

## 対称群の表現の新しい構成法について

阪大理 村上 順 (Jun Murakami)

序. Weyl 群の表現の構成は、古典的にもなされていたが、最近より自然な構成法として、Springer 表現や、Left Cell 表現などが知られるようになった。そこでこれらの間にどのような関係があるか興味を持たれる。A 型の Weyl 群、すなわち対称群については、上の二つの表現は一致するだろうと考えられている。ここでは A 型の対称群  $W$  について、分割入に対応する Springer 表現に一致していると思われる表現を構成し、さらに、 $W$ -加群  $\mathbb{C}[W/W_\lambda]$  中の、この表現に対応する部分加群の、ここでの構成法に対応する基底を表わす予想を述べる。ここで作った表現は、Springer 表現に似ているが、また、 $W$ -graph にもなっており、Hecke 環の表現になっているので、Springer 表現と、Left cell 表現の一致が、より調べやすくなったのではないかと思う。

### 1. 定義 (Hecke 環)

$(W, S)$  を Coxeter 系とする。  $W$  の元に対応する基底  $T_w$  を持

ち、次の関係式で定義される  $\mathbb{Q}[q^{1/2}, q^{-1/2}]$  上の algebra を  $(W, S)$  に対応する Hecke 環という。

$w, w' \in W$ ,  $\ell(w) + \ell(w') = \ell(ww')$  のとき,  $T_w T_{w'} = T_{ww'}$   
 但し  $\ell$  は  $W$  の元の  $S$  に関する長さを表わす。また,  $s \in S$  に対し,  $(T_s + 1)(T_s - q) = 0$

## 2. 定義 ( $W$ -graph)

Coxeter 系  $(W, S)$  に対し, 次の条件を満たす 3 組  $(X, I, \mu)$  を  $W$ -graph という。

$X$ : 頂点集合

$I: X \rightarrow 2^S$  ( $X$  から  $S$  の部分集合の集合への写像)

$\mu: X \times X \rightarrow \mathbb{Z}$

また,  $X$  の元に対応する基底を持つ  $\mathbb{Q}[q^{1/2}, q^{-1/2}]$  上の free module  $E$  に対し, 次で  $S$  の元の作用を定める。

$$x \in X \text{ に対し, } \tau_s(x) = \begin{cases} -x & \text{但し } s \in I(x) \\ qx + q^{1/2} \sum_{\substack{y \in X \\ s \in I(y)}} \mu(y, x) y & \text{但し } s \notin I(x) \end{cases}$$

そして,  $s \neq t$  なる  $s, t \in S$  に対し,  $st$  の order を  $m$  とすると

$$\underbrace{\tau_s \tau_t \tau_s \cdots}_{m \text{ 回}} = \underbrace{\tau_t \tau_s \tau_t \cdots}_{m \text{ 回}} \quad \text{となつてゐる。}$$

すなわち,  $\tau_s \in \text{End}(E)$  が  $(W, S)$  の Hecke 環の表現にまで

拡張できる。

### 3. $\bar{W}$ -graph になる為の条件

与えられた 3 つ組  $(X, I, \mu)$  が  $\bar{W}$ -graph になる為には,  
 $W$  の生成元の集合  $S$  の任意の 2 個の元  $s, t$  に対し,

$s s s \dots = t t t \dots$  (ともに  $s, t$  の位数個の積)  
 が成り立てばよい。A 型の場合に必要な  $s, t$  の位数が 2 または  
 3 の場合にこの条件を具体的に書き直してみると次のようにな  
 る。

命題 3 つ組  $(X, I, \mu)$  に対し

$$\{x_i\} = \{x \in X \mid I(x) \neq s, I(x) \neq t\}$$

$$\{y_j\} = \{x \in X \mid I(x) \ni s, I(x) \ni t\}$$

$$\{z_k\} = \{x \in X \mid I(x) \ni s, I(x) \neq t\}$$

$$\{w_l\} = \{x \in X \mid I(x) \neq s, I(x) \ni t\}$$

$$a_{ij} = \mu(z_i, w_j), \quad b_{ij} = \mu(w_i, z_j), \quad c_{ij} = \mu(z_i, x_j)$$

$$d_{ij} = \mu(w_i, x_j), \quad e_{ij} = \mu(y_i, z_j), \quad f_{ij} = \mu(y_i, w_j)$$

とする。

1)  $(st)^2 = 1$  のとき

$$a_{ij} = b_{ij} = 0, \quad \sum_k e_{j k} c_{k i} = \sum_k f_{j k} d_{k i}$$

2)  $(st)^3 = 1$  のとき ( $\forall x, y \in X$  について  $\mu(x, y) \geq 0$  を仮定する)

$|\{z_k\}| = |\{w_l\}|$  で、適当に添え字を取り替えることによ  
 り、 $a_{ii} = b_{ii} = 1, \quad a_{ij} = b_{ij} = 0 \quad (i \neq j)$  となり、さらに

$$\sum_k e_{j k} c_{k i} = \sum_k f_{j k} d_{k i}, \quad \sum_k e_{j k} d_{k i} = \sum_k f_{j k} c_{k i} \text{ を満す。}$$

1), 2) が  $W$ -graph になる為の条件となる。

#### 4. 記号

$$G = GL(l, \mathbb{C}), \quad B = \{x \in G \mid x \text{ は上半三角行列}\}$$

$$\lambda: l \text{ の分割 (fix)} \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots > 0, \quad \sum \lambda_i = l$$

$u$ : 分割  $\lambda$  に対し, 右のようにして定まる unipotent 行列

$$B = G/B$$

$$B_u = \{gB \in B \mid g^{-1}ug \in B\}$$

とする。また

$$u = \begin{pmatrix} \lambda_1 \left\{ \begin{array}{c|c} \text{Jordan block} & 0 \\ \hline 0 & \end{array} \right. & \\ \lambda_2 \left\{ \begin{array}{c|c} \text{Jordan block} & 0 \\ \hline 0 & \end{array} \right. & \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}$$

$$T = \{x \in G \mid x \text{ は対角行列}\}, \quad W = N_G(T)/T \quad \text{とすると}$$

$W \cong \mathcal{S}_l$  ( $l$  次対称群) となる。ここで  $\mathcal{S}_l$  の互換  $(i, i+1)$

に対応する  $W$  の元を  $s_i$  で表す。そして

$$P_i = B \cup B s_i B \quad (G \text{ の部分群}), \quad p_i: B \longrightarrow G/P_i$$

とし,  $B_u = \bigcup_k V_k$  と既約成分へ分解したときの各成分に対し,  $I(V_k) = \{s_i \mid p_i^{-1}(p_i(V_k)) = V_k\}$  とする。

#### 5. 知られている結果

##### 命題 (Spaltenstein)

1)  $B_u$  の既約成分の次元はみな等しい。

2)  $B_u$  の既約成分は  $u$  に対応する分割  $\lambda$  を台とする standard tableau により parametrize される。

3)  $B_u$  の既約成分  $V$  に対し,  $\lambda_i$  が  $I(V)$  に入ることと,  
 $V$  に対応する standard tableau で  $i+1$  が  $i$  よりも  $F$  の行  
 にあることは同値である。

命題 (Hotta, Springer)

Springer 表現は,  $B_u$  の既約成分  $\{V_i\}$  に対応する cycle を  
 基底とする,  $B_u$  のホモロジーの最高次の所への Weyl 群の作用  
 を定めるが, これは次のようになっている。

$$\lambda_k [V_i] = \begin{cases} -[V_i] & \lambda_k \in I(V_i) \\ [V_i] + \sum_{\substack{I(V_j) \ni \lambda_k \\ V_i \cap V_j \subset V_i \\ \text{codim } 1}} n_{ijk} [V_j] & \lambda_k \notin I(V_i) \end{cases}$$

$n_{ijk} \in \mathbb{Z}$

注意  $n_{ijk}$  は良くはわかっていないが,  $A$  型の場合, すべて  
 1 と予想されている。

## 6. 主定理

$B_u = \bigcup_i V_i$  (既約分解) とする。このとき  
 $X = \{V_i\}$  とし,  $I$  として  $I(V_i)$  をとり,

$$\mu(V_i, V_j) = \begin{cases} 1 & V_i \cap V_j \subset V_i \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \quad \text{codim } 1$$

とすると,  $(X, I, \mu)$  は  $(\mathbb{G}_n, \{\lambda_k\})$  に関する

$W$ -graph になる。また, 対応する表現は既約になり, 分割入

で parametrize される表現に同値である。

定理の後半は  $I$  の性質から出てくるので、以下では  $W$ -graph になることを示す。まずその為の準備を 7~12 で行う。

## 7. $u^G \cap N$ と $B_u$ の関係

$$\begin{array}{l}
 n = u - id \\
 N = \{x \in M_n(\mathbb{C}) \mid \\
 \quad x \text{ は上半三角} \\
 \quad \text{nilpotent 行列}\}
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{ccccc}
 u^G & \xleftarrow{pr_2} & G & \xrightarrow{pr_1} & G/B \\
 \cup & & \cup & & \cup \\
 pr_2 \cdot pr_1^{-1}(B_u) & \xleftarrow{\quad} & pr_1^{-1}(B_u) & \xrightarrow{\quad} & B_u \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 g^{-1}u g & \xleftarrow{\quad} & g & \xrightarrow{\quad} & gB
 \end{array}
 \right.$$

とする。  $pr_1, pr_2$  を上図のような標準的な射影とすると、  
 $pr_1$  の fiber はみな  $B$  に同型であり、 $pr_2$  の fiber はみな  
 $Z_G(u)$  ( $u$  の  $G$  中での中心化群) に同型である。そして、  
これらはともに連結、既約なので、 $B_u$  の既約成分と  $u^G \cap B$   
の既約成分とは 1 対 1 に対応し、さらに  $B_u$  の既約成分の交わり  
の codimension は対応する  $u^G \cap B$  の交わりの codimension  
と等しくなる。一方、 $u^G \cap B$  と  $n^G \cap N$  とは同型である。

そこで、 $B_u = \bigcup_i V_i$  と既約分解するかわりに、以下では  
 $n^G \cap N = \bigcup_i U_i$  という既約分解で考えることにする。但し  
 $U_i$  は  $V_i$  に対応する既約成分とし、 $I(U_i) = I(V_i)$  とおく。

8. 補題  $U_i$  は  $P_{I(U_i)}$  の作用で不変である。但し

$$P_{I(U_i)} = \bigcup_{w \in W_{I(U_i)}} B_w B, \quad W \supset W_{I(U_i)} = \langle s \mid s \in I(U_i) \rangle$$

証明  $I(V_i) \ni A_k$  ならば  $p_k^{-1} \cdot p_k(V_i) = V_i$  となることを,

$pr_1, pr_2$  を用いて  $U_i$  の条件に直せば良い。

9. 補題  $U_i$  は  $\text{Lie}(P_{I(V_i)})$  の nilpotent radical に含まれる。

証明  $U_i \subset N$  であり,  $U_i$  は  $P_{I(V_i)}$  で不変である。対偶を示す。 $x$  が  $\text{Lie}(P_{I(V_i)})$  の nilpotent radical に入らないとすると, ある  $P_{I(V_i)}$  の元  $p$  で,  $p^{-1}xp \notin N$  となるものがあるので,  $x \notin U_i$  である。

10. 命題  $V_i^k = \{x \in V_i \mid p_k^{-1}(x) \in \mathcal{B}_4\}$ ,  $U_i^k = pr_2 \cdot pr_1^{-1}(V_i^k)$

とすると  $U_i^k = \{x \in U_i \mid x_{kk+1} (x \text{ の } k \text{ 成分}) = 0\}$  となる。

証明  $U_i^k = \{x \in U_i \mid p_k \cdot x \in N\}$  なので 9 と同様にして,

$x \in U_i^k \Leftrightarrow x_{kk+1} = 0, x \in U_i$  がわかる。

11. 命題  $\mathcal{U}_i^k = \{U: n^q \cap N \text{ の既約成分} \mid U \cap U_i \subset U_i^k, I(U) \ni A_k\}$ ,  $\tilde{U}_i^k = P_k \cdot U_i^k$  とする。このとき、  
 $\text{codim } 1$

$I(U_i) \ni A_k$  ならば  $\tilde{U}_i^k = \bigcup_{U \in \mathcal{U}_i^k} U$  (既約分解) となる。

また,  $\tilde{U}_i^k$  の既約成分と  $U_i^k$  の既約成分は 1 対 1 に対応する。

証明 前半 命題 10 による。

後半  $U_i^k$  の既約成分で  $P_k$  の作用で不変なものが無いことをいえばよい。 $\{x \in U_i \mid p_k \cdot x \in U_i\} = \{U_i \text{ での } x_{kk+1} = 0 \text{ の特異点}\}$  で右辺の全次元が 2 になるので,  $P_k$  の作用で不変な  $U_i^k$  の既約成分は無い。

12.  $\lambda$  を台とする standard tableau と  $N_n = \pi^G \cap N$  の

既約成分との対応

$\lambda$  を台とする standard tableau を  $\xi$  とし、それに対応する  $N_n$  の既約成分を  $\psi$  とすると、 $\psi$  は  $\xi$  から次のようにして帰納的に定めることができる。まず、 $\xi^k$  ( $k \leq l$ ) を  $\xi$  のうち 1 から  $k$  までの数が入っている部分からなる  $k$  のある分割

とする standard tableau とする。そして  $\xi^k$  に対応する  $N_n^k = \pi_{\lambda_{\xi^k}}^{GL(k, \mathbb{C})} \cap N_k$  ( $N_k$  は  $GL(k, \mathbb{C})$  の上半三角 nilpotent 行列の全体) の既約成分  $\psi_k$  を決めていく。

1°.  $\xi^1$  には  $(0)^{GL(1, \mathbb{C})} \cap N_1 = \{(0)\}$  の唯一つの既約成分  $\{(0)\}$  が対応する。

2°.  $\xi^{k-1}$  に対応する  $N_n^{k-1}$  の既約成分  $\psi_{k-1}$  が求まっているとき、 $\xi^k$  に対応する既約成分  $\psi_k$  を次で定める。

$\tau_k: N_k \rightarrow N_{k-1}$  を、 $N_k$  の元  $x$  に対し、その  $k$  行  $k$  列を無視してできる  $(k-1)$  行  $(k-1)$  列の行列を対応させる写像とする。そして  $\psi_k = \overline{\tau_k^{-1}(\psi_{k-1})}$  ( $N_n^k$  の閉包) とする。

2° を繰り返してできる  $\psi_l$  が  $\xi$  に対応する  $N_n$  の既約成分となる。

13. 以上の準備のもとで主定理の証明の概略を述べる。

主定理での三つ組  $(\lambda, I, \mu)$  が命題 3 の条件をみたすことを確かめればよい。



まず  $|i-j| \geq 2$  なる  $\lambda_i, \lambda_j \in S$  をとる。 $\lambda_i \lambda_j$  の位数は 2 なので、命題 3 の 1) の条件を確かめる。その為次に次の2つの補題を示す。

補題  $U_1, U_2$  を  $I(U_1) \ni \lambda_i, I(U_1) \not\ni \lambda_j, I(U_2) \not\ni \lambda_i, I(U_2) \ni \lambda_j$  となる  $N_n$  の2つの既約成分とする。このとき  $\mu(U_1, U_2) = 0$  である。

証明  $\mu(U_1, U_2) = 1$  とすると  $U_2$  は  $P_j \cdot U_1^j$  の既約成分となる。但し  $U_1^j = \{x \in U \mid x_{j+1} = 0\}$  とする。ところが  $U_1$  において  $i(i+1)$  成分は 0 なので  $U_1^j$  においてもそうである。その上  $|i-j| \geq 2$  なので、 $P_j \cdot U_1^j$  においても  $i(i+1)$  成分は 0 である。これは  $I(U_2) \not\ni \lambda_i$  に矛盾する。

14. 補題  $N_n$  の3つの既約成分

$U_1, U_2, U$  で

$I(U) \not\ni \lambda_i, \lambda_j$

$I(U_2) \ni \lambda_i, \lambda_j$

$I(U_1) \ni \lambda_i, I(U_1) \not\ni \lambda_j$

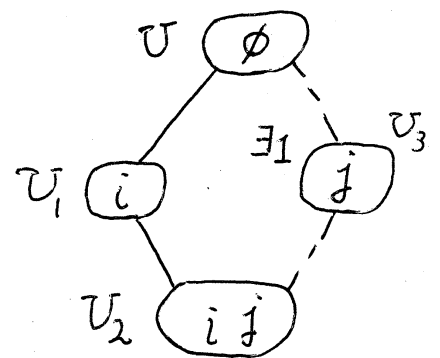
$\mu(U, U_1) = 1, \mu(U_1, U_2) = 1$

となっているとき、次のような既約成分  $U_3$  が唯一存在する。

$I(U_3) \not\ni \lambda_i, I(U_3) \ni \lambda_j, \mu(U, U_3) = \mu(U_3, U_2) = 1$

証明 1°  $U_3$  の存在

$U^{i'} = \{x \in U \mid x_{i+1} = 0, x_{j+1} \neq 0\}$  とすると、 $U_1$  は  $P_i \cdot U^{i'}$



の既約成分であり,  $U_2$  は  $P_j \cdot (P_i \cdot U^{i'})^j$  の既約成分である。  
ところが  $|i-j| \geq 2$  なので,  $P_i$  を作用させることと  $j+1$  成分が 0 の部分集合をとることとは入れ換えられ,

$(P_i \cdot U^{i'})^j = P_i \cdot (U^{i'})^j$  となる。  $i$  と  $j$  を取り換えてみると, 結局,  $P_j \cdot (P_i \cdot U^{i'})^j = P_i \cdot (P_j \cdot U^{j'})^i$  となる。  
従って,  $P_j \cdot U^{j'}$  の既約成分  $U_3$  で,  $\mu(U_3, U_2) = 1$  となるものが存在する。

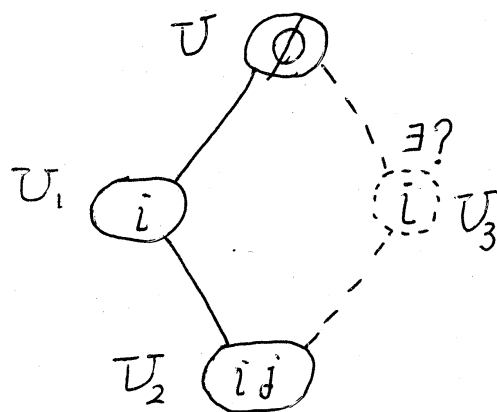
2°. uniqueness

仮定の  $U, U_1, U_2$  に対し,

$I(U_3) \ni A_i, I(U_3) \ni A_j,$

$\mu(U, U_3) = \mu(U_3, U_2) = 1$

となる  $N_n$  の既約成分  $U_3$  が存在したとして矛盾を導く。



$U_2$  は  $P_j \cdot P_i \cdot (U^{i'})^j$  の既約成分なので,  $(U^{i'})^j \cap U_2$  は  $U, U_2$  中 codimension 2 となる。また,  $(U^{i'})^j \cap U_2 = U \cap U_1 \cap U_2 = U \cap U_3 \cap U_2 = U \cap U_1 \cap U_2 \cap U_3$  となる。

一方次の補題により  $U \cap U_1 \cap U_3$  は余次元 2 の既約な variety となる。 $(U^{i'})^j \cap U_2$  の既約成分はみな余次元 2 なので,

$(U^{i'})^j \cap U_2 \supset U \cap U_1 \cap U_3$  となる。ところが, やはり次の補題により  $U \cap U_1 \cap U_3$  の  $j+1$  成分は恒等的に 0 でないので矛盾である。

15. 補題  $U$  を  $N_n$  の  $I(U)$  を  $\Delta_i$  なる既約成分とする。また、 $U^i = \{x \in U \mid x_{i,i+1} = 0\}$  とする。このとき、 $U^i$  の2つの異なる既約成分  $X_1, X_2$  の交わりは既約である。また、 $X_1$  でも  $X_2$  でも恒等的には0でない成分は、 $X_1 \cap X_2$  においても恒等的には0でない。

証明  $X_{\alpha\beta} = \{ (x_{ij})_{\substack{\alpha \leq i \leq \beta \\ 1 \leq j \leq \beta}} \mid x \in X \}$

$$R_{\alpha\beta}(x) = \max \{ \text{rank } x \mid x \in X_{\alpha\beta} \}$$

$$R_{\alpha\beta}^{(i)}(x) = R_{\alpha\beta}(X^i) \text{ 但し } X^i \text{ は } X \text{ の } i \text{ 乗とする。}$$

$$M_{\alpha\beta}^{1*} = \beta - \min \{ i \mid R_{\alpha i}(x^i) \geq 1 \} + 1$$

$$M_{\alpha\beta}^{2*} = \max \{ i \mid R_{i\beta}(x^i) \geq 1 \} - \alpha + 1$$

とおく。すると実は  $U, X_1, X_2$  は次で定まる。

$$U = \{ x \in N_n \mid R_{\alpha\beta}^{(i)}(x) \leq R_{\alpha\beta}^{(i)}(U) \} \quad i, \alpha, \beta \text{ は任意}$$

$$X_k = \{ x \in N_n \mid R_{\alpha\beta}^{(i)}(x) \leq R_{\alpha\beta}^{(i)}(X_k) \} \quad k=1,2$$

$$\text{そして } X_1 \cap X_2 = \{ x \in N_n \mid R_{\alpha\beta}^{(i)}(x) \leq \min_{k=1,2} \{ R_{\alpha\beta}^{(i)}(X_k) \} \}$$

となる。

補題  $X_1 \cap X_2$  が既約を示すには、次の(\*)を確かめればよい。

$$(*) \quad R_{\alpha\beta}(X_1 \cap X_2) + R_{\alpha'\beta'}^{(i-1)}(X_1 \cap X_2) \leq R_{\alpha'\beta'}^{(i)}(X_1 \cap X_2) + M_{\alpha'\beta'}^{1,1}(X_1 \cap X_2)$$

但し、 $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$  は次をみたす。

$$M_{\alpha\beta}^{1,1}(X_1 \cap X_2) = M_{\alpha'\beta'}^{1,i-1}(X_1 \cap X_2)$$

この補題は、次の補題を一般化して得られた。

補題  $X = \{x \in M_{\ell m}(\mathbb{C}) \mid \text{rank } x \leq a \text{ 但し } a \leq \ell, a \leq m\}$

$Y = \{y \in M_{mn}(\mathbb{C}) \mid \text{rank } y \leq b \text{ 但し } b \leq m, b \leq n\}$

$Z = \{z \in M_{\ell n}(\mathbb{C}) \mid \text{rank } z \leq c \text{ 但し } c \leq \ell, c \leq n\}$

$V = \{(x, y, z) \in X \times Y \times Z \mid xy = z\}$

とすると、 $V$  が既約なことで、 $a+b \leq c+m$  が成り立つことは同値である。

さて、 $X_1 \cap X_2$  について前の補題の条件が満たされることは、まず、 $X_1, X_2$  が既約なことで、これらについて (※) と同様の式が成り立ち、さらに、 $X_1, X_2$  が  $v^i$  の既約成分となっていることから、 $R_{\alpha\beta}^{(i)}$  や  $M_{\alpha\beta}^{(i)}$  の値が、 $X_1, X_2$  では  $v$  と較べてどのように変わっているかを詳しく調べることにより示される。

以上により  $|i-j| \geq 2$  なる  $\lambda_i, \lambda_j$  についての check ができた。

$\lambda_i, \lambda_{i+1}$  についての命題 3.2) の条件の check は、以下の補題 16, 17, 18 による。

16. 補題  $v$  を  $N_n$  の既約成分で、 $I(v) \ni \lambda_i, I(v) \not\ni \lambda_{i+1}$  となるものとする。このとき、 $N_n$  の既約成分  $v_1$  で  $I(v_1) \ni \lambda_i, I(v_1) \ni \lambda_{i+1}, \mu(v, v_1) = 1$  となるものが  $v \ni v_1$  唯一つ存在する。

(i) --- (i+1)

証明  $\hat{U}^{i+1} = \overline{\{x \in U \mid x_{i+1,i+2} = 0, x_{i,i+2} \neq 0\}}$  とすると,  $\hat{U}^{i+1}$  が既約になることが, 15 で定義した  $R_{\alpha\beta}^{(i)}$  を用いて証明できるので,  $U$  を  $P_{i+1} \cdot \hat{U}^{i+1}$  とすればよい。

17. 補題  $N_n$  の既約成分  $U, U_1, U_2$  で

$$I(U) \nexists A_i, A_{i+1}, I(U_2) \ni A_i, A_{i+1},$$

$$I(U_1) \ni A_i, I(U_1) \nexists A_{i+1}$$

$$\mu(U, U_1) = 1, \mu(U_1, U_2) = 1$$

のとき,

$$I(U_3) \nexists A_i, I(U_3) \ni A_{i+1}, \mu(U, U_3) = 1, \mu(U_3, U_2) = 1$$

となる既約成分  $U_3$  が唯一存在する。

証明 1°  $U_3$  の存在

$U^{i'} = \overline{\{x \in U \mid x_{i,i+1} = 0, x_{i+1,i+2} \neq 0\}}$  とすると,  $U_1$  は  $P_i \cdot U^{i'}$  の既約成分である。また,  $U_2$  は

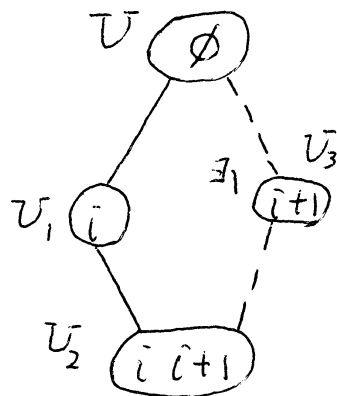
$U_1^{i+1,i} = \overline{\{x \in U_1 \mid x_{i+1,i+2} = 0, x_{i,i+2} = 0\}}$  としたときの  $P_{i+1} \cdot U_2^{i+1,i}$  の既約成分である。但し,  $P_{i+1} = U \ B \ W \ B$   
 $w \in \langle A_i, A_{i+1} \rangle \subset W$   
 とする。

ところが,  $i, i+2$  成分と  $i+1, i+2$  成分を共に 0 にすることと,

$P_i$  の元を作用させることは入れ換えられ,

$$(P_i \cdot U^{i'})^{i+1,i} = P_i \cdot (U^{i'})^{i+1,i} \text{ となるので, } U_2 \text{ は}$$

$$\begin{aligned} P_{i+1} \cdot P_i (U^{i'})^{i+1,i} &= P_{i+1} \cdot P_{i+1} (U^{i+1,i'})^{i,i+1} \\ &= P_{i+1} \cdot (P_{i+1} \cdot U^{i+1,i'})^{i,i+1} \end{aligned}$$



の既約成分となる。従って  $P_{i+1} \cdot V^{i+1}$  の既約成分  $v_3$  で条件をみたすものが存在する。

2°. uniqueness

補題 14 の証明の 2° と同様にする。

18. 補題

$N_n$  の既約成分  $v, v_1, v_2, v_3$  で

$$I(v) \nsubseteq \Delta_i, \Delta_{i+1}, I(v_3) \supset \Delta_i, \Delta_{i+1}$$

$$I(v_1) \supset \Delta_i, I(v_1) \nsubseteq \Delta_{i+1}$$

$$I(v_2) \nsubseteq \Delta_i, I(v_2) \supset \Delta_{i+1}$$

$$\mu(v, v_1)=1, \mu(v_1, v_2)=1, \mu(v_2, v_3)=1$$

となつてゐるとき、

$$I(v_4) \supset \Delta_i, I(v_4) \nsubseteq \Delta_{i+1}, I(v_5) \nsubseteq \Delta_i, I(v_5) \supset \Delta_{i+1}$$

$$\mu(v, v_5)=1, \mu(v_5, v_4)=1, \mu(v_4, v_3)=1$$

となる  $v_4, v_5$  がそれぞれ唯一存在する。

証明

17 と同様  $v_1$  は  $v^{i'}$  の既約成分である。そして

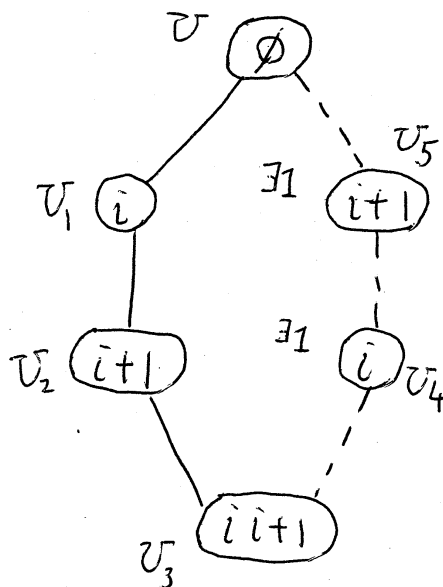
$$\hat{v}_1^{i+1} = \{x \in v_1 \mid x_{i+1, i+2} = 0, x_{i+2, i+3} \neq 0\} \text{ とすると, 補題 16}$$

により  $\hat{v}_1^{i+1}$  は既約で,  $v_2 = P_{i+1} \cdot \hat{v}_1^{i+1}$  となる。さらに、

$$v_2^{i+1} = \{x \in v_2 \mid x_{i+1} = 0, x_{i+2, i+3} = 0\} \text{ とすると, } v_3 \text{ は}$$

$P_i \cdot v_2^{i+1}$  の既約成分となる。結局  $v_3$  は

$$v = P_i \cdot (P_{i+1} \cdot (P_i \cdot \hat{v}_1^{i+1})^{i+1})^{i+1} \text{ の既約成分である。}$$



ところが、まず、 $i, i+1$  成分と  $i, i+2$  成分が共に 0 の部分集合をとることと、 $P_{i+1}$  を作用させることとは入れ換えられるので、 $V = P_i \cdot P_{i+1} \cdot ((\widehat{P_i \cdot V})^{i+1})^{i+1}$  となる。さらに、 $i, i+1$  成分、 $i, i+2$  成分、 $i+1, i+2$  成分がみな 0 という部分集合をとることと  $P_i$  を作用させることが入れ換えられるので、

$V = P_i \cdot P_{i+1} \cdot P_i \cdot ((\widehat{V})^{i+1})^{i+1}$  となる。 $i$  と  $i+1$  を取り換えても同じ  $V$  ができるので、上の議論を逆にたどって  $v_4, v_5$  の存在がわかる。

2° uniqueness

$v, v_1, v_2, v_3$  に対し、

$$I(v_4) \ni \Delta_i, I(v_4) \not\ni \Delta_{i+1}$$

$$I(v_5) \not\ni \Delta_i, I(v_5) \ni \Delta_{i+1}$$

$$\mu(v, v_4) = 1, \mu(v_4, v_5) = 1$$

$$\mu(v_5, v_3) = 1$$

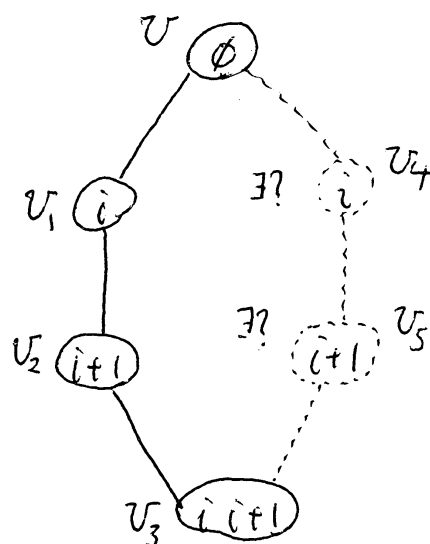
となる  $v_4, v_5$  が存在しないことを

背理法で示す。 $v_4, v_5$  が存在したとすると

$$v \cap v_1 \cap v_2 \cap v_3 \supset W = ((\widehat{v})^{i+1})^{i+1} \cap v_3 \subset v \cap v_4 \cap v_5 \cap v_3$$

で、 $W$  の任意の既約成分の余次元は 3 である。ところが、 $v \cap v_1 \cap v_2$  の既約成分と  $v_4$  との交わりを調べてみると、

補題 14 の証明の 2° と同様にして、余次元 3 の既約な variety で、しかも  $i, i+2$  成分は恒等的には 0 でないことがわかる。



次元の比較から, ある  $v_1, v_2$  の既約成分と  $v_4$  の交わりが,  $W$  に含まれていることになるが,  $W$  においては  $v_4$  成分は常に 0 なので矛盾する。

以上により主定理は証明された。

最後に, ここで作った表現に関する予想を述べる。

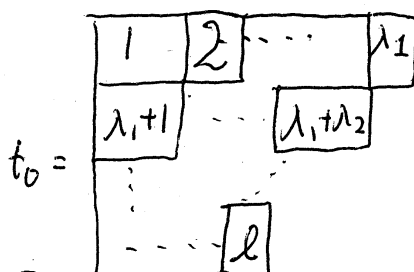
### 19. 予想の準備

$W = N_G(T)/T$  の元  $w$

に対し  $wB \in G/B$  を

対応させることにより,  $W$  の元

を  $G/B$  の点と同一視する。



補題  $w \in W$  が  $\beta_u$  に入ることと,  $w \cdot t_0$  が semi standard tableau になることは同値である。但し  $t_0$  は  $u$  に対応する分割  $\lambda$  を台とする上のような standard tableau とする。

また,  $w$  は  $t_0$  に数字の置換により作用する。

補題  $W^\lambda = \{ w \in W \mid w t_0 : \text{semi standard tableau} \}$

とすると,  $W^\lambda$  は  $W/W_\lambda$  の完全代表系である。但し,  $W_\lambda$  は  $\lambda$  に対応する parabolic subgroup で  $W_\lambda \cong \mathcal{G}_{\lambda_1} \times \mathcal{G}_{\lambda_2} \times \dots$  である。

20. 予想  $W$ -module  $\mathbb{C}[W/W_\lambda]$  は, 分割  $\lambda$  に対応する  $W$  の既約表現を重複度 1 で含んでいる。この submodule の基底で, 定理に述べた表現と, 行列表示まで一致する



基底が、次のようにしてとれるだろう。

$B_{\lambda} = \bigcup_i V_i$  (既約分解) とするとき,  $V_i$  に対応する基底を

$$f_i = (-1)^{\ell(w_0)} \sum_{w \in V_i} (-1)^{\ell(w)} m_i(w) w$$

但し  $w_0$  は  $W$  の  $V_i$  の元で, 長さ最小の元とする。

また,  $V_i$  の特異点に関する stratification を

$$V_i = S_i^1 \cup S_i^2 \cup S_i^3 \cup \dots \quad (\text{直和})$$

$$S_i^1 = V_i - \text{Sing}(V_i)$$

$$S_i^k = V_i - \bigcup_{\ell=1}^{k-1} S_i^{\ell} - \text{Sing}(V_i - \bigcup_{\ell=1}^{k-1} S_i^{\ell})$$

として,  $w \in S_i^k$  となる  $k$  を  $m_i(w)$  で表わす。

### 参考文献

Hotta, R. and Shimomura, N. : The fixed point subvarieties of unipotent transformations on generalized flag varieties and the Green functions; Math. Ann 241, 193-208 (1979).

Kazhdan, D. and Lusztig, G. : Representation of Coxeter groups and Hecke algebras; Invent. Math. 53, 165-184 (1979).

Kazhdan, D. and Lusztig, G. : A topological approach to Springer's representations ; Adv. in Math. 38, 222-228 (1980).

Spaltenstein, N. : On the fixed point set of a unipotent element on the variety of Borel subgroups ; Topology 16, 203-204 (1977).