0
A_4	12	55	16	72	8	6	8	0	0	0	0
A_9	12	73	0	48	32	12	0	0	0	0	0

結果5。位数12, ウェイト10の Weighing 行列の同値でないものの個数は4。行列及びそのG-表は以下の通り。

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & - & - \\ 1 & 1 & - & - & - & 1 & 1 & - & - & 1 \\ 1 & - & - & 1 & 1 & - & - & 1 & - & 1 \\ - & 1 & - & - & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 \\ - & - & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & - & - & - & 1 & 1 & - & 1 \\ 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & 1 & 1 \\ - & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & - & - & 1 \\ - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_4^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & - & - \\ 1 & 1 & - & - & - & 1 & 1 & - & - & 1 \\ 1 & - & - & 1 & 1 & - & - & 1 & - & 1 \\ - & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 \\ - & - & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & - & 1 & - & - & 1 & - & 1 & - \\ 1 & - & - & 1 & - & 1 & 1 & - & - & 1 \\ - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & 1 \\ 1 & - & 1 & - & - & 1 & - & 1 & - & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & - & - \\ 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - & 1 \\ 1 & - & - & 1 & 1 & - & - & 1 & - & 1 \\ - & - & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 \\ - & 1 & - & 1 & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & - & - & - & 1 & 1 & - & 1 \\ 1 & - & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 \\ 1 & - & 1 & - & - & 1 & - & 1 & - & 1 \\ - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - & - & 1 \\ - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 \end{bmatrix}$$

Matrices	Mult.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A_1	12	80	0	40	0	40	0	0	0	5	0	0
A_4	12	100	0	24	0	24	0	16	0	1	0	0
A_4^T	12	80	0	40	0	40	0	0	0	5	0	0
A_8	12	80	0	32	0	32	0	8	0	1	0	0

参考文献

[1] H.C. Chan, C.A. Rodger and J. Seberry, On inequivalent weighing matrices, *Ars Combinatoria*, 21-A (1986), 299-333.

[2] J. Coopen, J. Milas and W.D. Wallis, Hadamard equivalence, Vol 686 (1976), 126-135, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

[3] A.V. Geramita and J. Seberry, "Orthogonal Designs: Quadratic Forms and Hadamard Matrices", Marcel Dekker, New York-Basel, 1979.

[4] Q.M. Husain, On the totality of the solutions for the symmetric incomplete block designs: $\lambda=2$, $k=5$ or 6 , *Sankya* 7 (1945).

[5] H. Kimura and H. Ohmori, Construction of Hadamard Matrices of Order 28, *Graphs and Combinatorics* 2(1986), 247-257.

[6] H. Ohmori, On the classifications of weighing matrices of order 12. (to appear).