

非可換 L^p 空間の構造

東京大学大学院数理科学研究科

泉 英明 (Izumi Hideaki)

Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo

フォン・ノイマン環 $\mathcal{M}$ およびその上の weight φ に対して、複素補間法を用いて構成される L^p 空間 $L_{(\alpha)}^p(\varphi)$ において conjugate-linear involution $J_{p,(\alpha)}$ および positive cone $\mathcal{P}_{p,(\alpha)}$ を定義し、positive cone の duality を示す。

まず、非可換 L^p 空間の構成および基本的性質について概説する (詳しくは [1],[2] を参照)。

実数 α に対して集合 $L_{(\alpha)}$ を

$$L_{(\alpha)} = \left\{ x \in \mathcal{M} \left| \begin{array}{l} \text{unique に } \varphi_x^{(\alpha)} \in \mathcal{M}_* \text{ が存在して、} \\ \varphi_x^{(\alpha)}(y^*z) = (\pi_\varphi(x)J_\varphi\Delta_\varphi^{\bar{\alpha}}\Lambda_\varphi(y)|J_\varphi\Delta_\varphi^{-\alpha}\Lambda_\varphi(z)) \\ \text{が任意の } y, z \in \mathfrak{a}_0 \text{ に対して成立する。} \end{array} \right. \right\}$$

で定義する。 $L_{(\alpha)}$ はノルム

$$\|x\|_{L_{(\alpha)}} = \max\{\|x\|, \|\varphi_x^{(\alpha)}\|\}$$

でバナッハ空間になる。埋め込み

$$\begin{aligned} j_{(-\alpha)}^* : \mathcal{M} &\rightarrow L_{(-\alpha)}^*, \\ i_{(-\alpha)}^* : \mathcal{M}_* &\rightarrow L_{(-\alpha)}^* \end{aligned}$$

を等式

$$(1) \quad j_{(-\alpha)}^*(x) = i_{(-\alpha)}^*(\varphi_x^{(\alpha)}), \quad x \in L_{(\alpha)}$$

を満たすように構成できる。すると、空間

$$\Sigma_{(\alpha)} = j_{(-\alpha)}^*(\mathcal{M}) + i_{(-\alpha)}^*(\mathcal{M}_*)$$

は $\mathcal{M}$ と $\mathcal{M}_*$ を同一視のルール (1) によって融合した空間になる。Calderón の複素補間法をこの融合した空間に適用し、 $1 < p < \infty$ のとき非可換 L^p 空間 $L_{(\alpha)}^p(\varphi)$ をその指数 $1/p$ の補間空間で定義する。 $\mathcal{M}$ が可換のときはこれは通常の L^p 空間に一致する。

各非可換 L^p 空間は $\Sigma_{(\alpha)}$ のある部分空間に補間ノルムを入れたものでバナッハ空間である。また、包含関係

$$j_{(-\alpha)}^*(\mathfrak{a}_0^2) \subset j_{(-\alpha)}^*(L_{(\alpha)}) \subset L_{(\alpha)}^p(\varphi)$$

が成立し、 $j_{(-\alpha)}^*(\mathfrak{a}_0^2)$ および $j_{(-\alpha)}^*(L_{(\alpha)})$ はそれぞれ $L_{(\alpha)}^p(\varphi)$ で norm dense である。

$\alpha = -1/2$ のとき L^p 空間には $\mathcal{M}$ が左から自然に作用する。作用は次のようにして定める。 $x \in \mathcal{M}$ に対し linear map $\pi_p(x) : L_{(-1/2)}^p(\varphi) \rightarrow L_{(-1/2)}^p(\varphi)$ を

$$\pi_p(x)(j_{(1/2)}^*(y) + i_{(1/2)}^*(\psi)) = j_{(1/2)}^*(xy) + i_{(1/2)}^*(x\psi), \quad y \in \mathcal{M}, \psi \in \mathcal{M}_*$$

で定義するとこれは well-defined で、 $\|\pi_p(x)\| = \|x\|$ である。しかも明らかに π_p は $\mathcal{M}$ の $L_{(-1/2)}^p(\varphi)$ への作用である。

$1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$ に対して、bounded bilinear form $\langle \cdot, \cdot \rangle_{p,(\alpha)} : L_{(\alpha)}^p(\varphi) \times L_{(-\alpha)}^q(\varphi) \rightarrow \mathbb{C}$ が

$$\langle j_{(-\alpha)}^*(a), j_{(\alpha)}^*(b) \rangle = \varphi_a^{(\alpha)}(b) = \varphi_b^{(-\alpha)}(a), \quad a \in L_{(\alpha)}, b \in L_{(-\alpha)}$$

を満たすように構成できる。この bilinear form によって、 $L_{(-\alpha)}^q(\varphi)$ は $L_{(\alpha)}^p(\varphi)$ の双対空間と見なすことができる。さら

に、sesquilinear form を用いた duality が次のようにして得られる。conjugate-linear map $J_{p,(\alpha)} : L_{(\alpha)}^p(\varphi) \rightarrow L_{(-\alpha)}^p(\varphi)$ を $J_{p,(\alpha)}(j_{(-\alpha)}^*(x) + i_{(-\alpha)}^*(\psi)) = j_{(\alpha)}^*(x^*) + i_{(\alpha)}^*(\psi^*)$, $x \in \mathcal{M}$, $\psi \in \mathcal{M}_*$ で定義すると、これは well-defined で bijective isometry になっている。そこで、sesquilinear form $(\cdot|\cdot)_{p,(\alpha)} : L_{(\alpha)}^p(\varphi) \times L_{(\alpha)}^q(\varphi) \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$(\xi|\eta)_{p,(\alpha)} = \langle \xi, J_{q,(\alpha)}\eta \rangle_{p,(\alpha)}, \quad \xi \in L_{(\alpha)}^p(\varphi), \quad \eta \in L_{(\alpha)}^q(\varphi)$$

で定義すると、明らかにこれは L^p 空間と L^q 空間の duality を与える。また、 $p = 2$, $\alpha = -1/2$ のときこの sesquilinear form は $L_{(-1/2)}^2(\varphi)$ 上の内積であり、 $L_{(-1/2)}^2(\varphi)$ はヒルベルト空間になっており、しかも

$$(j_{(1/2)}^*(a)|j_{(1/2)}^*(b))_{2,(-1/2)} = (\Lambda_\varphi(a)|\Lambda_\varphi(b)), \quad a, b \in \mathfrak{a}_0^2$$

をみたす。すなわち standard Hilbert space と同型であり、明らかに作用 π_2 は π_φ とユニタリ同値である。

実数 α, β に対して等距離同型写像

$$U_{p,(\beta,\alpha)} : L_{(\alpha)}^p(\varphi) \rightarrow L_{(\beta)}^p(\varphi)$$

が

$$U_{p,(\beta,\alpha)}j_{(-\alpha)}^*(a) = j_{(-\beta)}^*(\sigma_{i(\beta-\alpha)/p}^\varphi(a)), \quad a \in \mathfrak{a}_0^2$$

を満たすように構成できる。この写像は上述の sesquilinear form を保存する：

$$(U_{p,(\beta,\alpha)}\xi|U_{q,(\beta,\alpha)}\eta)_{p,(\beta)} = (\xi|\eta)_{p,(\alpha)}, \quad \xi \in L_{(\alpha)}^p(\varphi), \quad \eta \in L_{(\alpha)}^q(\varphi).$$

この同型写像を用いて任意の L^p 空間上に $\mathcal{M}$ の作用を定義する。 $a \in \mathcal{M}$ に対して、

$$\pi_{p,(\alpha)}(a) = U_{p,(\alpha,-1/2)}\pi_p(a)U_{p,(-1/2,\alpha)}$$

と定義すると、 $\pi_{p,(\alpha)}$ は $\mathcal{M}$ の $L^p_{(\alpha)}(\varphi)$ への作用である。すると、 $\{\pi_{2,(\alpha)}, L^2_{(\alpha)}(\varphi)\}$ も standard Hilbert space とユニタリ同値である。

同型写像 $I_{p,(\alpha)} : L^p_{(\alpha)}(\varphi) \rightarrow L^p_{(\alpha)}(\varphi)$ を

$$I_{p,(\alpha)} = J_{p,(-\alpha)} \circ U_{p,(-\alpha,\alpha)} = U_{p,(\alpha,-\alpha)} \circ J_{p,(\alpha)}$$

で定義すると、これは involution になる。また、 $L^2_{(0)}(\varphi)$ の cone $P_{2,(0)}$ を

$$P_{2,(0)} = \overline{\{j_{(0)}^*(a^*a) \mid a \in \mathfrak{a}_0\}}$$

で定義すると、次が成立する。

定理 1. $\{\pi_{2,(0)}, L^2_{(0)}(\varphi), I_{2,(0)}, P_{2,(0)}\}$ は standard form である。

さらに、 $1 < p < \infty$, $p \neq 2$ に対して $L^p_{(0)}(\varphi)$ の cone $P_{p,(0)}$ を

$$P_{p,(0)} = \overline{L^p_{(0)}(\varphi) \cap P_{2,(0)}}$$

で定義する。また、一般の α に対しては、 $L^p_{(\alpha)}(\varphi)$ の cone $P_{p,(\alpha)}$ を

$$P_{p,(\alpha)} = U_{p,(\alpha,0)} P_{p,(0)}$$

で定義する。すると、standard form に類似の、次の結果が成り立つ。

定理 2. $1 < p, q < \infty$, $1/p + 1/q = 1$, に対して次が成立する。

$$(1) \quad I_{p,(\alpha)} \pi_{p,(\alpha)}(\mathcal{M}) I_{p,(\alpha)} \subset \pi_{p,(\alpha)}(\mathcal{M})'.$$

ここで右辺の ' は $B(L^p_{(\alpha)}(\varphi))$ における commutant を表す。

$$(2) \quad I_{p,(\alpha)} \xi = \xi, \quad \xi \in \mathcal{P}_{p,(\alpha)}.$$

- (3) $I_{p,(\alpha)}\pi_{p,(\alpha)}(a)I_{p,(\alpha)} = \pi_{p,(\alpha)}(a^*), a \in \mathcal{Z}(\mathcal{M}).$
- (4) $\pi_{p,(\alpha)}(x)I_{p,(\alpha)}\pi_{p,(\alpha)}(x)I_{p,(\alpha)}\mathcal{P}_{p,(\alpha)} \subset \mathcal{P}_{p,(\alpha)}, x \in \mathcal{M}.$
- (5) $\mathcal{P}_{p,(\alpha)}$ と $\mathcal{P}_{q,(\alpha)}$ は sesquilinear form $(\cdot|\cdot)_{p,(\alpha)}$ に関して互いに dual な positive cone である。

この定理は $\alpha = 0$ のとき証明してしまえば、一般の α の場合は U -map の性質から自動的に出てくる。 $\alpha = 0$ のときは定理 1 の standard form における positive cone の self-duality が本質的な役割を果たす。定理 2 (1) の式は $p = 2$ のときは等号が成り立つので、一般の p のときも等号が成り立つであろうと予想される。

参考文献

- [1] H. Izumi, *Constructions of non-commutative L^p -spaces with a complex parameter arising from modular actions*, Int. J. Math. 8(1997), 1029-1066.
- [2] H. Izumi, *Natural bilinear forms, natural sesquilinear forms and the associated duality of non-commutative L^p -spaces*, Int. J. Math. 9(1998), 975-1039