

部分多様体の共形不変量

広大 総合 安部 直人

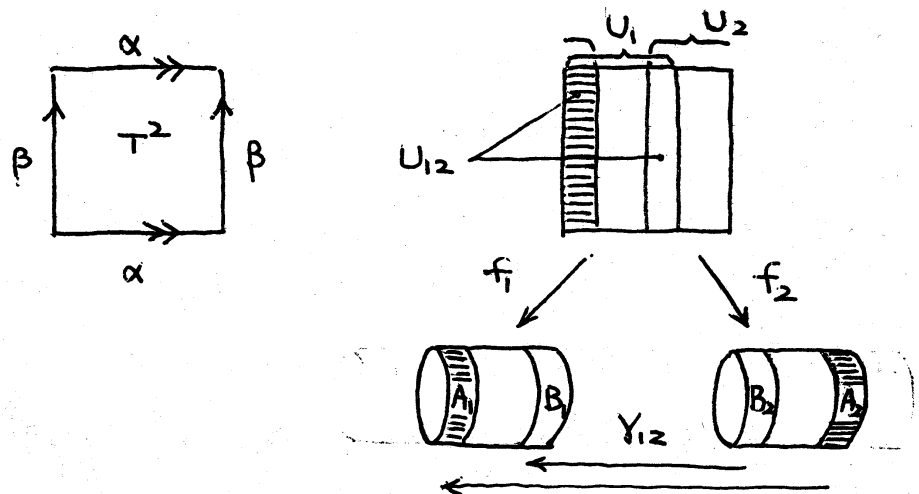
先ず部分多様体の概念を拡張し、そこで共形不変量の考察をします。実は後者の方が主目的だったのですが、最近になり「拡張の意義」についていろいろな方から御質問があったので、こちらに的を絞り、共形不変量の方は少し触れるだけにします。 $M, \bar{M}$ を smooth な多様体とする。

定義. 次のようなものが存在する時、 M が $\bar{M}$ への m.r.l.-embedding が与えられたと云うことにする:

- (i) M の open covering $\{U_\lambda\}$
- (ii) U_λ が $\bar{M}$ への embedding f_λ
- (iii) $U_{\lambda\mu} := U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$ の時、 $f_\mu(U_{\mu\lambda})$ の近傍から $f_\lambda(U_{\lambda\mu})$ の近傍へ $\bar{M}$ 上の local diffeo. $\gamma_{\lambda\mu}$ で $U_{\lambda\mu}$ において $f_\lambda = \gamma_{\lambda\mu} \circ f_\mu$ を満足する。更に $\gamma_{\lambda\lambda} = \text{id}_{\bar{M}}$, $U_{\lambda\mu\nu} := U_\lambda \cap U_\mu \cap U_\nu \neq \emptyset$ の時 $f_\nu(U_{\lambda\mu\nu})$ の近傍で $\gamma_{\lambda\mu} \circ \gamma_{\mu\nu} = \gamma_{\lambda\nu}$ が成立するものとする。

以後、 M と $\bar{M}$ は Riemann 多様体で f_λ , $\gamma_{\lambda\mu}$ は isometric が conformal の場合のみ扱います。先ず isometric の時には、normal bundle, normal connection, 第2基本量等の部分多様体 (M の global な immersion が与えられた場合) に定義される概念がそのまま拡張される。各点の近傍で local isometric imbedding が (ばうばうに) 与えられている場合と global isometric immersion との間には大きな gap があるが、m.r.l.-imbedding は、これらの中間に位置するものと思われる。次のような簡単な例を考えてみます。

例. $M = T^2$: flat torus, $\bar{M} = E^N$: Euclid 空間とする。 T^2 を E^N への isometric imbedding は global には $N \geq 4$ で、local には $N \geq 2$ で可能である。m.r.l.-imbedding は以下のように $N \geq 2$ で可能である。先ず $N=3$ の時、例えば、平均曲率が正定数になるようなものは、次のように作る。



ここで γ_{12} は A と B をそれぞれ重ねる E^3 の 2 つの運動を、それぞれ A_2 と B_2 の十分小さい近傍に制限して得られる。 T^2 の分割を増せば、各 $\gamma_{\lambda\mu}$ を E^3 の global な運動としてとることもできる。この m.r.l. - imbedding は、 $\pi_1(M)$ の生成元 α に対応するものを、 M の分割により切って作られている。同様にして、 α と β に対応する生成元を切るような分割を考えると、 E^2 への m.r.l. - imbedding を与えることができる。

この例からも明らかのように、 $\bar{M}$ が定曲率の場合には、rigidity により $\gamma_{\lambda\mu}$ は限られたものになり、 M の位相構造の方が表に出て来る。

次に conformal の場合を考える。この時は、 $\bar{M} = E^N$ としても話はずっと複雑になる。 E^N への conformal m.r.l. - imbedding が存在するための必要条件を求めるために、Chern-Simons の共形不変量に関する結果 [CS, Th. 5.14] を調べてみる。まず、inverse Pontrjagin form に関する結果については、global の場合と同様に成立するが、整数性に関しては一般に成立しない。次に、 $\underbrace{\bar{M} \hookrightarrow E^N}_{\text{conformal}}$ conformal m.r.l. - imbedding が与えられた時には、[A] で定義した部分多様体の共形不変量が、そのまま定義される。(以前、学会で発表したものと全く同じ形で定義する。)

参考文献

[A] N. Abe, On generalized total curvatures and conformal mappings, 準備中.

[CS] S.S. Chern and J. Simons, Characteristic forms and geometric invariants, Ann. of Math. 99 (1974), 48-69