

# Block one-step methods と scaled one-step methods について

広島大学校教育 新谷 尚義 ( Hisayoshi Shintani )

## 1. まえかき

### 初期値問題

$$(1.1) \quad y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

を考える。ただし、 $f$  は十分滑らかな関数であるとする。

$y(x)$  で (1.1) の解を表し、

$$(1.2) \quad x_t = x_0 + th \quad (h > 0, t \geq 0)$$

とし、 $y_t$  で  $y(x_t)$  の近似値を表す。

$0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$  とし、 $y_{ti} \ (i = 1, 2, \dots, n)$  を求める

*explicit block one-step method*

$$(1.3) \quad y_t = y_0 + h \sum_{i=1}^{m_t} p_i t_i k_i \quad (t = t_1, t_2, \dots, t_n)$$

を考える。ただし、

$$(1.4) \quad k_1 = f(x_0, y_0),$$

$$(1.5) \quad k_i = f(x_0 + a_i h, y_0 + h \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} k_j),$$

$$(1.6) \quad a_i = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} \quad (i = 2, 3, \dots)$$

であり、 $t_i$  は整数とは限らない。

$m = \max_{1 \leq i \leq n} m_{ti}$  とする。この方法は, *multistep method* の出発値を求めるためや, 1 step 当りの  $f$  の計算量をへらすためなどに用いられる ([1], [2], [5], [7] - [12], [15])。

また, order  $p$  の *one-step method*

$$(1.7) \quad y_1 = y_0 + h \sum_{i=1}^p p_i k_i$$

を基にして,  $f$  を  $r$  回追加計算することによって *off-step point* での補間ができるようにする *scaled one-step method*

$$(1.8) \quad y_t = y_0 + h \sum_{i=1}^{p+r} p_{it} k_i \quad (t \neq 0, 1)$$

も考えられている ([6], [13], [14])。 *graphical output* が要求される場合や,  $g(x, y(x), y'(x)) = 0$  となる  $x$  を見つける問題の場合などには, 任意個の任意の点での補間が必要になる。

これら 2 つの方法は, 互いに関連があるので, ここでまとめて論じたい。

## 2. Block one-step methods

### 2.1 $n = 2$ の場合

$$t_1 = 1, \quad t_2 = 2, \quad m_1 = m_2 = m, \quad y_i \quad (i = 1, 2)$$

は order  $p_i$  の方法であり,

$$(2.1) \quad e = h \sum_{i=1}^m g_i k_i = O(h^r)$$

$$(2.2) \quad e^* = h \sum_{i=1}^{m+1} g_i k_i = O(h^q)$$

$k_{m+1} = f(x_2, y_2)$  とする。筆者 (1966, 1977, 1987) は

表1のような結果をえた。

表 1

| $m$   | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|-------|---|---|---|---|---|
| $P_1$ | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| $P_2$ | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| $r$   | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| $s$   | 4 |   | 5 |   |   |

Cash (1987) は, Fehlberg の 5(4) 公式を  $y_1$  に選い  
 $(m_1=6)$ ,  $k=f(x_1, y_1)$  とし,  $m_2=9$  で  $y_2$  が order 6 で, order  
 4 の公式を embed するものを求めた。彼は  $y_i$  と  $y'_i$  ( $i=0, 1, 2$ )  
 を使って, 5 次エルミート 補間多項式で  $[x_0, x_2]$  の任意の点  
 での補間をすることを提案している。この補間の仕方は,  
 $f$  を余分に計算しないのが特長である。

## 2. 2. $t_i$ が整数の場合

Rosser (1967) は,  $m=n(n+3)/2$  のとき  $y_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ )  
 を order  $n$  にでき,  $n=2p$  のとき  $m=n(n+3)/2+1$  で,  
 $y_i$  ( $i=1, 2, \dots, n-1$ ) が order  $n$ ,  $y_n$  が order  $n+1$  に  
 できることを示した。

$$(2.3) \quad y_i = y(x_i) + h^{p+1} p_i + O(h^{p+2}) \quad (i=1, 2, \dots, p)$$

とすると, Cash (1983) は,  $p_j = j p_1$  ( $j = 2, 3, \dots, p$ )

となるものを求め, つぎの結果を示した.

order 2 のものが  $m_1 = 2, m_2 = 3$  でえられ,

order 3 のものが  $m_1 = 3, m_2 = 5, m_3 = 6$  でえられ,

order 4 のものが  $m_1 = 5, m_2 = 9, m_3 = 11, m_4 = 12$  で

えられる.  $y_i$  ( $i = 0, 1, \dots, p$ ) を使って, 3 任意の点で補間  
ができる.

筆者は, 条件  $p_j = p_1$  ( $j = 2, 3, \dots, p$ ) の下で, つぎの結果を  
えている.

order 2 のものが  $m = 3$ , order 3 のものが  $m = 6$ , order 4  
のものが  $m = 9$  でえられる.

### 2.3 $t$ が任意の場合

Gear (1980) は,  $h^i y^{(i)}(x_0)$  を

$$(2.4) \quad y_0^{(i)} = h \sum_{j=1}^m c_{ij} k_j = h^i y^{(i)}(x_0) / i! + O(h^{p+1})$$

( $i = 1, 2, \dots, p$ )

の形で近似し,

$$(2.5) \quad y_t = y_0 + \sum_{i=1}^p t^i y_0^{(i)}$$

で任意の  $t > 0$  に対して  $y(x_t)$  の近似値を求めることを考える.

彼は,

$m = 4$  のとき order 3 のものが存在し,

$m = 6$  のとき order 4 のものが存在し,

order 5 のものが存在するためには,  $m \geq 9$  でなければならぬことを示した。

筆者 (1987) は,  $\alpha$  を任意の正数とすると表 2 のような結果をえた。

表 2

| order \ $m$                  | 3 | 4 | 6 | 9 |
|------------------------------|---|---|---|---|
| $y_t$ の order ( $t \neq a$ ) | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $y_a$ の order                | 3 | 4 | 5 | 6 |

Sarafyan (1984) は

1 stage 目 に order 1, 2 stage 目 に order 2,  
4 stage 目 に order 3, 6 stage 目 に order 4  
となる embedded formula を導いている。

## 2.4 特異初期値問題

### 特異初期値問題

$$(2.6) \quad ty' = f(t, y) \quad (t \geq 0), \quad y(0) = y_0$$

を考える。ただし,  $y$  は  $n$  ベクトルで  $M$  は  $n \times n$  行列

$$(2.7) \quad f(t, y) = My + tg(t, y), \quad My_0 = 0$$

$$(2.8) \quad \lambda_i(M) = 0 \quad \text{or} \quad \operatorname{Re}(\lambda_i(M)) < 0$$

である。このとき de Hoog & Weiss (1976, 1985) は,

$g \in C^p$  ならば  $y(t) \in C^{p+1}$  を示し, one-step method をこの問題に適用すると, 通常 order 2 以下の精度で数値解がえられることを示した。

筆者 (1986) は,

$$(2.9) \quad y(th) = y_0 + \sum_{j=1}^p t^j u_j + O(h^{p+1})$$

と書くと,  $u_1 = h(I-M)^{-1}g(0, y_0)$  であり,

$p(p-1)/2$  回の  $g$  の計算で  $u_j$  ( $j=2, 3, \dots, p$ ) がえられることを示した。

### 3. Scaled one-step methods

Norn (1983) は, Fehlberg の (4)5 公式を基にして, つぎの結果をえた。

$f$  の追加計算 1 回で, 任意の点で order 4 の補間が,

$f$  の追加計算 5 回で, 任意の点で order 5 の補間が,

できる。また, 補間点が 1 つだけのときは, 追加計算 2 回で order 5 の補間ができる。

$$(3.1) \quad y_1 = y_0 + h \sum_{i=1}^8 p_i k_i, \quad y_t = y_0 + h \sum_{i=1}^{8+r} p_{it} k_i,$$

$$(3.2) \quad e = h \sum_{i=1}^{8+r} q_i k_i$$

であるとき, 筆者 (1988) は  $y_1, y_t$  が order  $p$  となる  $r$  と

$e = O(h^p)$  となる  $\rho$  を求めた (表 3)。また  $(p, \rho) = (2, 2),$

$(3, 3), (4, 4)$  に対する  $r$  の最小値はそれぞれ 0, 1, 2 である

ことを示した。

表 3

|     |   |   |   |   |
|-----|---|---|---|---|
| $p$ | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $q$ | 2 | 3 | 4 | 6 |
| $r$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $s$ | 0 | 0 | 1 | 1 |

補間点が 1 つだけの場合には,

$(p, q) = (4, 4)$  のとき  $r=1$  で order 4 のものがえられ,

$(p, q) = (5, 6)$  のとき  $r=1$  で order 5 のものがえられる

ことを示した。このとき  $a_{r+1}, b_{r+1j} (j=1, 2, \dots, r)$  は  $t$  に依存する。したがって  $(p, q) = (4, 4), (5, 6)$  の場合, 補間点の個数がそれぞれ 2, 3 以上 ならば, 任意個の点で補間ができる公式を使うべきである。

### 参 考 文 献

- [1] J.R. Cash, Block Runge-Kutta methods for the numerical integration of initial value problems in ordinary differential equations Part I. The nonstiff case, Math. Comp., 40 (1983), 175-191.

- {2} J.R. Cash, A block 5(4) explicit Runge-Kutta formula with "free" interpolation.
- {3} F.R. de Hoog and R. Weise, Difference methods for boundary value problems with a singularity of the first kind, SIAM J. Numer. Anal., 13(1976), 775-813.
- {4} F.R. de Hoog and R. Weiss, The application of Runge-Kutta schemes to singular initial value problems, Math. Comp., 44(1985), 93-103.
- {5} C.W. Gear, Runge-Kutta starters for multistep methods, ACM Trans. Math. Software 6(1980), 263-279.
- {6} M.K. Horn, Fourth-and fifth-order, scaled Runge-Kutta algorithms for treating dense output, SIAM J. Numer. Anal., 20(1983), 558-568.
- {7} J.B. Rosser, A Runge-Kutta for all seasons, SIAM Rev., 9(1967), 417-452.
- {8} D. Sarafyan, Continuous approximate solution of ordinary differential equations and their systems, Compt. Math. Appl., 10(1984), 139-159.
- {9} H. Shintani, Two-step processes by one-step methods of order 3 and of order 4, J. Sci. Hiroshima Univ., Ser.A-I 30(1966), 183-195.



- [10] H. Shintani, On one-step methods for ordinary differential equations, Hiroshima Math. J., 7(1977), 769-786.
- [11] H. Shintani, Block one-step methods for starting step-by-step methods for singular initial value problems, Bull. Fac. School Educ. Hiroshima Univ., Part II 9(1986), 75-81.
- [12] H. Shintani, Block one-step methods for starting multistep methods, Hiroshima Math. J., 17(1987), 1-11.
- [13] H. Shintani, On scaled one-step methods, Hiroshima Math. J., 18(1988), 113-126.
- [14] H. Shintani, Scaled one-step with one interpolation point, Submitted to Hiroshima Math. J.
- [15] H. Shitani, Eight-stage block one-step methods with two step-points, Bull. Fac. School Educ. Hiroshima Univ., Part II, 10(1987) (to appear)