

半単純対称空間の Spherical K-type のある種の 具体的表示について

東大 理 松本 久義 (Hisayosi Matumoto)

§0 Introduction

半単純対称空間の discrete series については、近年において、Flensted-Jensen, 大島-松本 らによって rank が 2 以上の場合も含めた、一般的な結果が得られている。これによると、半単純対称空間の discrete series は十分 regular な infinitesimal character を持つ場合は Parthasarathy と Zuckerman が独立に構成した Non-trivial $(\mathfrak{g}, K)$ -Cohomology をもつ表現であり、Schlichtkrull によって Langlands parameter も知られている。しかし、singular な場合には、その存在のための必要十分条件も含めてまだよくわかっていないようである。

ここで G を connected real semi-simple linear lie group とし、そのある involution σ に対応する半単純対称空間 G/H を考える。 K を $\sigma\theta = \theta\sigma$ なる G の Cartan involution θ に対応する maximal compact subgroup とする。このとき、 $L = K \cap H$

とすると G/H の discrete series は L -fixed vector をもつ K -type (すなわち spherical K -type といふ) を含むことが知られているが、ここでは、このような Spherical K -type の lowest weight vector を "具体的に" 表示することを考えることにし、
 事例として、rank 2 の場合の $SO_0(m+2, n)/SO(2) \times SO_0(m, n)$ を考察する。

§1 半単純対称空間の discrete series

$\mathfrak{g}$ を real semisimple Lie algebra. σ を $\mathfrak{g}$ の involutive automorphism (i.e. $\sigma^2 = \text{id}$) とする。さらに θ を σ と可換な $\mathfrak{g}$ の Cartan involution とする。そして σ (resp. θ) による $\mathfrak{g}$ の ± 1 固有空間分解を、
 $\mathfrak{g} = \mathfrak{f} + \mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{g} = \mathfrak{E} + \mathfrak{F}$) とおく。
 すると、 θ と σ が可換なことから次の直和分解を得る。

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{E} \cap \mathfrak{f} \oplus \mathfrak{E} \cap \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{F} \cap \mathfrak{f} \oplus \mathfrak{F} \cap \mathfrak{g}$$

これから、real Lie algebra の複素化を $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ のように表わす。
 そして次のように定める。

$$\mathfrak{g}^d = \mathfrak{E} \cap \mathfrak{f} \oplus i(\mathfrak{E} \cap \mathfrak{g}) \oplus i(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{f}) \oplus \mathfrak{F} \cap \mathfrak{g}$$

$$\mathfrak{E}^d = \mathfrak{E} \cap \mathfrak{f} \oplus i(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{f}) \quad \mathfrak{f}^d = \mathfrak{E} \cap \mathfrak{f} \oplus i(\mathfrak{E} \cap \mathfrak{g})$$

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{E} \cap \mathfrak{f} \quad \text{--- } i = \sqrt{-1} \text{ とおす}$$

そして、 $G_{\mathbb{C}}$ と $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ を Lie algebra に持つ、connected complex Lie group とする。さらに $G, K, H, K^d, \dots$ など $G_{\mathbb{C}}$ の

$E, f, E^d, \dots$ などに対応する $G_{\mathbb{C}}$ の analytic subgroup を表わすことにする。われわれはこれから、半単純対称空間 G^d/H^d の discrete series つまり $L^2(G^d/H^d)$ の既約部分表現を考えることにする。まず次のような結果が知られている。

Theorem (Flensted-Jensen, Matsuki, Oshima)

G^d/H^d が discrete series をもつための必要十分条件は、

$$\text{rank}(G^d/H^d) = \text{rank}(K^d/K_H H^d) \text{ となることである。}$$

したがって、以下においては、 $\text{rank}(G^d/H^d) = \text{rank}(K^d/K_H H^d)$ という条件を仮定することにする。

ここで $\mathcal{Q}$ をある f の maximal abelian subspace とすると

上の仮定により、 $\mathcal{Q}$ は $\mathfrak{g}_1$ においても maximal abelian になる。

次に、 $\hat{H}(K^d)$ で $H_{\mathbb{C}}$ の holomorphic representation の制限になっているような H の有限次元表現の同値類のつくる集合を表わす。すると、 $\hat{H}(K^d)$ と K^d の有限次元表現の同値類全体は、 $H_{\mathbb{C}}$ の holomorphic representation を介して、1対1に対応する (ここで K^d (resp. K) は G^d (resp. G) の maximal compact subgroup である。)

次に $\mathbb{Q}_{\mathbb{C}}$ の complex dual を $\mathbb{Q}_{\mathbb{C}}^*$ で表わす。さらに $\mathbb{D}(G^d/H^d)$ (resp. $\mathbb{D}(G/K)$) を G^d/H^d (resp. G/K) 上の不変微分作用素環とする。すると、 $\mathbb{D}(G^d/H^d)$ と $\mathbb{D}(G/K)$ は、 $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ 上の holomorphic な微分作用素を介して、自然に同型になる。

したがって $\lambda \in \mathbb{Q}\mathbb{C}^*$ に対して Harish-Chandra homomorphism
 1) に対して algebra homomorphism

$$\chi_\lambda: \mathbb{D}(G^d/H^d) \longrightarrow \mathbb{C}$$

を定義できる。

M が C^ω -manifold であるとき、次のように定める。

$$A(M) = \{ M \text{ 上の } \mathbb{C}\text{-valued } C^\omega \text{ function} \}$$

$$B(M) = \{ M \text{ 上の hyperfunction} \}$$

ここで $\lambda \in \mathbb{Q}\mathbb{C}^*$ に対して次のように定める。

$$A_{K^d}(G^d/H^d; m_\lambda) = \{ f \in A(G^d/H^d) \mid f \text{ は } K^d\text{-finite} \cdot \wedge \cdot Df = \chi_\lambda(D)f \\ (D \in \mathbb{D}(G^d/H^d)) \}$$

次に m, m', M, M' をそれぞれ $\mathbb{Q}$ の E, L, K, L における
 Centerizer を表わす Σ, Σ' をそれぞれ $(\mathfrak{g}, \mathbb{Q}), (\mathfrak{g}', \mathbb{Q})$
 に対応する root system とする。またそれぞれの positive system
 Σ^+, Σ'^+ を compatible になるように固定しておく。また、
 $\alpha \in \Sigma$ (resp. Σ') に対応する $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{g}'$) の root space を $\mathfrak{g}_\alpha$
 (resp. $\mathfrak{g}'_\alpha$) で表わし、 $m_\alpha = \dim \mathfrak{g}_\alpha$ (resp. $m'_\alpha = \dim \mathfrak{g}'_\alpha$) とおく。
 次に、 $\Sigma^+, -\Sigma^+, \Sigma'^+, -\Sigma'^+$ に対応する nilpotent subalgebra
 をそれぞれ $\mathfrak{n}, \bar{\mathfrak{n}}, \mathfrak{n}', \bar{\mathfrak{n}}'$ で表わし、対応する analytic sub-
 group を $N, \bar{N}, N', \bar{N}'$ とする。また $\mathbb{Q}$ に対応する analytic
 subgroup を A とおく。また、

$$P = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Sigma^+} m_\alpha \alpha, \quad P_C = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Sigma'^+} m'_\alpha \alpha \quad \text{と定める。}$$

4

次に $\mathcal{L}$ で " L -fixed vector ξ も k^d の有限次元表現の highest weight の集合を表わす。 ($\mathcal{L} \subseteq \mathcal{Q}_G^*$ とみよせよ。) また $\lambda \in \mathcal{Q}_G^*$ に対して.

$$\mu_\lambda = \lambda + \rho - 2\rho_c \quad \text{とおく。}$$

また $P = MAN$ とおくと、これは G の minimal parabolic subgroup になる。 $\xi = \sum \{\theta_1, \dots, \theta_m\}$ を G/P の closed H -orbit の全体とし、 $\hat{\theta}_i = \{x \in G \mid xP \in \theta_i\}$ ($1 \leq i \leq m$) と定める。 すると $1 \leq i \leq m$ に対して、 $X_i \in K$ を、 $\hat{\theta}_i = H X_i P$ および $\text{Ad}(X_i)Q = Q$ を満たすようにとることもできる。
 $\lambda \in \mathcal{Q}_G^*$ に対して、 $\lambda^{\hat{\theta}} = \lambda \circ \text{Ad}(x_{\hat{\theta}})^{-1}$, $\Sigma_{\hat{\theta}}^+ = \Sigma^+ \circ \text{Ad}(x_{\hat{\theta}})^{-1}$ と定める。

次に $\lambda \in \mathcal{Q}_G^*$ に対して、次のように定める。

$$\mathcal{B}(G/P, L_\lambda) = \{ f \in \mathcal{B}(G) \mid (\forall x \in G)(\forall m \in M)(\forall a \in A) \\ (\forall n \in \mathbb{N}) [f(xman) = a^{\lambda - \rho} f(x)] \}$$

さらに $1 \leq j \leq m$ として、次のようにおく。

$$\mathcal{B}^{\hat{\theta}}(G/P, L_\lambda) = \{ f \in \mathcal{B}(G/P, L_\lambda) \mid \text{supp } f \subseteq \hat{\theta}_j \}$$

またさらに $\delta \in \hat{H}(k^d)$ として、次のようにおく。

$$\mathcal{B}_\delta^{\hat{\theta}}(G/P, L_\lambda) = \{ f \in \mathcal{B}^{\hat{\theta}}(G/P, L_\lambda) \mid f \text{ は } H \text{ の作用の} \\ \text{もとで } \delta^{\oplus n} (n \text{ は非負整数}) \text{ に従う} \}$$

$$\mathcal{B}_H^{\hat{\theta}}(G/P, L_\lambda) = \bigoplus_{\delta \in \hat{H}(k^d)} \mathcal{B}_\delta^{\hat{\theta}}(G/P, L_\lambda)$$

すると次のような結果が知られている。

Theorem (Matsuki Oshima [2])

1° $\lambda \in \mathbb{Q}_\sigma^*$ が $(\forall \alpha \in \Sigma^+) [\operatorname{Re} \langle \lambda, \alpha \rangle > 0]$ をみたすときは、次のような $\mathcal{O}_\sigma$ -isomorphism が存在する。

$$\bigoplus_{j=1}^m \mathcal{B}_H^{\bar{\sigma}}(G/P, L_\lambda) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_{fd}(G/H^d, \mathcal{M}_\lambda) \cap L^2(G/H^d)$$

2° $\mathcal{B}_H^{\bar{\sigma}}(G/H, L_\lambda) \neq \{0\}$ なら、これは有限個の既約 $\mathcal{O}_\sigma$ -module の直和になる。

3° λ が $+\bar{\sigma}$ regular なら (i.e. $\langle \lambda, \alpha \rangle \gg 0$ for all $\alpha \in \Sigma^+$)

$\mathcal{B}_H^{\bar{\sigma}}(G/H, L_\lambda)$ は既約である。

4° $\mathcal{B}_H^{\bar{\sigma}}(G/H, L_\lambda) \neq \{0\}$ なら次の①, ②が成り立つ。

① $\mu_\lambda^{\bar{\sigma}}$ は $\mathcal{L}$ の生成する $\mathbb{Q}$ 上の lattice に含まれる。

② $\alpha \in \Sigma^+$ が Σ の simple root で $\sigma_\alpha \leq f$ をみたすならば、
 $\langle \lambda^{\bar{\sigma}} - \rho^{\bar{\sigma}}, \alpha^{\bar{\sigma}} \rangle \gg 0$

§2 hyperfunction の拡張

まず次のように定める。

$$G' = \bar{N}MAN, \quad H' = \bar{N}'M'AN'$$

すると、 G' (resp. H') は G (resp. H) の open dense subset である。

次に (τ_ν, ν_ν) によって、 $\nu \in \mathcal{L}$ で $-\nu$ が lowest weight になっているような H の有限次元既約表現を替わすことにする。また同じ記号で対応する f_σ の表現も替わす。

さらに $\forall v \in V_\nu$ とおき non-trivial な $m' \oplus n'$ -fixed vector
 かつ $H \in \mathfrak{Q}$ に対して $T_H(v) = -\nu(H)v$ とする lowest
 weight vector とする。ここで Lie algebra $\mathfrak{g}$ に対して $U(\mathfrak{g})$
 でその複素化の universal enveloping algebra を表す
 ことにして、次のようにおく。

$$\mathcal{B}_\nu^\delta(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}, L_\lambda) = \{ f \in \mathcal{B}^\delta(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}, L_\lambda) \mid \dim U(\mathfrak{g})f < \infty \}$$

また $\nu \in \mathfrak{L}$ に対して次のように定める。

$$\mathcal{B}_\nu^\delta(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}, L_\lambda) = \{ f \in \mathcal{B}_\nu^\delta(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}, L_\lambda) \mid U(\mathfrak{g})f \simeq V_\nu \}$$

ここで $U(\mathfrak{g})f$ と V_ν の間の同型は $\mathfrak{g}$ -module としてのもの
 である。

次に、以下のように定義する。

$$\begin{aligned} \Upsilon^\delta(G', L_\lambda) = \{ f \in \mathcal{B}(G') \mid & (\forall g \in G') (\forall m \in M) \\ & (\forall a \in A) (\forall n \in N) [f(gman) = f(g)a^{n^p}] \\ & \wedge \text{supp } f \subseteq \tilde{\mathcal{O}}_\delta \cap G' \} \end{aligned}$$

$$\Upsilon_\nu^\delta(G', L_\lambda) = \{ f \in \Upsilon^\delta(G', L_\lambda) \mid U(\mathfrak{g})f \simeq V_\nu \}$$

G' は G において open である。制限によって、

$$p: \mathcal{B}^\delta(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}, L_\lambda) \rightarrow \Upsilon^\delta(G', L_\lambda)$$

なる map が定義できる。これは $\mathfrak{g}$ -homomorphism になる。

すると次のような結果が成り立つ。

Proposition 2.1 $\nu \in \mathfrak{L}$ かつ $1 \leq \delta \leq m$ とすると、

次が成り立つ。

□

1°. $p|_{\mathcal{B}_\lambda^{\tilde{\sigma}}(G/P, L_\lambda)}$ は one-to-one

2°. $\tilde{p}_\nu = p|_{\mathcal{B}_\nu^{\tilde{\sigma}}(G/P, L_\lambda)}$ とおく.

$$\tilde{p}_\nu : \mathcal{B}_\nu^{\tilde{\sigma}}(G/P, L_\lambda) \xrightarrow{\sim} Y_\nu^{\tilde{\sigma}}(G', L_\lambda)$$

は. 1. onto になる.

★ この Proposition の証明には 次の Lemma を使う.

Lemma 2.2 X を C^∞ -manifold. $\tilde{G}$ を X 上の G の作用する Lie group とする. $\tilde{\mathfrak{g}}$ を $\tilde{G}$ の Lie algebra とし. $\tilde{\mathcal{O}}$ を $\tilde{G}$ の closed orbit とする. 二つ. $u \in \mathcal{B}(X)$ が $\text{Supp } u \subseteq \tilde{\mathcal{O}}$ かつ $\dim \bigcup_{\tilde{g} \in \tilde{G}} \tilde{g}u < \infty$ を満たし. P が X 上の C^∞ -係数微分作用素ならば,

$$\text{Supp } Pu \subsetneq \tilde{\mathcal{O}} \quad \longrightarrow \quad Pu = 0$$

★ Proposition 2.1 により. あるいは G' 上の hyperfunction について考えればよいことがわかる. 特に $Y^{\tilde{\sigma}}(G', L_\lambda)$ の元は. $\bar{N}$ 上で考えれば十分であり. $\bar{N}$ の適当な global な座標により具体的に書き下せることが期待される.

§3 Some Technical Lemma

$\bar{r} = m' + \mathcal{Q} + \bar{n}' \subseteq \mathfrak{g}$ とおく. これは $\mathfrak{g}$ の minimal parabolic subalgebra とする.



Lemma 3.1 non-trivial $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ -module W が、次の ①~④ を満たすような $\pi: V \in W$ を含むとすると

$$\textcircled{1} \quad U(\mathfrak{g}) \cdot v = W$$

$$\textcircled{2} \quad (\forall X \in \mathfrak{m}' + \mathfrak{n}') [X \cdot v = 0]$$

$$\textcircled{3} \quad (\exists \nu \in \mathbb{Q}) (\forall H \in \mathfrak{h}) [H \cdot v = -\nu(H)v]$$

$$\textcircled{4} \quad \text{ある } \Sigma \text{ の simple root } \alpha \in \Sigma'^+ \text{ に対して}$$

$$\dim_{\mathbb{C}} U(\mathfrak{g}_{2\alpha} + \mathfrak{g}_\alpha) \cdot v < \infty$$

このとき、 W は、non-trivial $\mathfrak{l}$ -fixed vector を持つ有限次元既約 $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ -module になる。つまり W は V_ν と $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ -module として同型になり、この同型において、 ν は ν_ν の scalar 倍に対応する。

★ この Lemma にあて $\nu \in Y^\delta(G', L_\lambda)$ が $Y_\nu^\delta(G', L_\lambda)$ に属するかどうかをたしかめることが出来る。

§4 The Case of $SO_0(m+2, n)/SO(2) \times SO_0(m, n)$ ($m \geq 3$)

この場合

$$G/H = SO_0(m+2, n)/SO(2) \times SO_0(m, n)$$

に対して、

$$G/H = SO_0(m+2, 2)/SO(2) \times SO_0(m, 2)$$

と表す。

ここで Lie algebra を行列によって以下のように表す。

⑨

$$\mathcal{G} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{A_1}^{m+n} & \overbrace{B}^z \\ \hline \tau B & A_2 \end{array} \right) \in M(m+n+2, \mathbb{R}) \mid \begin{array}{l} \tau A_{\bar{c}} = -A_{\bar{c}} \\ c\bar{c} = (1, 2) \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{f} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} \overbrace{A_1}^n & \overbrace{0}^m & \overbrace{0}^z \\ \hline 0 & A_2 & B \\ \hline 0 & \tau B & A_3 \end{array} \right) \in M(m+n+2, \mathbb{R}) \mid \begin{array}{l} \tau A_{\bar{c}} = -A_{\bar{c}} \\ c\bar{c} = (1, 2, 3) \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{Q} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} & \tau_1 \\ \hline & \tau_2 \\ \hline \tau_1 & \tau_2 \end{array} \right) \in M(m+n+2, \mathbb{R}) \right\}$$

$$\mathcal{M} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} S & & \\ \hline \vdots & \varepsilon & \\ \hline & \varepsilon & \\ \hline & \varepsilon & \varepsilon \end{array} \right) \in GL(m+n+2, \mathbb{R}) \mid \begin{array}{l} S \in SO(m+n-2) \\ \varepsilon = \pm 1 \end{array} \right\}$$

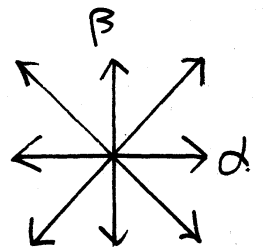
ここで、 $\alpha, \beta \in \mathcal{Q}_0^*$ を次のように定める。

$$\left(\begin{array}{c|c} & \tau_1 \\ \hline & \tau_2 \\ \hline \tau_1 & \tau_2 \end{array} \right) \xrightarrow{\alpha} \tau_1, \quad \left(\begin{array}{c|c} & \tau_1 \\ \hline & \tau_2 \\ \hline \tau_2 & \tau_1 \end{array} \right) \xrightarrow{\beta} \tau_2$$

すると、 $\Sigma = \{\pm\alpha \pm \beta\}$ である。

ここで $\Sigma^+ = \{\alpha, \beta, \beta - \alpha, \alpha + \beta\}$ と。

おいて、次のように定める。



$$\overline{N}_{-\alpha}^{(1)} = \left(\begin{array}{c|c|c} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & & & & \\ \hline 0 & & & & \\ \hline 0 & & & & \\ \hline 1 & & & & \\ \hline c\bar{c} \end{array} \right) \quad \overline{N}_{-\beta}^{(1)} = \left(\begin{array}{c|c|c} & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline -1 & & & & \\ \hline 0 & & & & \\ \hline 1 & & & & \\ \hline c\bar{c} \end{array} \right)$$

$$\bar{N}_{-\alpha-\beta} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \hline & 1 & 1 \\ | & -1 & -1 \\ \hline | & 1 & 1 \\ | & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \bar{N}_{\alpha-\beta} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \hline & -1 & -1 \\ | & 1 & 1 \\ \hline | & -1 & -1 \\ | & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

よる.

$$\sigma_{-\alpha} = \sum_{i=1}^{n+m-2} \mathbb{R} \bar{N}_{-\alpha}^{(i)}, \quad \sigma_{-\beta} = \sum_{i=1}^{n+m-2} \mathbb{R} \bar{N}_{-\beta}^{(i)}$$

$$\sigma_{-\alpha-\beta} = \mathbb{R} \bar{N}_{-\alpha-\beta}, \quad \sigma_{\alpha-\beta} = \mathbb{R} \bar{N}_{\alpha-\beta}$$

よる. また

$$\rho = \frac{n+m-2}{2} \alpha + \frac{n+m}{2} \beta, \quad \rho_c = \frac{m-2}{2} \alpha + \frac{m}{2} \beta$$

$$\mathcal{L} = \{ \ell \alpha + h \beta \mid \ell = 0, 1, 2, \dots, h - \ell = 0, 2, 4, \dots \}$$

よる. またこの場合 G/p の closed orbit はただ 1 つであり

$x_1 = \text{identity element}$ とある。

$$z = z'' \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n+m-2}) \in \mathbb{R}^{n+m-2}, \quad \eta = (\eta_1, \dots, \eta_{n+m-2}) \in \mathbb{R}^{n+m-2}$$

, $z, u \in \mathbb{R}$ に對して. 次のように $\bar{N}$ の第 1 種標準座標系を.

定める

$$\bar{N}(\xi, \eta, z, u) = \exp \left(\sum_{i=1}^{n+m-2} (\xi_i \bar{N}_{-\alpha}^{(i)} + \eta_i \bar{N}_{-\beta}^{(i)}) + z \bar{N}_{\alpha-\beta} + u \bar{N}_{-\alpha-\beta} \right)$$

次に A の global coordinate を以下の様に定める。

$t_1, t_2 > 0$ に對し. $\theta_i = \log t_i$ とおき.

$$A(t_1, t_2) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \text{ch} \theta_1 & \text{sh} \theta_2 \\ \text{ch} \theta_2 & \text{sh} \theta_1 \end{matrix} & \begin{matrix} \text{sh} \theta_2 \\ \text{ch} \theta_1 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} \text{sh} \theta_2 \\ \text{sh} \theta_1 \end{matrix} & \begin{matrix} \text{ch} \theta_2 \\ \text{ch} \theta_1 \end{matrix} \end{array} \right) \begin{matrix} \} 2 \\ \} 2 \end{matrix} \quad \text{とある}$$

ここで. ch , sh は 各々 hyperbolic cosine, sine とある

==2". $h > l > 0$ 正自然数 h, l に対して.

$$F_{l,h} \in Y^1(G', L_{ld+h\beta})$$

を、次にあてて定める (δ は delta function)

$$F_{l,h}(\bar{N}(0, \eta, z, u) \bar{N}(\xi, 0, 0, 0) m A(\epsilon, t_2) n) \\ = \delta(\xi_1) \cdots \delta(\xi_n) \delta(\eta_1) \cdots \delta(\eta_n) t_1^{l - \frac{n+m+2}{2}} t_2^{h - \frac{n+m}{2}}$$

$$c \in M, n \in \mathbb{N}$$

==2" $\bar{N}(0, \eta, z, u) \bar{N}(\xi, 0, 0, 0)$ は $\bar{N}$ の global coordinate を与えている。

次に Ψ を、定係数微分作用素

$$P = \sum_{p,q} C_{p,q} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}\right)^{p_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial \xi_n}\right)^{p_n} \left(\frac{\partial}{\partial \eta_1}\right)^{q_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial \eta_n}\right)^{q_n}$$

$$(C_{p,q} \in \mathbb{C}, p = (p_1, \dots, p_n), q = (q_1, \dots, q_n))$$

で、次の 1° ~ 5° を満たすもの全体の $\subset$ 集合とする。

$$1^\circ (\exists p_\xi, p_\eta \in \{0, 1, 2, \dots\})$$

$$[C_{p,q} \neq 0 \rightarrow p_1 + \dots + p_n = p_\xi, q_1 + \dots + q_n = p_\eta]$$

2° $A \in O(n)$ に対して、 P は座標変換

$$(\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n) \mapsto ((\xi_1, \dots, \xi_n)A, (\eta_1, \dots, \eta_n)A)$$

に対して不変

$$3^\circ l + \frac{n-m+2}{2} + p_\xi \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$4^\circ h - l - 1 + p_\eta - p_\xi \in \{0, 2, 4, \dots\}$$

$$5^0 \quad (2\mathbb{Z})^{h-l-1} \sum_{p,q} c_{p,q} \prod_{i=1}^n \left[\sum_{k_i=0}^{p_i} \sum_{r_i=0}^{q_i+k_i} \binom{p_i}{k_i} \binom{q_i+k_i}{r_i} \right. \\ \left. \times (-)^{k_i+r_i+q_i} \delta_{\binom{p_i-k_i+r_i}{q_i}} \delta_{\binom{q_i+k_i-r_i}{\xi_i}} (2\mathbb{Z})^{k_i-r_i} \right]$$

12. Σ に関する多項式になる。

★この場合についての結果は次のようになる。

Theorem $h > l > 0$ かつ $\mu_{ld+h\beta} \in \mathcal{L}$
 $(\Leftrightarrow l + \frac{h+m+2}{2} \in \mathbb{Z} \wedge h-l-1 \in 2\mathbb{Z})$ とする。

このとき $\Upsilon'(G', L_{ld+h\beta})$ の spherical K^d -type の lowest weight vectors の全体は。

$$\{ P \cdot F_{l,h} \mid P \in \Psi \}$$

に一致する。さらに $P \in \Psi$ に対して

$$P F_{l,h} \in \Upsilon_{\left(l + \frac{h+m+2}{2} + p_{\frac{1}{2}} \right) \alpha + \left(h + \frac{h-m}{2} + q_{\frac{1}{2}} \right) \beta}^1(G', L_{\lambda})$$

と成る。

★ Proposition 2.1 による。 $P F_{l,h}$ は $\mathcal{B}_H'(G/P, L_{\lambda})$ の spherical K^d -type の lowest weight vector に一致している。

★ $m=1$ のとき。つまり

$$G/H^d = SO_0(m+2, 1) / SO(2) \times SO_0(m, 1)$$

のときは。

$$\Psi = \left\{ c \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} \right)^p \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_1} \right)^{\bar{p}} \mid c \in \mathbb{C}, h-l-1 \geq p \geq -l - \frac{h-m+2}{2}, p+\bar{p} : \text{even} \right\}$$

と成る。

- ★ $\Delta_{\eta} = \left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial}{\partial z_n}\right)^2$ と定めると $\Psi \cdot \Delta_{\eta} \subseteq \Psi$
 ★ もし $1 \in \Psi$ なら $\psi(\log) F_{\alpha, \eta}$ は Flansted-Jensen
 が [1] で構成した表現になる。

- Acknowledgements -

この場を借りて、いろいろ重要な助言をいただいた大島・松本両先生に
 感謝の意を表わしていただきます。

References

- [1] M. Flansted-Jensen : Discrete series for
 semisimple symmetric spaces. Ann of Math III
 (1980) 253-311
 [2] T. Oshima and T. Matsuki : A complete
 description of discrete series for semisimple
 symmetric spaces (1983) preprint