

半空間での Rellich 型定理について.

筑波大 数学系 柴田 良弘

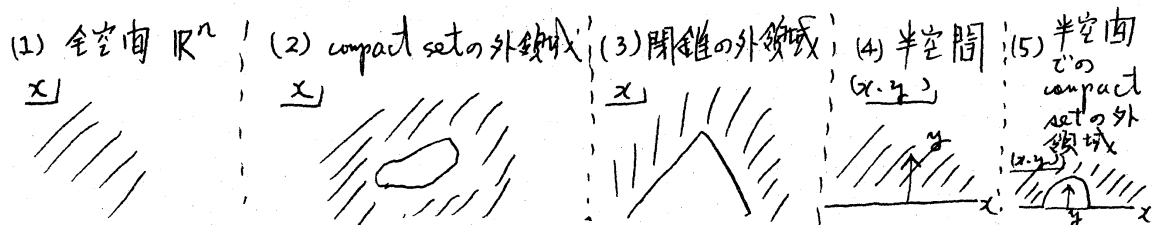
§1. Introduction. Rellich [8] により次の定理が本質的に示された。

定理 1 (i) $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \geq R_0\}$, $(\Delta + k^2)u = 0$ ($k \neq 0$) in Ω の解 $u \in \mathcal{S}' \cap L^2_{loc}$ が $\lim_{R \rightarrow \infty} \inf R^{-1} \int_{R \leq |x| \leq 2R} |u(x)|^2 dx = 0$ を満足する $\Rightarrow u \equiv 0$ in Ω .

(ii). Ω を $\mathbb{R}^{n+1}_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : y \geq 0, x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\}$ の領域で, $\partial\Omega$ (Ω の boundary) は滑らか, $\cdot$ が連結集合とする。さらに $\Omega_R = \{(x, y) \in \Omega : 0 \leq |x|^2 + y^2 \leq R^2\}$ は連結, さらに y -軸の正の部分と $\partial\Omega$ の各点での外法線のなす角度が $\pi/2$ 以上とする。このとき $(\Delta + k^2)u = 0$ in Ω , $u = 0$ on $\partial\Omega$ の解 $u \in \mathcal{S}' \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ が $\lim_{R \rightarrow \infty} \sup R^{-1} \int_{\Omega_R} |u|^2 dx dy = 0$ を満足する $\Rightarrow u \equiv 0$ in Ω . □

上の定理で (i) での Ω は  の様な領域であり (ii) での Ω は  の様な領域がある。最近

以下の様な型の領域 Ω :



について. 一般の定数係数作用素 $P(b) = P(-\sqrt{-1} \partial/\partial x)$ ((1), (2), (3))
 $(= P(-\sqrt{-1} \partial/\partial x, -\sqrt{-1} \partial/\partial y), (4), (5))$ として, 領域 Ω で $P(b)u = 0$
 を満足する解 $u \in \mathcal{D}'$ の L^2_{loc} の無限遠での増大度の下限と
 $P(\xi) = 0$, なる $\xi \in \mathbb{R}^n$, での real characteristic の幾何と
 の関連を調べることが行なわれてきた. (1), (2)の領域につ
 いては. Littman [3], Hörmander [2], Munata [5,
 6], (3)については. Munata-Shibata [7], Littman [4]
 (4)については. 一般的な境界値条件を課して (これは必然的
 である.) Shibata [9]により完全な結果が得られている。
 このノートでは. (5)についての一般的な結果を述べることに
 する。尚証明の細かい所は後に刊行される論文を参考にして
 もらいたい。

§2. Main Results. $\mathbb{R}^{n+1}$ を $n+1$ 次元ユークリッド空間
 その実を $(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y)$. 双対空間もまた $\mathbb{R}^{n+1}$ で表
 わし. その実を $(\xi, \lambda) = (\xi_1, \dots, \xi_n, \lambda)$ で表わす. C^n を n -
 複素空間とし. その実を $\xi + \sqrt{-1}\eta = (\xi_1 + \sqrt{-1}\eta_1, \dots, \xi_n + \sqrt{-1}\eta_n)$ で

表わす。微分記号を $D = (D_x, D_y) = (-\sqrt{-1} \partial / \partial x_1, \dots, -\sqrt{-1} \partial / \partial x_n, -\sqrt{-1} \partial / \partial y)$ で表わす。 $P(D), B_j(D), j=1, \dots, p$ を定係数作用素とし、次の境界値問題を考える。

$$(2.1) \quad P(D)u = f(x, y), \quad \text{in } \mathbb{R}_+^{n+1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}; y > 0\}.$$

$$(2.2) \quad B_j(D)u|_{y=0} = g_j(x), \quad j=1, \dots, p \quad \text{in } \mathbb{R}^n.$$

まず、 $\{P(D), B_j(D), j=1, \dots, p\}$ の満足すべき条件を述べる。

$$(A.1) \quad P(D) = D_y^m + \sum_{j=1}^m p_j(D_x) D_y^{m-j} \quad \text{の形である。}$$

ここで $p_j(D_x)$ は D_x についての定係数微分多項式。 図

次に、 $P(\xi, \lambda) = \{\prod_j (\lambda - \lambda_j)\} Q(\xi, \lambda)$ とおく。 ここで λ_j は定数、 $Q(\xi, \lambda) = 0$ の λ についての根には ξ について定数はないとする。 $\lambda \in \mathbb{R}'$ として $Q(\xi, \lambda) = \overline{Q(\xi, \lambda)} = 0$ から λ を消去して得られる $\zeta = \xi + i\eta$ 、としたときの (ξ, η) についての多項式を $\hat{R}(\xi, \eta)$ とおく。 W_j を $\mathbb{C}^n - \{\xi + i\eta \in \mathbb{C}^n;$

$\hat{R}(\xi, \eta) = 0\}$ の各 connected component とする。 W_j の個数は有限個である。 W_j があるときの $P(\zeta, \lambda) = 0$ の λ についての根はすべて non-real である。 こうして positive imaginary part をもつ根の個数は W_j については一定で、その総数を βW_j とおく。

$$(A.2) \quad m \geq p \geq \beta W_j \quad \text{が各 } W_j \text{ について成立する。 図}$$

$$(A.3) \quad \text{各 } W_j \text{ について } \exists \alpha = (\alpha(1), \dots, \alpha(\beta W_j)), \quad (1 \leq \alpha(l) \leq p, \quad \alpha(l) \neq \alpha(l') \text{ if } l \neq l',) \quad \text{s.t.}$$

$\det \left(\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{B_{\alpha(R)}(\xi, \lambda) \lambda^{e-1}}{P^+(\xi, \lambda)} d\lambda \right)_{R, l=1 \dots \beta_{W_j}} \neq 0, \quad \xi \in W_j$
 が成り立つ。ここで、 $P^+(\xi, \lambda) = \prod_{k=1}^{\beta_{W_j}} (\lambda - \lambda_k^+(\xi))$, $\lambda_k^+(\xi)$
 は、 $P(\xi, \lambda) = 0$ の正の虚数部を持つ λ についての根。図
 1.1.1 (A.1) ~ (A.3) を満足する系 $\{P(d), B_j(d), j=1, \dots, p\}$
 について (2.1), (2.2) を考える。そこで $P(\xi, \lambda) = \prod_{j=1}^{\alpha} B_j(\xi, \lambda)^{\alpha_j}$
 , $B_j(\xi, \lambda)$ は irreducible poly, と因数分解する。今ある $\hat{\alpha}$ ($0 \leq \hat{\alpha} \leq \alpha$) があって、 $P_1(\xi, \lambda), \dots, P_{\hat{\alpha}}(\xi, \lambda)$ は実係数,
 $P_{\hat{\alpha}+1}(\xi, \lambda), \dots, P_{\alpha}(\xi, \lambda)$ は実係数多項式に平行ではないとして
 一般性を失わない。このとき、

$P(\xi, \lambda) = \prod_{j=1}^{\hat{\alpha}} P_j(\xi, \lambda) \cdot \prod_{j=\hat{\alpha}+1}^{\alpha} |P_j(\xi, \lambda)|^2, \quad (\xi, \lambda) \in \mathbb{R}^{n+1}$
 で (ξ, λ) の多項式を定義する。 $P(\xi, \lambda)$ と $\frac{\partial P}{\partial \lambda}(\xi, \lambda)$ の
 総結式を $R(\xi)$ とおく。 $R(\xi) \neq 0, \xi \in \mathbb{R}^n$, なる $\mathbb{R}^n$ の各極大
 連結集合を V_j で表わす。 V_j の個数は有限個である。今簡単
 の為に V_j を V で表わす。また各 V 毎に決まる量についても
 添字の V を省くことにする。 $\xi \in V$ の時 $P(\xi, \lambda) = 0$ の λ に
 についての根はすべて real analytic であり、さらに constant
 multiplicity をもち、次の様に分類される。

$\lambda_j^+(\xi), j=1, \dots, \beta, \text{ multiplicity } \beta_j, \text{ Im } \lambda_j^+(\xi) > 0$
 $\lambda_j^0(\xi), j=1, \dots, \gamma, \text{ multiplicity } \gamma_j, \text{ Im } \lambda_j^0(\xi) = 0$
 $\lambda_j^-(\xi), j=1, \dots, \delta, \text{ multiplicity } \delta_j, \text{ Im } \lambda_j^-(\xi) = 0$

$$P(\xi, \lambda) = \prod_{j=1}^{\beta} (\lambda - \lambda_j^+(\xi))^{\beta_j} \prod_{j=1}^{\beta} (\lambda - \lambda_j^0(\xi))^{\beta_j} \prod_{j=1}^{\beta} (\lambda - \lambda_j^-(\xi))^{\beta_j} \quad \xi \in V$$

(A.2)' 各 V で $p \geq \sum_{j=1}^{\beta} \beta_j \Rightarrow \beta^{\sim}$ である。 $\square$

(A.3)' 各 V に対して、ある $\beta^{\sim}$ 個の添字 $n(1), \dots, n(\beta^{\sim})$
 $(1 \leq n(i) \leq p)$ があって " $L^{\beta}(\xi) = \det \left(\frac{B_{n(i)j}(\xi, \lambda) \lambda^{\beta_j - 1}}{P^+(\xi, \lambda)} \right)$
 $j, k = 1, \dots, \beta^{\sim}, \quad \neq 0 \quad \text{in} \quad \xi \in V$ " である。ここで $P^+(\xi, \lambda)$
 $\leq \prod_{j=1}^{\beta} (\lambda - \lambda_j^+(\xi))^{\beta_j}$ $\square$

命題 1 $\{P(b), B_j(b), j=1, \dots, p\}$ が (A.1) ~ (A.3) をみたす
 $\Rightarrow$ (A.1), (A.2)', (A.3)' をみたす。

次の定理は Shibata [9] の結果の Corollary である。

定理 2. $P(b)$ は (A.1) をみたすとする。

(i). system $\{P(b), B_j(b), j=1, \dots, p\}$ が条件 (A.2), (A.3) を満足する。このとき $\mathbb{R}^{n+1}$ の open cone Π と integer N で次の性質を満足するものが $\{P(b), B_j(b), j=1, \dots, p\}$ により依存して決まる。

$$(A.3) \quad P(b)u = 0 \text{ in } \mathbb{R}_+^{n+1}, \quad B_j(b)u|_{y=0} = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n$$

なる齊次境界値問題 (2.3) の解 $u(x, y) \in \mathcal{S}'(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}) \cap$

$$C^\infty([0, \epsilon); \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)) \cap L^2_{loc}(E_{R_0}) \neq \emptyset$$

$$(2.4) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \inf R^{-2} \int_{\Pi_R} |u(x, y)|^2 dx dy = 0$$

を満足すれば, $u(x, y) \equiv 0$ である。ここで $\Pi_R \subseteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : y > 0, R \leq \sqrt{|x|^2 + y^2} \leq 2R\}$, $E_{R_0} \subseteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : y > 0, \sqrt{|x|^2 + y^2} \geq R_0\}$, $C^\infty([0, \epsilon); \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)) \subseteq \{u : \langle u(\cdot, y), \varphi(\cdot) \rangle \in C^\infty([0, \epsilon)) \text{ for } \forall \varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\}$ 但し, ϵ, R_0 は u によって決まる positive number, また $N \geq 1$.

(ii) system $\{P(b), B_j(b), j=1, \dots, p\}$ が, (A.2)', (A.3)' のいずれか一方でも満足しなければ, non-trivial な $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ の元で, 斉次方程式 (2.3) の解が存在する。□

以下, $\{P(b), B_j(b), j=1, \dots, p\}$ は (A.1) ~ (A.3) を満足し, また (2.1), (2.2) の右辺 $f(x, y), g_j(x)$ はコンパクト, サポートをもつとする。

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \text{supp } f(x, y) &\subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}; y > 0, \sqrt{|x|^2 + y^2} \leq \exists a\} \\ \text{supp } g_j(x) &\subset \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq a\} \end{aligned}$$

Lemma 1. $\omega \subset V$, small open set.

P_2 を $\bigcup_{\delta=1}^{\delta} \{\pm(\text{grad } \lambda_j^0(\xi), -1); \xi \in \omega\}$ を含む $\mathbb{R}^{n+1}$ の開錐とする。但し $\delta=0$ のときは $P_2 = \emptyset$ とおく。

もし、 $u(x, y) \in \mathcal{S}'(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}) \cap C^\infty([0, \epsilon); \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)) \cap L^2_{loc}(E_{R_0})$ が (2.1), (2.2) の解でかつ

$$(2.6) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_{2,R}} |u(x, y)|^2 dx dy = 0$$

であれば、任意の $\varphi(\xi) \in C_0^\infty(\omega)$ に対して

$$(2.7) \quad \langle \sqrt{-1} v! (D_y - \lambda_j^0(\xi))^{j_1 - v - 1} Q_j^0(\xi, D_y) \hat{u}(\xi, y)|_{y=0}, \varphi(\xi) \rangle \\ = \langle \left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)^v \hat{f}_0(\xi, \lambda_j^0(\xi)), \varphi(\xi) \rangle, \quad v=0, \dots, j_1-1, j=1, \dots, \delta,$$

$$(2.8) \quad \langle \sqrt{-1} v! (D_y - \lambda_j^-(\xi))^{j_2 - v - 1} Q_j^-(\xi, D_y) \hat{u}(\xi, y)|_{y=0}, \varphi(\xi) \rangle \\ = \langle \left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)^v \hat{f}_0(\xi, \lambda_j^-(\xi)), \varphi(\xi) \rangle, \quad v=0, \dots, j_2-1, j=1, \dots, \delta.$$

が成立する。ここで、 $P(\xi, \lambda)/(\lambda - \lambda_j^0(\xi))^{j_1} \equiv Q_j^0(\xi, \lambda)$,
 $P(\xi, \lambda)/(\lambda - \lambda_j^-(\xi))^{j_2} \equiv Q_j^-(\xi, \lambda)$ また $\hat{f}_0(\xi, \lambda) \equiv \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) \exp\{-\sqrt{-1}x \cdot \xi - \sqrt{-1}y \cdot \lambda\} dx dy$, $\hat{u}(\xi, y)$ は $u(x, y)$ の x についての partial Fourier-transform である。 $\square$

次に、 $R(\zeta)$ の定義からこれは ζ の多項式であるから、 $R(\zeta) \neq 0$ なる ζ の集合は $\mathbb{C}^n$ の連結集合である。従って定数 d_j, d があって、 $R(\zeta) \neq 0$ なる ζ について $P(\zeta, \lambda) = 0$ の λ についての根は全て multiplicity d_j の根が合計 d 個存在する。即ち、 $R(\zeta) \neq 0$ なる ζ について $P(\zeta, \lambda) = 0$ の λ についての相異なる根を $\lambda_j(\zeta)$ と書けば、 $\lambda_j(\zeta)$ は ζ についての multi-valued continuous function かつ $R(\zeta) \neq 0$ なる ζ については解析的関数であり、
 $P(\zeta, \lambda) = \prod_{j=1}^d (\lambda - \lambda_j(\zeta))^{d_j} (\zeta; R(\zeta) \neq 0.)$

と表わせる。今 $R(\zeta) \neq 0$ なる ζ について、 $C_k^{v, \alpha}(\zeta)$, $k=0, \dots, m-1$, $v=0, \dots, d_j-1$, $\alpha=1, \dots, d$ を

$$(2.9) \quad v! (\lambda - \lambda_j(\zeta))^{d_j-v-1} P(\zeta, \lambda) / (\lambda - \lambda_j(\zeta))^{d_j} = \sum_{k=0}^{m-1} C_k^{v, j}(\zeta) \lambda^k$$

なる関係式で定義する。また $\hat{f}_0(\zeta, \lambda)$ は (ζ, λ) の整関数であることを注意して、 $H_k(\zeta)$ を

$$(2.10) \quad (-\sqrt{-1}) \sum_{k=0}^{m-1} C_k^{v, j}(\zeta) H_k(\zeta) = \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \right]^{v, j} \hat{f}_0(\zeta, \lambda_j(\zeta))$$

$v=0, \dots, d_j-1, \quad \alpha=1, \dots, d$

を満足する様に定める。(Cramer's rule により)

$$(2.10)' \quad (-\sqrt{-1}) H_k(\zeta) = \det \begin{bmatrix} C_{m-1}^{0,1}(\zeta), \dots, C_{m-1}^{0,d}(\zeta), \hat{f}_0(\zeta, \lambda_1(\zeta)), C_{m-1}^{0,1}(\zeta), \\ \vdots \\ C_{m-1}^{d_j-1,1}(\zeta), \dots, C_{m-1}^{d_j-1,d}(\zeta), \hat{f}_0(\zeta, \lambda_j(\zeta)), C_{m-1}^{d_j-1,1}(\zeta), \\ \vdots \\ C_{m-1}^{d-1,1}(\zeta), \dots, C_{m-1}^{d-1,d}(\zeta), \hat{f}_0(\zeta, \lambda_d(\zeta)), C_{m-1}^{d-1,1}(\zeta), \end{bmatrix}$$

を得る。明らかに $R(\zeta) \neq 0$ なる ζ について一価正則な関数として各 $H_j(\zeta)$ は定義され、更に $\mathbb{C}^n$ 全体で、局所有限界であるから、 $H_j(\zeta)$ は整関数に拡張できこれを改めて $H_j(\zeta)$ と書くことにする。そこで Lemma 1 の仮定を満足する $u(x, y)$ が存在するとする。

$$P^+(\zeta, \lambda) = \prod_{\alpha=1}^{\beta} (\lambda - \lambda_{\alpha}^+(\zeta))^{\beta_{\alpha}} = \lambda^{\beta} + \sum_{k=0}^{\beta-1} P_k^+(\zeta) \lambda^k, \quad \zeta \in V$$

で $p_k(\xi)$ を定義すれば, (2.7), (2.8), (2.9) から任意の $\varphi \in C_0^\infty(\omega)$ について ($\omega \subset V$)

$$(2.11) \quad \langle (D_y^{\beta+i} \hat{u}(\xi, 0) - H_{\beta+i}(\xi)) + \sum_{k=0}^{\beta-1} p_k^+(\xi) (D_y^{k+i} \hat{u}(\xi, 0) - H_{k+i}(\xi)), \varphi(\xi) \rangle = 0$$

$$i = 0, \dots, m - \hat{\beta} - 1,$$

を得る。今 (A.1) から $B_j(b)$ の D_y の order は $m-1$ 以下としてよい。よって

$$(2.12) \quad B_j(\xi, \lambda) = \sum_{k=0}^{m-1} b_k^j(\xi) \lambda^k, \quad b_k^j(\xi) \text{ は } \xi \text{ の多項式,}$$

とかく。 $\xi \in V$ のとき, $\hat{b}_k^j(\xi)$ は Euclidean Algorithm を用いて

$$(2.13) \quad B_j(\xi, \lambda) = T_j(\xi, \lambda) P^+(\xi, \lambda) + \sum_{k=0}^{\hat{\beta}-1} \hat{b}_k^j(\xi) \lambda^k$$

で定義する。(2.2), (2.11), (2.12), (2.13) から

$$(2.14) \quad \sum_{k=0}^{\hat{\beta}-1} \hat{b}_k^j(\xi) [D_y^k \hat{u}(\xi, 0) - H_k(\xi)] = G_j(\xi)$$

ここで $\hat{g}_j(\xi)$ は $g_j(x)$ の Fourier-transform として $G_j(\xi) \in$

$$(2.15) \quad G_j(\xi) = \hat{g}_j(\xi) - \sum_{k=0}^{m-1} b_k^j(\xi) H_k(\xi)$$

で定義した。今 $g_j(x) \in \mathcal{E}'$ より $\hat{g}_j(\xi)$ は $\mathbb{C}^n$ 上の entire fun であることに注意しよう。(2.15) から $G_j(\xi)$ は entire fun である。

ある。条件 (A.2), (A.3) と命題 1 から, (A.2)', (A.3)' が成立した。従って, $\hat{\beta} \leq p$ であり

$$(2.16) \quad L^0(\xi) = \det \left(\hat{b}_{jk}^{0j}(\xi) \right)_{\substack{j=1, \dots, \hat{\beta} \\ k=0, \dots, \hat{\beta}-1}}, \quad \xi \in V$$

であることに注意すれば, $L^0(\xi) \neq 0$ なる ξ について,

$$(2.17) \quad D_y^R \hat{u}(\xi, 0) - H_R(\xi) = \sum_{\substack{j=1 \\ k=0, \dots, \hat{\beta}-1}}^{\hat{\beta}} C_j^{\sigma}(\xi) G_{0j}(\xi).$$

を得る。但し, $C_j^{\sigma}(\xi)$ は $\text{matrix } (\hat{b}_{jk}^{0j}(\xi))_{\substack{j=1, \dots, \hat{\beta} \\ k=1, \dots, \hat{\beta}}}$ の (j, k) cofactor とした。次の条件を考える。

(A.4) 少なくとも $\hat{\beta} < p$ なる V が一つは存在する。目

今, $\{E(b), B_j(b), j=1, \dots, p\}$ が (A.1) ~ (A.3) の他に (A.4) を満足しているとする。このとき, V を (A.4) を満足するものとする。 $\tilde{\sigma} = (\sigma(1), \dots, \sigma(p))$ なる添字を $\sigma = (\sigma(1), \dots, \sigma(\hat{\beta}))$ が, $L^0(\xi) \neq 0$ なるものと (さらに $\sigma(i) \neq \sigma(i')$ if $i \neq i'$, $1 \leq \sigma(i) \leq p$, $\sigma(\hat{\beta}+1) < \dots < \sigma(p)$ なる条件を満足するものとする。条件 (A.2), (A.3), (A.4) からこの様な添字 $\hat{\sigma}$ は少なくとも一つは存在するから V での $\hat{\sigma}$ の全体を Λ とおく。(Λ は Λ_V と書くべきである。) そこで (A.4)

(2.17) から

$$(2.18) \quad G_{\alpha(i)}(\xi) = \sum_{j=1}^{\beta} \left[\sum_{k=0}^{\beta-1} \widehat{b}_{j,k}^{\alpha(i)}(\xi) C_{j,k}^{\alpha}(\xi) \right] G_{\alpha(j)}(\xi) \\ i = \beta+1, \dots, p, \quad \xi \in V$$

を得る。 $\widehat{b}_{j,k}^{\alpha(i)}(\xi)$, $C_{j,k}^{\alpha}(\xi)$ の作り方から明らかな様に $e_j^{\alpha,i}(\xi) \Leftarrow \sum_{k=0}^{\beta-1} \widehat{b}_{j,k}^{\alpha(i)}(\xi) C_{j,k}^{\alpha}(\xi)$ とおくと、 $\mathbb{E}^{\alpha,i} = (e_1^{\alpha,i}(\xi), \dots, e_{\beta}^{\alpha,i}(\xi))$ の組は $\mathbb{C}^n$ 全体に解析接続でき、 $R(\xi) \neq 0$ なる ξ については analytic。また $\mathbb{C}^n$ 全体で multi-valued continuous function となる。その解析接続の要素を $\mathbb{E}_{\ell}^{\alpha,i} = (e_{1,\ell}^{\alpha,i}(\xi), \dots, e_{\beta,\ell}^{\alpha,i}(\xi))$ と表わせは、 $G_j(\xi)$ は entire fun であつたから (2.18) から

$$(2.19) \quad G_{\alpha(i)}(\xi) = \sum_{j=1}^{\beta} e_{j,\ell}^{\alpha,i}(\xi) G_{\alpha(j)}(\xi), \quad \xi \in V, \quad i = \beta+1, \dots, p$$

を満足する。 $\mathbb{E}_{\ell}^{\alpha,i}$ の個数はそのおのおのの factor は A 数関数であるから有限個である。

$$(2.20) \quad e_{i,\ell}^{\alpha,i}(\xi) \equiv -1, \quad e_{j,\ell}^{\alpha,i}(\xi) \equiv 0, \quad \beta+1 \leq j \leq p, \quad j \neq i$$

とおくと (2.19), (2.20) から $i = \beta+1, \dots, p$ 任意の ℓ について

$$(2.21) \quad \sum_{j=1}^{\beta} e_{j,\ell}^{\alpha,i}(\xi) G_{\alpha(j)}(\xi) \equiv 0$$

が成立する。今、 $\sigma' = (\sigma'(1), \dots, \sigma'(p))$ を $\sigma(\sigma'(j)) = j$ で定義すれば、 (2.21) から

$$(2.22) \quad \sum_{j=1}^p e_{\sigma'(j), l}^{\alpha, i}(\xi) G_j(\xi) \equiv 0, \quad \xi \in V$$

$e_{\sigma'(j), l}^{\alpha, i}(\xi)$ を改ためて、各 V で決まるということから、
 $E_j(\xi; V, \alpha, i, l)$ とかくと、条件 (A.2), (A.3), (A.4) を満足する各 V について、 $\alpha \in \Lambda$ から作った α, i ($\beta+1 \leq i \leq p$), l に対して、

$$(2.22)' \quad \sum_{j=1}^p E_j(\xi; V, \alpha, i, l) G_j(\xi) = 0, \quad \xi \in R(S) \neq \emptyset$$

が成立する。そこで次の条件を考える。

$$(A.5) \quad \exists \xi \in \mathbb{C}^n \text{ s.t. } \text{matrix}(E_j(\xi; V, \alpha, i, l)) \text{ の rank は } p \text{ である。} \quad \square$$

今条件 (A.5) が満足されていれば、(2.22)' と $G_j(\xi)$ は整関数であることから、

$$(2.23) \quad G_j(\xi) \equiv 0, \quad \xi \in \mathbb{C}^n$$

を得る。以上をまとめれば、

Lemma 2. $\{P(b), B_j(b), j=1, \dots, p\}$ が条件 (A.1) ~

(A.5) を満足するものとする。 $V_1, \dots, V_p \in (A.4)$ が成立しか
 $\rightarrow \text{rank}(E_j(\xi, V_k; \sigma, \lambda, l))$ ($k=1, \dots, p$ を動く) が p とな
 るものとする。 $\omega_1, \dots, \omega_p$ をそれぞれ $V_1, \dots, V_p$ に含まれ
 る small open set とする。 T_3 を 集合

$$\bigcup_{j=1}^p \bigcup_{k=1}^p \gamma_{V_k}^{\pm} \{ \pm (\text{grad } \lambda_{k, V_k}^0(\xi), -1) : \xi \in \omega_j \}$$

の open conic n.b.d とし $T_{3,R} = \{ (x, y) \in T_3 ;$
 $y \geq 0, R < \sqrt{|x|^2 + y^2} < 2R \}$ とおく。境界値問題 (2.1)

(2.2) の data $f(x, y), g_j(x), j=1, \dots, p$ は compact
 support をもつとする。もし (2.1), (2.2) の解 $u(x, y)$
 $\in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_+^{n+1}) \cap C^\infty([0, \infty); \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)) \cap L_{loc}^2(E_{R_0})$ で

$$(2.24) \quad \liminf_{R \rightarrow \infty} R^{-1} \int_{T_{3,R}} |u(x, y)|^2 dx dy = 0$$

なるものが存在すれば、

$$(2.25) \quad \sum_{k=0}^{m-1} b_k^j(\zeta) H_k(\zeta) = \hat{g}_j(\zeta), \quad j=1, \dots, p$$

を得る。 □

次の lemma はよく知られた Malgrange の不等式と
 Lopatinskiĭ determinant が代数関数であるというこ
 から従う。

Lemma 3. $\{ P(\zeta), B_j(\zeta), j=1, \dots, p \}$ は (1.1)

~(A.3) を満足するとする。 $H_j(s)$ を (2.10) or (2.10')
 で定義されたものとし、さらに (2.25) を満足していると
 する。さらに $f(x, y)$, $g_j(x)$ $j=1, \dots, p$ は (2.5) を
 満足するとする。

$\Rightarrow$ 次の評価を成立させる定数 N と C が存在する:

$$(2.26) \quad |H_j(s)| \leq C(1+|s|)^N e^{a|\operatorname{Im} s|}, \quad s \in \mathbb{C}^n$$

$$j = 0, \dots, m-1$$

□

Lemma 3 から $k_j(x) = \mathcal{F}^{-1}[H_j](x)$, $j=0, \dots, m-1$
 ($\mathcal{F}^{-1}[H_j]$ は H_j の Fourier inversion formula) とお
 く。 $k_j(x) \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ から Paley-Wiener-Schwartz
 theorem から従う。 $\rho(y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ を 十分小なる $\epsilon_1 > 0$
 に対して $\rho(y) = 1$ if $|y| \leq \epsilon_1$, $\rho(y) = 0$ if $|y| \geq 2\epsilon_1$
 なるものとする。但し ϵ_1 は

$$\{(x, y) \in \overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}; x \in \bigcup_{j=1}^p \operatorname{supp} g_j, 0 \leq y \leq 2\epsilon_1\} \subset$$

$$\{(x, y) \in \overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}; |(x, y)| \leq a\}$$

なる様にとった。今

$$(2.27) \quad v(x, y) = \left[\sum_{j=0}^{m-1} \frac{(\sqrt{-1} y)^j}{j!} k_j(x) \right] \rho(y)$$

とすれば, $D_y^\alpha v(x, y)|_{y=0} = k_j(x)$ に注意すれば

(2.25), (2.27) から

$$(2.28) \quad D_y^{\hat{j}} v(x, y)|_{y=0} = h_j(x), \quad j=0, \dots, m-1$$

$$B_j(b) v(x, y)|_{y=0} = g_j(x), \quad \hat{j}=1, \dots, p$$

を得る。さらに $v(x, y) \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^{\hat{n}+1}) \cap C^\infty([0, \infty))$;
 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ である。

$$(2.29) \quad w(x, y) = u(x, y) - v(x, y)$$

$$(2.30) \quad F(x, y) \equiv f(x, y) - P(b)v(x, y) \\ = P(b)w(x, y)$$

とある。 $F(x, y) \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^{\hat{n}+1})$ である。今 $P(\xi, \lambda)$
 の irreducible factor $P_j(\xi, \lambda)$ で $\hat{j} = \hat{\alpha}+1, \dots, \alpha$ に
 ついては real polynomial に平行ではない。

(A.6) 各 $\hat{j}$ ($\hat{\alpha}+1 \leq \hat{j} \leq \alpha$) に対して $\exists \xi_j \in \mathbb{R}^n$
 s.t. $P_j(\xi_j, \lambda) = 0$ の λ 方向の根の中で少
 なくとも $\rightarrow$ は negative imaginary part
 をもつ。 $\square$

Remark. $\hat{j} = \hat{\alpha}+1, \dots, \alpha$ について $\xi \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}'$
 として $\overline{P_j(\xi, \lambda)} = P_j(\xi, \lambda)$ であることは、

$P_j(\xi, \lambda)$ と $\overline{P}_j(\xi, \lambda)$ は互いに素である。さらにともに既約多項式である。今 $\lambda(\xi)$ が $P_j(\xi, \lambda) = 0$ の λ 方向の real な根であれば $\overline{P}_j(\xi, \lambda(\xi)) = 0$ も満足する。こうして $R_j(\xi)$ を $P_j(\xi, \lambda)$ と $\overline{P}_j(\xi, \lambda)$ の終結式とかくと $A_j = \{\xi \in \mathbb{R}^n; R_j(\xi) = 0\}$ とおいて、 $\xi \in \mathbb{R}^n - A_j$ のとき、 $P_j(\xi, \lambda) = 0$ の λ 方向の根はすべて non-real である。今 (A. 6) を満足しない real polynomial に平行でない polynomial で irreducible な $P_j(\xi, \lambda)$ については $\xi \in \mathbb{R}^n - A_j$ のとき、 $P_j(\xi, \lambda) = 0$ の λ 方向の根はすべて positive imaginary part をもつ。

次に $j = 1, \dots, d$, $P_j(\xi, \lambda)$ について考える。これは real 係数の多項式であった。もし $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ に対して $P_j(\xi, \lambda) = 0$ の λ 方向の根がすべて real であれば、ある (ξ_0^j, λ_0^j) s.t. $P_j(\xi_0^j, \lambda_0^j) = 0$, $\frac{\partial P}{\partial \lambda}(\xi_0^j, \lambda_0^j) \neq 0$ によって open cone T_4^j を

T_4^j は $\pm \text{grad } P(\xi_0^j, \lambda_0^j)$ の $\mathbb{R}^{n+1}$ での open conic n.b.d

として 定義する。また $\exists \xi \in \mathbb{R}^n$ に対して $P_j(\xi, \lambda)$

$=0$ の入子同の根で non-real なものがあるときは

$$\Gamma_4^{\delta} = \emptyset$$

と定義する。

Lemma 4. $\{P(\lambda), B_j(\lambda), j=1, \dots, p\}$ を (A.1) $\sim$ (A.6) を満足する system とする。 $f(x, y), g_j(x)$ $j=1, \dots, p$ は compact support をもつとする。境界値問題 (2.1), (2.2) の解 $u(x, y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_+^{n+1}) \cap C^\infty([0, \infty); \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)) \cap L^2_{loc}(E_{R_0})$ が存在すれば $u(x, y)$ は

$$(2.31) \quad \liminf_{R \rightarrow \infty} R^{-1} \int_{\overline{B_{5R}}} |u(x, y)|^2 dx dy = 0$$

を満足するとする。ここで

$$(2.32) \quad \overline{B_5} = \overline{B_3} \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{B_4^{\delta_j}}, \quad \overline{B_{5,R}} = \{(x, y) \in \overline{B_5}; y \geq 0, \underbrace{R < \sqrt{x^2 + y^2} < 2R}_{\text{ }}$$

と書いた。また $\overline{B_3}$ は Lemma 2 のものとする。今

$F(x, y)$ を (2.30) で定義されたものとする。

$\Rightarrow \hat{F}_0(z, \lambda) / P(z, \lambda)$ は entire function かつ

$$(2.33) \quad |\hat{F}_0(z, \lambda) / P(z, \lambda)| \leq C(1 + |z| + |\lambda|)^N e^{a(|\operatorname{Im} z| + |\operatorname{Im} \lambda|)}$$

を満足する。ここで C, N はある positive constant である。 □

そこで $W(x, y) \in \mathcal{F}^{-1}[\hat{F}_0/P](x, y) |_{y=0}$ とおくと、 $W(x, y) \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}_+^{n+1}) \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R}_+^{n+1})$ である。また、 $P(b)W(x, y) = F(x, y)$ in $\mathbb{R}_+^{n+1}$ を満足する。今 $F(x, y) \in C^\infty([0, \epsilon); \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$ であるから (A.1) より $P(b)$ は y 方向 partial hypoelliptic であることと合わせて、

$$W(x, y) \in C^\infty([0, \epsilon); \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}_+^{n+1}))$$

を得る。(see Hörmander [1] or Shibata [10]).
今 $P(\xi, \lambda) = 0$ の λ 方向の根 $\lambda_j(\xi)$, $j=1, \dots, m$ は $\xi \in V$ のときすべて real analytic. よって $W(x, y) \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}_+^{n+1})$ より、任意の $\varphi(\xi) \in C_0^\infty(V)$ について、部分積分により、

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty P(b)W(x, y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sqrt{-1}(x, \xi + y\lambda_j(\xi))} \frac{1}{(\sqrt{-1}y)^v} \varphi(\xi) d\xi \right) dx dy \\ &= \sqrt{-1} \langle v! (D_y - \lambda_j(\xi))^{d_j - v - 1} \tilde{T}_j(\xi, D_y) \hat{W}(\xi, y)|_{y=0}, \varphi(\xi) \rangle \end{aligned}$$

$$= \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)^v \hat{F}_0(\xi, \lambda_j(\xi)), \varphi(\xi) \right\rangle = 0$$

$$0 \leq v \leq d_j - 1, \quad j=1, \dots, d,$$

を得る。但し $P(\xi, \lambda) = \prod_{j=1}^d (\lambda - \lambda_j(\xi))^{\alpha_j}$, $\xi \in V$.
 よって $\langle D_y^j \hat{W}(\xi, y)|_{y=0}, \varphi(\xi) \rangle = 0$, $j=0, \dots, m-1$
 を得る。 $D_y^j \hat{W}(\xi, y)|_{y=0}$ は ξ の real analytic function
 よって $D_y^j \hat{W}(\xi, y)|_{y=0} = 0$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ を得る。以上から、

$$(2.35) \quad D_y^j W(x, y)|_{y=0} = 0 \quad 0 \leq j \leq m-1$$

である。よって $V(x, y) \equiv W(x, y) + v(x, y)$
 とかくと、(2.35) と (2.28) から、

$$B_j(D) V(x, y)|_{y=0} = g_j(x), \quad j=1, \dots, p$$

また、(2.30), (2.29) から

$$P(D) V(x, y) = F(x, y) + P(D) v(x, y) = f(x, y)$$

さらに $V(x, y) \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^{n+1}) \cap C^\infty([0, \epsilon); \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$
 である。以上をまとめて次の主要定理を得る。

Main Theorem I. $\{P(D), B_j(D), j=1, \dots, p\}$
 が (A.1) ~ (A.3) を満足する system とする。さらに
 (A.4) ~ (A.6) を満足するとする。 $f(x, y) \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^{n+1})$
 $g_j(x), j=1, \dots, p \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ とする。 $\alpha > (2.5)$ を満たす

とする。今 data を $f(x, y)$, $g_j(x)$, $j=1, \dots, p$ とする。
境界値問題 (2.1), (2.2) の解 $u(x, y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_+^{n+1}) \cap C^\infty([0, \epsilon); \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)) \cap L^2_{loc}(E_{R_0})$ が存在したとする。
 $u(x, y)$ が

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} R^{-1} \int_{T_{5,R}} |u(x, y)|^2 dx dy = 0$$

なる条件を満足するとする。ここで $T_{5,R}$ は Lemma 4 の T のとする。

$$\Rightarrow v(x, y) \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}_+^{n+1}) \cap C^\infty([0, \epsilon); \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$$

で (2.1), (2.2) を満足する $v(x, y)$ が存在する。

$$\text{さらに } \text{supp } v(x, y) \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+1}; \sqrt{|x|^2 + y^2} \leq a\}.$$

さらに, $u(x, y)$ が

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} R^{-1} \int_{T_{6,R}} |u(x, y)|^2 dx dy = 0$$

を満足する $\Rightarrow u(x, y) \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}_+^{n+1})$ である
ここで $T_6 = T_5 \cup T_1$, T_1 は, 定理 2
のものとし, $T_{6,R} = \{(x, y) \in T_6; y \gg 0, R < \sqrt{|x|^2 + y^2} < 2R\}$ とした。 図

さらに次の定理が成立する。

Main Theorem II $\{P(b), B_j(b), j=1, \dots, p\}$
は (A.1) ~ (A.3) を満たす system とする。

もし (A.4) ~ (A.6) の中の少なくとも一つの条件
を $\{P(b), B_j(b), j=1, \dots, p\}$ は満足しない。

$\Rightarrow$ 任意の integer $N \geq 1$ について、必ず $u_N(x, y)$
 $\in C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}) \cap \mathcal{S}'(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}})$ であり

$$P(b) u_N(x, y) \in \mathcal{E}'(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}),$$

$$|B_j(b) u_N(x, y)| \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n), \quad j=1, \dots, p$$

$$|u_N(x, y)| \leq C (1 + |x| + |y|)^{-N}, \quad y \geq 0$$

すなわちある constant C により成立する。もし
 $u_N(x, y) \notin \mathcal{E}'(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}})$ なるものが存在
する。 □

Main Theorem II により $\{P(b), B_j(b), j=1, \dots, p\}$ が
(A.1) ~ (A.3) を満たす system のとき、条件 (A.4) ~
(A.6) は minimal であることがわかる。

References.

1. Hörmander, L. : Linear partial differential operators, Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1963.
2. Hörmander, L. : Lower bounds at infinity for solutions of differential equations with constant coefficients, Israel J. Math. 16 (1973) 106-116.
3. Littman, W. : Decay at infinity of solutions to partial differential equations; removal of the curvature assumption, Israel J. Math. 8 (1970), 403-407.
4. Littman, W. : Decroissance a l'infini des solutions, a l'exterieur d'un cône, d'equations aux derivees partielles a coefficients constants. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 287(3 juillet 1978) Serie A 15-17.
5. Murata, M. : A theorem of Liouville type for partial differential equations with constant coefficients, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math. 21 (1974), 395-404.
6. Murata, M. : Asymptotic behaviors at infinity of solutions of certain linear partial differential equations, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math. 23 (1976), 107- 148.
7. Murata, M. and Shibata, Y. : Lower bounds at infinity of solutions of partial differential equations in the exterior of a proper cone. Israel J. Math. Vol. 31, No. 2, (1978) 193-203.
8. Rellich, F. : Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $\Delta u + \lambda u = 0$ in unendlichen Gebieten, Jahresb. Deutsch. Math Ver. 53 (1943), 57-68.

9. Shibata, Y. : Liouville type theorem for a system $\{P(D), B_j(D), j = 1, \dots, p\}$ of differential operators with constant coefficients in a half space, to appear in Publ. RIMS. Kyoto Univ.
10. Shibata, Y. : A characterization of the hyperbolic mixed problem in a quarter space for differential operators with constant coefficients, to appear in Publ. RIMS Kyoto Univ.