

Problems

出題	東大	森田茂之
	東大	岡睦雄
	都立大	渡辺敬一
	学習院大	水谷忠良

§ (森田)

1. *Rationally parallelizable* でない, *complex isolated singularity* の例を求む。
2. G を $U(n)$ の *finite subgroup* とする。 $\mathbb{C}^n/G$ の *quotient singularity* の *arithmetic genus* ψ を求む。
3. *algebraic variety* の *birational equivalence* を, *almost complex manifolds* の間の同値関係で定式化せよ。

もしそれができるとき, 準同型 $f: \Omega^*_X \rightarrow \mathbb{Q}$ がその "*birational equivalence*" で不変ならば, f は Todd genus の定数倍になるか。

(注)これに関しては, 最近, 肯定的に解答が与えられた。(森田))

4. *compact complex analytic space* V の奇数次の Sullivan class $S_{2i+1}(V)$ は, 0 になるか。 ($2\dim_{\mathbb{C}} V \leq 2i+1$ なら O.K.)

- 5 (Hironaka) *compact complex manifold* V の偶数次 *homologues*

class x に対して, $[M] = d \cdot x \times 1$ とする. d は整数.

$V \times P^N$ の almost complex submanifold M が存在するか. 但し N は十分大きな整数, homology は整数.

6. complex manifold V の underlying differentiable manifold V_0 上の almost complex structure を分類せよ.

(例) (P^3) の degree 4 hypersurface $V(4)$ の underlying differentiable manifold $V(4)_0$ 上には $c_1(\xi) \neq 0$ なる almost complex structure が存在する. もし, この structure が complex structure から由来するものであれば, この $V(4)_0$ は $V(4)$ と diffeomorphic な homotopy $K3$ の例を与える. ここで, complex surface S が $K3$ であるとは, $c_1(S) = 0$, $H_1(S, \mathbb{Q}) = 0$ なることをいう. $K3$ surface は $V(4)$ と diffeomorphic である. homotopy $K3$ surface とは, $c_1(\tilde{S}) \neq 0$, $c_1^2(\tilde{S}) = 0$ なる complex surface $\tilde{S}$ のことをいう. Kodaira は homotopy $K3$ は $V(4)$ と diffeomorphic かどうかの問題を出している.

7. (Smoothing Problem)

obstruction theory は 2 つに分かれる. inner obstruction — Pontryagin class で書けるかも知れない. outer obstruction — Becker にわかる obstruction. これは topological manifold M の smoothing problem にかんして, 次の map の lifting problem に由来している.

$$\begin{array}{ccc} p: \text{odd prime} & \exists ? \rightarrow & B\hat{O}_p = (B\hat{O}_p)_1 \times (B\hat{S}O_p)_3 \times \cdots \\ & \searrow & \downarrow \text{IR} \\ M & \xrightarrow{\text{classifying map}} & B\text{Top}_p = (B\text{Top}_p)_1 \times (B\text{STop}_p)_3 \times B\text{GL}_p \end{array}$$

8. (Carter obstruction に関して) $n \geq 3$, $(4n-1)$ -connected, smooth $8n$ -manifold M^{8n} で, π -manifold になるための primary obstruction $\chi \in H^{4n}(M, \pi_{4n-1}(SO)) \cong H^{4n}(M, \mathbb{Z})$ が $\chi^2 \neq 0$ を満たし, χ^2 が小さいような M を求め.

$$0 \longrightarrow \text{Tor} \longrightarrow \pi_{8n-1}(S^{4n}) \xrightarrow{H/2} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

§(図)

1. 一つの変数で定義される $\mathbb{C}^n$ の hypersurface に関して, singular set の dimension と Milnor fibering の fiber の connectivity との関係と求め.

2. type $w=(w_1, \dots, w_n)$ の weighted homogeneous polynomial で定義される hypersurface が isolated singularity をもつとき, Milnor's fiber の signature を $w_1, \dots, w_n$ で表わせ.

3. $f_t, t \in I$ を t に関して analytic な変数, 多項式の族とする. 各 f_t が原点 0 を isolated singular point とするとき, $A = \{(z, t) \in \mathbb{C}^n \times I : f_t(z) = 0\} \rightarrow \text{pt} \times I$ と $B = \text{pt} \times I$ が Whitney stratification になるための十分条件を求め.

予想: ある $\varepsilon > 0$ があって, 任意の t と $0 < \|z\| \leq \varepsilon$ なる任意の z に対して $\text{grad } f_t(z) \neq 0$. ならば O.K.

4. weighted homogeneous polynomial f に関して, $F = f^{-1}(1)$ の Euler number $\chi(F)$ を計算せよ. (isolated singularity の時は計算され

2130)

5. isolated singularity をもつ projective hypersurface を diffeo で分類せよ。

6. 多項式 f が isolated singularity をもつとき, その local monodromy の periodicity の判定条件を求めよ。

7. Projective hypersurface の $\mathbb{Q}$ -係数 cohomology ring を求めよ。
(注) これは解けた。(岡)

§ (2.1) 2-dim. normal singularity の分類について。

$$(V, p) \cong (V', p') \text{ analytic homeo} \Leftrightarrow \mathcal{O}_{V,p} \cong \mathcal{O}_{V',p'}$$

1. 適当な invariant を求めよ。

例. geometric genus P_g , arithmetic genus P_a , グラフ。

2. グラフでどの程度 classification ができるか?

• multiplicity や embedding dimension がグラフから求まるか?

• グラフが同じなら近傍は topological に homeo である。しかし、

逆は必ずしも成立しない。(グラフの)各頂点の genus と, multiplicity を与えれば, グラフが定まる。逆にグラフが同じなら, geometric genus は一致するか? また近傍が analytic homeo になるか? これも一般には成立しない。どうした場合に成立するか? (例. rational singularity, weighted homogeneous polynomial の時)

に成り立つ。))

§ (水谷)

I. manifold M に foliation が存在するか?

0. Euler number = 0 の場合
1. $\dim M = \text{odd}$ の場合
2. $\pi_1(M) = 0$, $\dim M = \text{odd}$ の場合
3. $\pi_1(M) = 0$, $\dim M = 7$

II $M \times D^2$ に foliation が存在するか?

0. Euler number = 0 の場合
1. M が specially spinnable になるか?
2. M が $(n-1)$ -connected $2n+1$ manifold の場合
3. $M = \text{homotopy sphere}$ の場合

III 0. spinnable structure が与えられた時, surgery を行え。

1. $K \times D^2$ に trivial spinnable structure が与えられた時, surgery が出来るか?

IV. 0. S^{2n+1} の spinnable structure の分類を行え. (simple の場合は M Kato に下る分類がある)

1. Simple spinnable structure の Seifert matrix を求めよ。特に Milnor fibering に関して。

V. M の foliation と $M \times D^2$ の foliation にはどのような関係があるか?