

On the geometry of determinantal varieties
associated to 2-bundles on $\mathbb{P}^n$

広島大学理学部 隅広秀康

§1. Introduction

1.1) $\mathbb{P}^n$ 上の階数 2 のベクトル束及び余次元 2 の非特異閉部分多様体に関する次の重要問題が提起されてから約 20 年が経過したが、未だに未解決のままである ([4], [10], [12]).

Hartshorne 予想: $\mathbb{P}^n$ ($n \geq 6$) 上の階数 2 のベクトル束 E は線束の直和に分解される, i.e., $E = \mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(b)$ ($a, b \in \mathbb{Z}$). また, 余次元 2 の非特異閉部分多様体 X は完全交差である, i.e., $X = S_1 \cap S_2$ ($S_i: \mathbb{P}^n$ の超曲面).

上記予想は階数 2, 余次元 2 に限らずとも, と一般的に条件の下で考えられているが, 最も簡単な上記の場合ですら未解決があるので, ここでは階数 2, 余次元 2 に限って取扱うこととする.

1.2) この問題解決に向けて種々の試みが行われているが, 公表されているものもいくつかの通りである.

$X \subset \mathbb{P}_C^n$: 非特異閉部分多様体, 余次元 $= 2$,

$$d = \deg X.$$

1. 2. 1) W. Barth, Van de Ven (1974) [2]:

$$d \leq \frac{1}{4}(n+5) \rightarrow X: \text{完全交差}.$$

1. 2. 2) Z. Ran (1983) [8]: $\Lambda^2 N_{X/\mathbb{P}^n} = \mathcal{O}_X(v) \ (v \in \mathbb{Z}).$

$$i) \ v \geq \frac{d}{(n-2)} + (n-2), \text{ 又は } ii) \ d \leq n-2$$

$\rightarrow X$: 完全交差.

1. 2. 3) A. Holme (1989) [5]:

$6 \leq n \leq 11$ に対し, 関数 $D(n)$ を次の様に定める.

n	6	7	8	9	10	11
$D(n)$	62	80	107	131	155	194

2 の時, $d \leq D(n) \rightarrow X$: 完全交差.

1. 2. 4) 自然数 t に対し, 次の制限射: $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(t)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_X(t))$ が全射のと X を t -normal という. $n \geq 6$ のとき, X が完全交差であることと X が全ての自然数 t に対して t -normal であることは同値である.

1. 2. 5) F. L. Zak (1981) [13]:

$$n \geq 5 \rightarrow X: 1\text{-normal}.$$

1. 2. 6) Z. Ran (1984) [9]:

$$n \geq 3t^2 + 2t + 2 \rightarrow X: t\text{-normal}.$$

1. 2. 7) Th. Peternell, J. Le Potier, M. Schneider

(1987) [6]:

$$n \geq 12 \rightarrow X: t\text{-normal } (t=1, 2).$$

1.2.8) A. Alzati, G. Ottaviani (1990) [1]:

$$n \geq 6 \rightarrow X: t\text{-normal } (6 \leq t \leq n+2).$$

1.3) $\mathbb{P}^n$ 上の 2-bundles に付随する Determinantal varieties を考
えつゝ右動次は Hartshorne 予想の本質を変えないうで、より低次
元代数多様体上の問題に帰着させることである。本質を変え
ないうで、上記予想を低次元代数多様体上の問題に帰着させて
いるが現在の所上記予想を解決するに至っていない。しかし
、副産物として次の結果をばいめとして、いくつかの有用な
諸結果が得られている。

i) 完備線型系の既約性判定法。

ii) $\mathbb{P}^n$ 上の 2-bundles の symmetric tensors に関する消滅
定理。

これら副産物を中心に Determinantal varieties の geometry を
紹介する。Hartshorne 予想への試みとして我々の Determin
antal varieties の手法は 1.2) の諸結果をもとらした種々の
方法と互いに関連しあっている。この手法がベクトル束と
代数幾何学との関係を解明する新しい手法であることを期
待している。

§2. Determinantal Varieties

2.1) $E \in \mathbb{P}^n$ ($n=2m$, 又は $n=2m+1$) 上の階数 2 のベクトル系, $\pi: p(E) \rightarrow \mathbb{P}^n$ は E に付随する射影系, $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{m+1}\}$ は次の条件をみたす $(m+1)$ 個の E の global sections とする:

1) $Y = D_1 \cap \dots \cap D_{m+1}$: $p(E)$ の余次元 $(m+1)$ の非特異閉部分多様体. ところで, D_i は σ_i に付随する $p(E)$ の tautological divisor.

2) $\bigcap_{i=1}^{m+1} W(\sigma_i) = \emptyset$, $W(\sigma_i) = \sigma_i$ の zero locus.

このとき, $\mathbb{P}^n$ の閉部分集合 X を次の様に定める.

$$X: \sigma_i \wedge \sigma_j = 0, \quad 1 \leq i < j \leq m+1.$$

構造射 $\pi: p(E) \rightarrow \mathbb{P}^n$ は X と Y との間と同型を与える. 従って, X は $\mathbb{P}^n$ の $(n-m)$ 次元非特異閉部分多様体である. X は E の global sections の取り方に依存するが,

定義 1 $X \in E$ の Determinantal variety とする.

2.2) $V = H^0(\mathbb{P}^n, E)$, $\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{m+1} \rangle$ ($\sigma_i \in H^0(\mathbb{P}^n, E)$) は V の $(m+1)$ 次元部分ベクトル空間, $G = \text{Grass}(m+1, V)$ をグラスマン多様体とする.

G 上の $\forall \langle \sigma \rangle = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{m+1} \rangle$ に対し, $p(E)$ の閉部分集合

$$Y_{\langle \sigma \rangle} := D_1 \cap \dots \cap D_{m+1}, \quad D_i = \sigma_i \text{ の taut. divisor.}$$

とする. $p(E) \times G$ の閉部分集合 $\mathcal{Y}$ を次の様に定める.

$$\mathcal{Y} := \{(x, \langle \sigma \rangle) \in p(E) \times G \mid x \in Y_{\langle \sigma \rangle}\}.$$

$$p: \mathcal{Y} \rightarrow p(E), \quad q: \mathcal{Y} \rightarrow G.$$

また, p, q は射影写像である.

定理 2 i) $U = \{ \langle \lambda \rangle \in G \mid \langle \lambda \rangle \text{ は (2.1) の条件 1), 2) を満たす} \}$ は G の Zariski 開集合である.

ii) E の determinantal varieties は U 上の smooth family である, i.e., $q: q^*(U) \subset \mathcal{G} \rightarrow U$ は smooth projective map である. 従って, E の determinantal varieties の微分幾何学的諸性質は E の global sections の取り方で決まる.

§ 3. Topologies

3.1) $X \simeq Y$ は $P(E)$ の豊富因子の切断によって得られるので, Weak Lefschetz theorem, Hodge decomposition theorem, Hard Lefschetz theorem により, X の topologies は次の様に決定される. X 上の因子 H, D を次の様に定める:

$H = P^n$ の hyperplane が X への制限,

$D = P(E)$ の tang. div. が X への制限.

定理 3 i) $i \leq n - (m+1)$ に対し,

$$H^i(X, \mathbb{Z}) = \begin{cases} 0 & (i = \text{奇数}), \\ \mathbb{Z}H^{\frac{i}{2}} \oplus \mathbb{Z}H^{\frac{i}{2}-1}D & (i = \text{偶数}) \end{cases}$$

ii) $p+q \leq n - (m+1)$ ならば,

$$H^{p,q}(X) = \begin{cases} 0 & (p+q: \text{奇数}, \text{又 } p \neq q) \\ \mathbb{C}H^p \oplus \mathbb{C}H^{p-1}D & (p=q) \end{cases}$$

iii) $p+q \geq n - m + 1$ ならば,

$$F = c_1 H - D \in \text{Pic}(X).$$

X : $A_i \cdot A_j = 0$ ($1 \leq i < j \leq m+1$) であるから, 各 $A_i \in H^0(\mathbb{P}^m, E)$ は $\rho(A_i) = 0$ をみたす. 従って, A_i は $H^0(\mathcal{O}_X(F))$ の元とみなす. 完備線型系 $|F|$ の m 次元部分線型系 $\alpha = (F, L)$ を引起こすことが解かる.

定理 5 i) 線型系 α は固定点をもたない.

ii) $\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}^m$ を α で定義された正則写像とすると, $\mathbb{P}^m$ の任意の点 y に対し, $\dim \varphi^{-1}(y) \leq 1$, i.e., F は 1-ample (A. So mmers の意味で) である.

iii) $n = \text{偶数} \rightarrow \varphi$ は generically finite, $\deg \varphi = c_2^m$,

$n = \text{奇数} \rightarrow \varphi$ は縮数 $= 1 + \frac{1}{2}\{m c_1 - (n+1)\} c_2^m$ の non-hyperelliptic curves の degeneration.

4.2) 完備線型系の既約性判定法

X を一般の非特異射影多様体, $N^1(X) = (\text{Pic}(X)/\text{num}) \otimes \mathbb{R} = \mathbb{P}^p(\mathbb{R})$ ($p = X$ のピカール数), $\overline{NE}^1(X) = \text{pseudo-effective divisors}$ のなす cone とする.

定理 6 $N^1(X)$ の次の条件をみたす基底 $\{D_1, \dots, D_p\}$ ($D_i \in \text{Pic}(X)$) を選ぶことができる: 任意の因子 D に対して,

$$D = \sum_{i=1}^p n_i D_i \quad (n_i \in \mathbb{Z}).$$

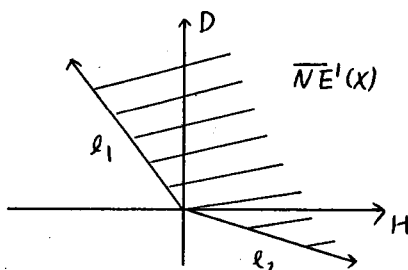
2) と 3), X の正因子 F の次の性質

$$i) \quad F = \sum_{i=1}^p m_i D_i, \quad \text{g.c.d.}(m_1, \dots, m_p) = 1,$$

ii) $\mathbb{R}_+[F]$ は $\overline{NE}'(X)$ の extremal ray である。

さらに $n \geq 5$ ならば、定常線型系 $|F|$ のすべての X 2バースは既約である。

4.3) $n \geq 5$ とする。 $N'(X) = \bigoplus \mathbb{R}$ であるから、 $\overline{NE}'(X)$ は 2つの境界 ℓ_1, ℓ_2 によって



$\forall r \in \mathbb{N}$ に対し、

$$a(r) = \max \{ s \in \mathbb{Z} \mid rD - sH : \text{正因子} \},$$

$$b(r) = \min \{ s \in \mathbb{Z} \mid sH - rD : \text{正因子} \},$$

とし、

$$\theta_1 = \sup_{r \in \mathbb{N}} \{ a(r)/r \}, \quad \theta_2 = \inf_{r \in \mathbb{N}} \{ b(r)/r \}$$

とすると、 $2 \leq \theta_1 < \theta_2$ である。

$$\ell_1 = \mathbb{R}_+[D - \theta_1 H], \quad \ell_2 = \mathbb{R}_+[\theta_2 H - D].$$

n が奇数 $n \geq 3$ 、 F は nef、 $F^{n+1} = 0$ であるから、 $b(r) = rc_1$

($\forall r \in \mathbb{N}$)。従って、 $\theta_2 = c_1$ 、すなわち、 $\ell_2 = \mathbb{R}_+[F]$ 。定理 6 より、

$|F|$ の任意の X 2バースは既約である。

4.4) $a = a(1)$ とし、 $Z = D - aH$ 、 $\frac{1}{2}Z = D - (c_1 - a)H = aH - F$ と表

す。 $\dim |rZ| = 0$ ($\forall r \in \mathbb{N}$) ならば、 $a(r) = ra$ ($\forall r \in \mathbb{N}$)。従って

て, $\theta_1 = \alpha$ ととり, $\mathcal{L}_1 = \mathbb{R}_+[\mathbb{Z}]$. 故に, 定理 6.5 より, $\mathbb{Z}$ は既約である. 正因子 $\mathbb{Z}$ は E の線束への分解問題において, 重要な役割を果たす. 又, E が unstable ならば $\mathcal{L}_1 = \mathbb{R}_+[\mathbb{Z}]$ が示される.

§ 5. A vanishing theorem for symmetric tensors of 2-bundles on $\mathbb{P}^n$

5.1) 有用な KAN 消滅定理 (小平-秋月-中野) は種々の形に一般化されている. 中野, P.A. Griffiths, J. Le-Potier 等による消滅定理のベクトル束への拡張は高次元部分多様体の研究において有用な諸結果を得ている ([3], [7], [11]). これは消滅定理は Hartshorne 予想と関連しており, 1.2) で示された諸結果において有用な手法となっている. しかし, ベクトル束の場合には線束と違って symmetric tensors に関する消滅定理は最も自然と思われる形においてすら成立せず, 部分多様体の高次近傍, 又形式スキームの研究において障害となっている. しかし, 射影空間上の階数 2 のベクトル束の symmetric tensors に関しては, 次の消滅定理が成立することが示される.

定理 7 E, L を $\mathbb{P}^n$ 上の階数 2 のベクトル束及び線束とする. E が k -ample (又, global sections で生成された), L が global sections で生成された (又, k -ample) ならば, $\mathbb{Z}$

意自然数 n に対し,

$$H^k(\mathbb{P}^n, S^p(E) \otimes L \otimes \Omega_{\mathbb{P}^n}^p) = 0, \quad p+q \geq n+2+k.$$

5.2) $X \subset \mathbb{P}^n$ 上の k -ample 2-bundle の global section の zero locus で余次元 2, 既約閉部分多様体 (必ずしも, 非特異とは限らない) とする. 定理 7 より, X の高次近傍, 形式スチーグマが標準的手法で取扱われ X に関する Barth 型の次の定理が成り立つ.

定理 8 i) $n \geq 5+k \rightarrow \text{pic}(\mathbb{P}^n) \simeq \text{pic}(X).$

ii) 制限射: $H^i(\mathbb{P}^n, \mathbb{C}) \rightarrow H^i(X, \mathbb{C})$ は $i \leq n-3-k$ のとき同型であり, $i = n-2-k$ のとき単射である.

iii) $n > 2+k \rightarrow \text{cd}(\mathbb{P}^n \setminus X) \leq 1+k.$

5.3) $X \subset \mathbb{P}^n$ 上の 2-bundle E の determinantal variety とする. 定理 7 より, X 上の因子のコホモロジーと対応するコホモロジー $H^i(\mathbb{P}^n, S^r(E)(d))$ ($r, d \in \mathbb{Z}$) の相当関係が示された. 従って, X の幾何とコホモロジー $H^i(\mathbb{P}^n, S^r(E)(d))$ の関係が示された. 例として, E の stability, 線束への分解が X 上の幾何に翻訳された.

§ 6. Cohomologies

6.1) Determinantal variety $X (\simeq Y)$ に定義する tautological divisors を $\{D_i\} (1 \leq i \leq m+1)$ とする. 自然数 $k (1 \leq k \leq m+1)$ に対し,

$$Y_k := D_1 \cap \dots \cap D_k,$$

とおくと, 閉部分集合による filtration: $P(E) = Y_0 \supset Y_1 \supset \dots \supset Y_{m+1} = Y$ を得る. 任意整数 r, s に対し, 次の完全列が存在する:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{O}_{Y_{k-1}}((r-1)D + sH) &\rightarrow \mathcal{O}_{Y_{k-1}}(rD + sH) \rightarrow \mathcal{O}_{Y_k}(rD + sH) \rightarrow 0, \\ \rightarrow H^i(\mathcal{O}_{Y_{k-1}}((r-1)D + sH)) &\rightarrow H^i(\mathcal{O}_{Y_{k-1}}(rD + sH)) \rightarrow H^i(\mathcal{O}_{Y_k}(rD + sH)) \rightarrow \end{aligned}$$

従って, 制限射 $\gamma_k^i: H^i(\mathcal{O}_{Y_{k-1}}(rD + sH)) \rightarrow H^i(\mathcal{O}_{Y_k}(rD + sH))$ の全単射性の障害は $H^i(\mathcal{O}_{Y_{k-1}}((r-1)D + sH))$, $H^{i+1}(\mathcal{O}_{Y_{k-1}}((r-1)D + sH))$ の存在である. これら障害を分析することにより, 制限射 $\gamma = \gamma_{m+1}^i \dots \gamma_1^i: H^i(\mathcal{O}_{P(E)}(rD + sH)) \rightarrow H^i(\mathcal{O}_X(rD + sH))$ が全単射になるための条件を求めることが出来る. 整数 r, s の通いあて次の様な場合分けを行い, 更に定理7を利用して次の諸結果が得られる. $P(E)$ を P で表わす.

6.2) $r=1, s \leq 0$:

$$H^i(\mathcal{O}_P(D + sH)) \simeq H^i(\mathcal{O}_X(D + sH)), \quad 0 \leq i \leq n-m-1, \quad s < 0,$$

$$H^i(\mathcal{O}_P(D)) \simeq H^i(\mathcal{O}_X(D)), \quad 0 \leq i \leq n-m-1, \quad s = 0,$$

$$h^0(\mathcal{O}_P(D)) = h^0(\mathcal{O}_X(D)) + (m+1), \quad i = 0, \quad s = 0.$$

6.2.1) $H^i(\mathcal{O}_X(-F)) = 0, \quad 0 \leq i \leq n-m-1.$

6.2.2)

$$E: \text{unstable} \iff a \geq \begin{cases} \frac{1}{2}c_i & (c_i: \text{偶数}), \\ \frac{1}{2}(c_i+1) & (c_i: \text{奇数}). \end{cases}$$

6.3) $2 \leq r \leq m, s \leq 0$:

自然数 j, l ($j < l$) に次の条件を満たすものが存在する:

$$H^i(\mathbb{P}^n, SP(E)(\lambda)) = 0, \quad j \leq \forall i \leq l-p+1, \quad 1 \leq \forall p \leq r-1.$$

$$\rightarrow H^i(\mathcal{O}_p(rD+\lambda H)) \simeq H^i(\mathcal{O}_X(rD+\lambda H)), \quad j \leq i \leq \min(l-r+1, n-m-1).$$

$$6.3.1) \quad E: \text{unstable} \leftrightarrow H^0(\mathcal{O}_X(2D-c_1H)) = H^0(\mathcal{O}_X(D-F)) \neq 0.$$

$$6.3.2) \quad H^i(\mathbb{P}^n, \text{End}(E)) \simeq H^i(\mathcal{O}_X(2D-c_1H)), \quad 1 \leq i \leq n-m-1.$$

$$6.3.3) \quad n \geq 5, \text{ 奇数} \rightarrow |Z| \text{ の任意 } \lambda \text{ に対して } \lambda \text{ は既約}.$$

$$6.4) \quad r = m+1, \quad \lambda \leq 0:$$

自然数 j, l ($j < l$) に次の条件を満たすものが存在する:

$$H^i(\mathbb{P}^n, SP(E)(\lambda)) = 0, \quad j \leq \forall i \leq l-p+1, \quad 1 \leq \forall p \leq r.$$

$$\rightarrow H^i(\mathcal{O}_p(rD+\lambda H)) \simeq H^i(\mathcal{O}_X(rD+\lambda H)), \quad j \leq i \leq \min(l-r+1, n-m-2).$$

$$6.5) \quad r \geq m+2, \quad \lambda \leq 0:$$

自然数 j, l ($j < l$) に次の条件を満たすものが存在する:

$$H^i(\mathbb{P}^n, S^{r-1-m+p}(E)(\lambda)) = 0, \quad j \leq \forall i \leq l-p, \quad 0 \leq \forall p \leq m.$$

$$\rightarrow H^i(\mathcal{O}_p(rD+\lambda H)) \simeq H^i(\mathcal{O}_X(rD+\lambda H)), \quad j \leq i \leq l-m-1.$$

$$6.5.1) \quad H^i(\mathcal{O}_X(-rF)) = 0, \quad 0 \leq i \leq n-m-2, \quad 2 \leq r.$$

$$6.5.2) \quad E: \text{線束の直和} \rightarrow \alpha(r) = r\alpha \quad (\forall r \in \mathbb{N}), \text{ i.e., } \theta_1 = \alpha.$$

$$6.6) \quad -r \leq 0, \quad \lambda \geq 0:$$

自然数 j, l ($j < l$) に次の条件を満たすものが存在する:

$$H^i(\mathbb{P}^n, S^{r-1+m+p}(E^*)(-\lambda)) = 0, \quad j-1 \leq \forall i \leq l-p, \quad 0 \leq \forall p \leq m.$$

$$\rightarrow H^i(\mathcal{O}_p(-rD+\lambda H)) \simeq H^i(\mathcal{O}_X(-rD+\lambda H)), \quad j \leq i \leq l-m.$$

$$6.6.1) \quad H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\lambda)) \simeq H^0(\mathcal{O}_X(\lambda)), \quad 0 \leq \lambda < c_1. \text{ 従って, } X \text{ は}$$

t -normal ($0 \leq t < c_1$). 負 n , $H^i(\mathcal{O}_X(\Delta H)) = 0$, $1 \leq i \leq n-m-2$,
 $0 \leq \Delta \leq c_1$.

6.6.2) $H^i(\mathcal{O}_X(F)) = 0$, $1 \leq i \leq n-m-2$.

6.6.3) $H^i(\mathcal{O}_X(-2D + c_1 H)) = H^i(\mathcal{O}_X(F-D)) = 0$, $0 \leq i \leq n-m-2$, $i \neq 1$.

$H^1(\mathcal{O}_X(-2D + c_1 H)) = \mathbb{C}$. 故 n , 完全列: $0 \rightarrow \mathcal{O}_X(F) \rightarrow \mathbb{C}[X] \rightarrow \mathcal{O}_X(D) \rightarrow 0$ IF 唯一の non-splitting extension である.

6.6.4) F : 線束の直和 $\rightarrow H^i(\mathcal{O}_X(\Delta H)) = 0$, $1 \leq i \leq n-m-1$, Δ : 任意整数. 負 n , $H^i(\mathcal{O}_X(-rD + \Delta H)) = 0$, $1 \leq i \leq n-m-1$, Δ : 任意整数.

6.7) $r \geq m$, $\Delta \geq 0$:

自然数 j, ℓ ($j < \ell$) を次の条件を満たす $j \leq \ell$ とする:

$$H^i(\mathbb{P}^n, S^{r-1-m+p}(F)(\Delta)) = 0, \quad j \leq \forall i \leq \ell + m - p + 1, \quad 0 \leq \forall p \leq m.$$

$$\rightarrow H^i(\mathcal{O}_p(rD + \Delta H)) \simeq H^i(\mathcal{O}_X(rD + \Delta H)), \quad j \leq i \leq \ell.$$

6.7.1) $H^i(\mathcal{O}_X(rD + \Delta H)) = 0$, $i \geq 2$. F : 線束の直和 $\rightarrow H^i(\mathcal{O}_X(rD + \Delta H)) = 0$, $i \geq 1$.

6.8) $r = m-1$, $\Delta \geq 0$:

自然数 j, ℓ ($j < \ell$) を次の条件を満たす $j \leq \ell$ とする:

$$H^i(\mathbb{P}^n, S^{p-2}(F)(\Delta)) = 0, \quad j \leq \forall i \leq \ell + m - p + 1, \quad 1 \leq \forall p \leq m.$$

$$\rightarrow H^i(\mathcal{O}_p(rD + \Delta H)) \simeq H^i(\mathcal{O}_X(rD + \Delta H)), \quad j \leq i \leq \ell.$$

6.8.1) $H^i(\mathcal{O}_X(rD + \Delta H)) = 0$, $2 \leq i \leq n-m-1$. F : 線束の直和 $\rightarrow H^i(\mathcal{O}_X(rD + \Delta H)) = 0$, $1 \leq i \leq n-m-1$.

6.9) $1 \leq r \leq m-2, \lambda \geq 0$:

自然数 j, l ($j < l$) を次の様にとる: i) $\lambda \leq c_1 - (n+1)$
 $\rightarrow 1 \leq j < l \leq n-r-2$. ii) $c_1 - (n+1) < \lambda < c_1 \rightarrow 1 \leq j < l \leq n-r-1$.
 iii) $c_1 \leq \lambda \rightarrow 2 \leq j < l \leq n-r-1$.

j, l が次の 2 つの条件を満たす j と l がある:

$$1) H^i(S^{r-p}(\mathbb{F})(\lambda)) = 0, 1 \leq v_p \leq r-1, j \leq v_i \leq l+p.$$

$$2) H^i(S^{r-2}(E^*)(-\lambda)) = 0, j-1 \leq v_i \leq l+r+p-1, 3 \leq v_p \leq m+r.$$

$$\rightarrow H^i(\mathcal{O}_p(rD+\lambda H)) \simeq H^i(\mathcal{O}_X(rD+\lambda H)), j \leq i \leq l.$$

6.9.1) $r=1, \lambda < c_1$:

$$H^i(\mathcal{O}_p(D+\lambda H)) \simeq H^i(\mathcal{O}_X(D+\lambda H)), 1 \leq i \leq n-m-2.$$

$$H^i(\mathcal{O}_X(D+\lambda H)) = 0, 1 \leq i \leq n-m-2, c_1 - (n+1) \leq \lambda < c_1.$$

$$2 \leq i \leq n-m-2, \lambda < c_1.$$

$\mathbb{F}$: 線束の直和 $\mathbb{F} \in \mathcal{H}^*$,

$$H^i(\mathcal{O}_p(D+\lambda H)) \simeq H^i(\mathcal{O}_X(D+\lambda H)), 1 \leq i \leq n-m-1,$$

$$H^i(\mathcal{O}_X(D+\lambda H)) = 0, 1 \leq i \leq n-m-1.$$

6.9.2) $r \geq 2, c_1 - (n+1) \leq \lambda < c_1$:

$$H^i(\mathcal{O}_p(rD+\lambda H)) \simeq H^i(\mathcal{O}_X(rD+\lambda H)), 1 \leq i \leq n-m-2,$$

$$H^i(\mathcal{O}_X(rD+\lambda H)) = 0, 1 \leq i \leq n-m-2.$$

$\mathbb{F}$: 線束の直和 $\mathbb{F} \in \mathcal{H}^*$,

$$H^i(\mathcal{O}_p(rD+\lambda H)) \simeq H^i(\mathcal{O}_X(rD+\lambda H)), 1 \leq i \leq n-m-1,$$

$$H^i(\mathcal{O}_X(rD+\lambda H)) = 0, 1 \leq i \leq n-m-1.$$

6.9.3) $r \geq 2$, $\Delta < c_1 - (n+1)$:

$$H^i(\mathcal{O}_p(rD + \Delta H)) \cong H^i(\mathcal{O}_X(rD + \Delta H)) , \quad 2 \leq i \leq n-m-2,$$

$$H^i(\mathcal{O}_X(rD + \Delta H)) = 0 , \quad 2 \leq i \leq n-m-2 .$$

E : 線束の直和 n 個,

$$H^i(\mathcal{O}_p(rD + \Delta H)) \cong H^i(\mathcal{O}_X(rD + \Delta H)) , \quad 1 \leq i \leq n-m-1,$$

$$H^i(\mathcal{O}_X(rD + \Delta H)) = 0 , \quad 1 \leq i \leq n-m-1 .$$

6.10) $n \geq 3$ ありと $\exists$, E の線束の直和 $\leftrightarrow H^1(\mathcal{O}_X(D + \Delta H)) =$

$$0 , \quad -c_1 < \Delta < c_1 - (n+1) .$$

References

1. A. Alzati, G. Ottaviani ; A linear bound on the t -normality of codimension two subvarieties of $\mathbb{P}^n$, J. reine angew. Math. 409 (1990), 35 - 40
2. W. Barth, Van de Ven ; A decomposability criterion for algebraic 2-bundles on projective spaces, Inv. Math. 25 (1974), 91 - 106
3. P. A. Griffiths ; Hermitian differential geometry, Chern classes and projective vector bundles, Global Analysis. University of Tokyo Press, Princeton University Press (1969), 185 - 251
4. R. Hartshorne ; Algebraic vector bundles on projective

- spaces : a problem list , *Topology* 18 (1979), 117-128
5. A. Holme ; Codimension 2 subvarieties of projective spaces , *Manuscripta math.* 65 (1989), 427-446
 6. Th. Peternell, J. Le-Potier, M. Schneider ; Vanishing theorems , linear and quadratic normality , *Inv. Math.* 87 (1987), 573-586
 7. J. Le-Potier ; Annulation de la cohomologie à valeurs dans un fibre vectoriel holomorphe positive de rang quelconque , *Math. Ann.* 218 (1975), 35-53
 8. Z. Ran ; On projective varieties of codimension 2 , *Inv. Math.* 73 (1983), 333-336
 9. Z. Ran ; Systèmes linéaire complets de sections hypersurfaces sur les variétés projectives de codimension 2 , *C.R. A.S.* 298 (1984), 111-112
 10. M. Schneider ; Vector bundles and submanifolds of projective space : Nine Open Problems , *Algebraic Geometry Bowdoin 1985* , *Proc. of Symp. in Pure Math. A.M.S.* Vol. 46, 101-107
 11. B. Shiffman, A. J. Sommes ; Vanishing Theorems on complex Manifolds , *Birkhäuser PM* 56 , 1985
 12. A. Van de Ven ; Twenty years of classifying algebraic.

vector bundles , Algebraic Geometry Angers 1979,
Sijthoff & Noordhoff (1980), 3-20.

13. F. L. Zak ; Projections of algebraic varieties, *Math. Sb.*
116 (1981), 593-602