

一般相対論の効果はカオス現象を強めるか。

早大理工 曾田康秀、前田恵一

一般相対論は重力ポテンシャルが十分弱く、粒子の速度が光速に比べて十分小さい時は Newton 力学に移行する。Newton 力学における粒子に関しては、数多くのカオスの振舞いが研究されているが、一般相対論的な効果を加えた時にそれらがどのように変化するかは、ほとんど議論されていない。そこでここでは Newton 力学の場合と、それに一般相対論的效果を加えた場合の粒子の振舞いの比較を、Weyl 解の一つ Zipoy-Voorhees 解 (ZV 解) ([1]) を使って行った。

これまで一般相対論における軸対称定常時空での粒子のカオスの振舞いは幾つか知られている ([2],[3],[4]) が、これらの例では、いずれも一般相対論的效果で粒子のカオスの性質は強められている。今回我々はそれが必ずしも正しくないことを ZV 解を例にとり示す。

ZV 解を Newton 近似した解は、中心力ポテンシャルに四重極モーメント Q の項を加えた解 (NQ 解) になっており、非可積分であることが証明されている ([5])。実際 NQ 解で、 Q を固定して角運動量 L をいろいろ変化させた時の粒子の振舞いを調べると、図 1 のように最大リヤプノフ指数は正となり、運動領域が中心に近い時にそれは大きな値を取る。ところが四重極モーメントの値を同じにして、ZV 解と NQ 解の粒子軌道のポアンカレマップを比較すると、図 2 のように ZV 解では全て Λ トーラスの断面の位相構造が得られた。これ以外にもパラメーターや断面を変えていろいろ調べたが、いずれも同じような結果が得られた。以上より、ZV 解は相対論的效果が粒子のカオスの振舞いを弱めていると考えられる。

この理由としては、ZV 解が可積分系になっていることが考えられる。ZV 解が可積分であれば、Newton 近似でポテンシャルの高次の項を落すことによって非可積分な系が生じ、カオス性が強められるのはもっともらしい。

これまでに相対論的時空で可積分であることが知られているのは、Petrov 分類 ([6]) における Petrov D 型の時空のみであり、ZV 解はこれに含まれない (Petrov I 型)。よって今回の結果は Petrov D 型以外の可積分系の存在を示唆している点でも興味深いものと言える。

参考文献

- [1] D. M. Zipoy, J. Math. Phys. 7, 1137 (1966);
B. H. Voorhees, Phys. Rev. D 2, 2119 (1970)
- [2] G. Contopoulos, Proc. R. Soc. A 431 183 (1990);
G. Contopoulos, Proc. R. Soc. A 435 551-62 (1991)
- [3] V. Karas and D. Vokrouhlicky, Gen. Relativ. Gravit. 24,
no. 7, 729-43 (1992)
- [4] L. Bombelli and E. Calzetta, Class. Quantum Grav. 9
2573-2599 (1992)

[5]M. Irigoyen and C. Simó, Celestial Mechanics 55 281-287(1993)

[6]D. Kramar, H. Stephani, and E. Herlt, Exact Solutions of Einstein's Field Equations(Cambridge University Press, Cambridge, 1980)P.58-60

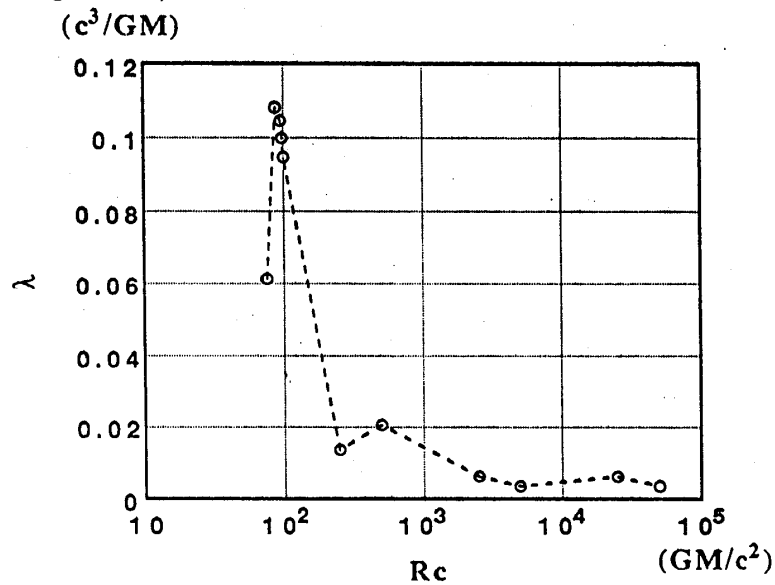


図 1 : 粒子軌道の中心からの平均距離 Rc と最大リャプノフ指数 λ との関係 (NQ 解; $Q=-0.833G^2M^3/c^4$)

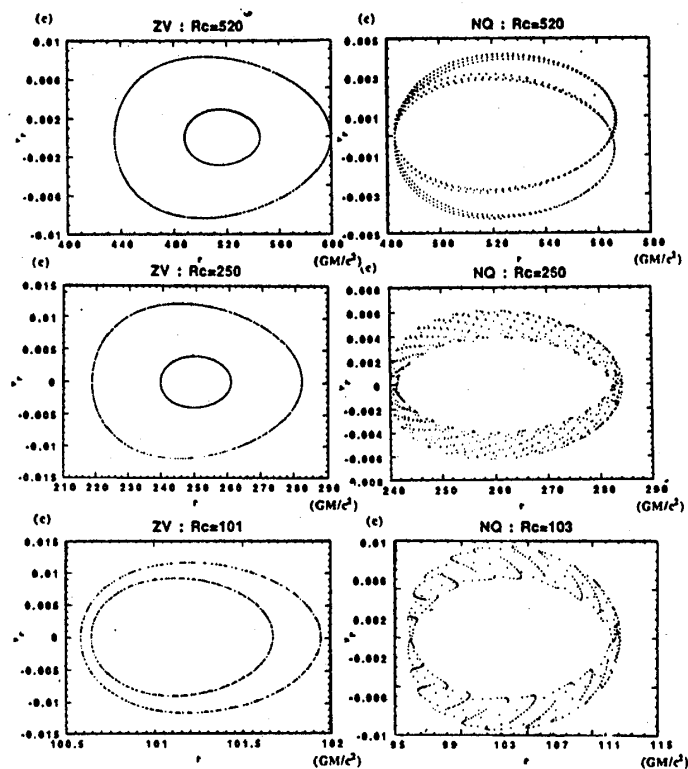


図 2 : ZV 解と NQ 解のポアンカレマップの比較; $Q=-0.833G^2M^3/c^4$, ポアンカレ断面: $\tan(\theta)=0.1(\theta$: 赤道面とのなす角)