

大振幅の音響衝撃波の伝播

北大工 矢野 猛 (Takeru Yano)

北大工 井上良紀 (Yoshinori Inoue)

1. はじめに

無限平板の連続的な正弦振動によって、半無限流体中に放射される非線形平面音波および音響衝撃波の伝播過程を、音響マッハ数 $M = O(1)$ 、音響レイノルズ数 $Re \gg 1$ の場合に対して考察する。音波の伝播にともなう非線形現象に対するこれまでの研究の多くは、弱非線形問題、すなわち、音響マッハ数 M が 1 に比べて小さい場合の問題を対象としてきた[1]。本研究の目的は、これまでほとんどとりあげられることのなかった大振幅の音響衝撃波 ($M = O(1)$) の伝播の解析を、音響レイノルズ数 Re が 1 に比べて十分大きい場合に対して行い、その強非線形の現象の特徴を明確にすることである。

音響マッハ数 M と音響レイノルズ数 Re は、それぞれ

$$M \equiv \frac{u_0}{c_0}, \quad Re \equiv \frac{(\gamma + 1)u_0 c_0}{\delta \omega}, \quad (1, 2)$$

によって定義される無次元のパラメータである ([1] 参照)。ここで、 u_0 は代表的な流体の粒子速度、 c_0 は静止流体中の音速、 γ は比熱比、 δ は音の拡散率、 ω は音源の角振動数である。明らかに、 M は音波の非線形効果の強さを示している。一方、 Re は、非線形効果と音波のエネルギーの散逸効果の比を意味している。音波中に衝撃波が形成されうるのは Re が 1 に比べて大きいときであり、形成された衝撃波の厚さは $Re \rightarrow \infty$ の極限で 0 に近づく。本研究は、このような不連続面とみなされる音響衝撃波が、強い非線形効果によって音波中に形成され伝播していく過程を解析するものである。

正弦的な振動をする音源から放射される平面音波の伝播過程は、弱非線形 ($M \ll 1$) かつ $Re \gg 1$ の仮定のもとでは、すでに、1960 年代に理論的な解析が行なわれている[2,3]。以下にその主な特徴を要約する (図 1):

- (i) 波形は、音源の近傍では正弦的で、伝播にともなう蓄積する非線形効果によって徐々にゆがめられる。
- (ii) 波形の圧縮部と希薄部は、その伝播過程において常に対称に保たれる。
- (iii) 衝撃波は遠方場で形成され、十分遠方で鋸歯状波 (sawtooth wave) とよばれる独特の波形に発展する。
- (iv) 衝撃波の伝播速度は c_0 で一定である。衝撃波の波面の間隔は音波の波長と同一に保たれる。((ii) で述べた事柄と関連する。)
- (v) 音源が振動を始めて後、十分に時間が経過すると現象は定常状態に達する。

本研究で扱われる強非線形波は、これらの弱非線形波の特徴と定性的にさえ異なるふるまいを示す (とくに (v))。次節以降でそのことを明らかにしていく。

Blackstock[4]は、非散逸性の気体中での平面音波の伝播過程を、弱非線形の仮定をおくことなく解析し、衝撃波が発生するまでの音波のふるまいを記述する厳密解を得ている。さらに、その解を用いて衝撃波の形成位置と時刻を求め、衝撃波が波形の希薄部に形成されることを示した(図4参照)(ただし、本研究とは境界条件が異なる。2節参照)。しかしながら、Blackstockは衝撃波の形成位置および時刻の M に対する変化は調べていない。3-I節で、それらに対する M による表現が求められ、 $M \rightarrow 2/(\gamma-1)$ の極限で衝撃波が平板上で形成されることを示す。衝撃波形成後は解析的な取扱いは困難となるため、数値解法(Osher's scheme)が用いられる(3-II)。数値計算の結果、衝撃波の伝播速度が c_0 より速いこと、波の先頭の衝撃波が後続の衝撃波に次々と追いつかれて合体することなどの弱非線形理論との相違が明らかにされる(図6)。さらに、衝撃波形成後に、波の伝播方向に向かう時間的空間的にはほぼ一定な流量を持つ質量流(acoustic streaming)が発生することが見いだされる(弱非線形理論では音響流は発生しない)(図7)。このことはとくに注目に値する。なぜなら、これはまた、平板の近傍の流体が時間が経つにつれて希薄になることを意味するからである。つまり、現象が決して定常状態には到達し得ないことを示唆する。

2. 問題とその定式化

$t^* < 0$ で $x^* = 0$ に静止していた無限平板が、 $t^* = 0$ から

$$x^* = a(\cos \omega t^* - 1), \quad (3)$$

にしたがう正弦振動を行うとき、この振動によって半無限媒質中に放射される平面音波の伝播過程を考察する。ここで、 a は平板の振動の振幅、 ω はその角振動数である。また、媒質は理想気体で $t^* < 0$ で静止一様状態にあると仮定する。このとき、式(1)(2)で定義される音響マッハ数と音響レイノルズ数は、それぞれ

$$M = \frac{a\omega}{c_0}, \quad R_e = \frac{(\gamma+1)c_0 a}{\delta}, \quad (4, 5)$$

となる。1で述べたように本研究では

$$M = O(1) \left(\text{ただし, } M \leq \frac{2}{\gamma-1} \right), \quad R_e \gg 1, \quad (6, 7)$$

である場合を扱う。式(6)において、音響マッハ数の上限 $2/(\gamma-1)$ は一様エントロピーの膨張波が達し得る最大速度(escape speed)を示す。

以下のような無次元変数を導入する:

$$\tau = \omega t^*, \quad x = \omega x^*/c_0, \quad u = u^*/c_0, \quad \rho = \rho^*/\rho_0, \quad p = p^*/\rho_0 c_0^2. \quad (8)$$

ここで、 ρ は密度、 p は圧力、添え字 $_0$ は初期の静止一様状態における量を表わす。

衝撃波の形成時刻以前では、 $\tau < 0$ で気体が静止一様状態であったとする仮定により、支配方程式は、厳密に、単一波の方程式

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \beta u \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (y = \tau - x, \quad \beta = \frac{\gamma + 1}{2}), \quad (9)$$

および

$$\rho = [1 + (\beta - 1)u]^{1/(\beta - 1)}, \quad (10)$$

と、等エントロピー関係式

$$p = \frac{\rho^\gamma}{\gamma}, \quad (11)$$

となる。

衝撃波形成後はもはや一様エントロピー状態ではありえないため、支配方程式として、質量、運動量およびエネルギーの保存則

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x}(p + \rho u^2) = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial E_t}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x}[(E_t + p)u] = 0, \quad (14)$$

を用いる。ただし、 E_t は次式で与えられる単位体積あたりの気体の全エネルギーである：

$$E_t = (1/2)\rho u^2 + p/(\gamma - 1). \quad (15)$$

衝撃波は方程式系 (12)–(14) において不連続面 (weak solution) として表わされる。

$\tau < 0$ で気体は静止一様状態であるから

$$u = 0, \quad \rho = 1, \quad p = 1/\gamma, \quad (x \geq 0). \quad (16)$$

平板上での境界条件は、式 (3) より

$$u = -M \sin \tau \quad \text{at} \quad y = \tau + M(1 - \cos \tau), \quad (\tau \geq 0), \quad (17)$$

となる。結局、波のふるまいは初期条件 (16) と境界条件 (17) のもとで方程式 (9) および方程式系 (12)–(14) を解くことによって決定されることになる。

Blackstock[4]は、平板の変位が式 (3) の右辺に負号をつけたものにしながらうとして、最初に放射される波が圧縮波であるような問題を扱った。このため最初に発生する衝撃波の形成位置と時刻は異なるが、その場合も、3-II 節で述べるような衝撃波形成後の波のふるまいは本質的に変わらない。

3. 解 析

3-I. 衝撃波形成まで

単一波の方程式 (9) の境界条件 (17) を満たす厳密解は、特性曲線の方法を用いて容易に求めることができる ([4]参照):

$$u = -M \sin \mu, \quad (18)$$

$$y - [\mu + M(1 - \cos \mu)] = \beta M \sin \mu (\tau - \mu), \quad (\tau \geq 0). \quad (19)$$

ここで、 μ は平板上で τ と一致するようにとられたパラメータである。図 2 に厳密解 (18)(19) から得られる音波の波形が描かれている。明らかに、波形の圧縮部と希薄部の対称性は失われている。 M を大きくするとその非対称性はさらに増大する。

厳密解 (18)(19) で与えられる速度場は、波形の勾配が初めて無限大になる時刻をこえると多価になる。最初にできる衝撃波の形成時刻 τ_s は

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{\tau} = -\infty, \quad i.e., \quad \left. \frac{\partial \mu}{\partial x} \right|_{\tau} = -\infty, \quad (20)$$

を満足する最小の τ として厳密解 (18)(19) から得られる:

$$\tau_s = \pi - \arcsin \left(\frac{1}{\nu} \right) + \frac{2\gamma}{\gamma+1} \sqrt{\nu^2 - 1}, \quad (21)$$

ただし,

$$\nu = \frac{1}{2\gamma M} + \sqrt{\left(\frac{1}{2\gamma M} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right)}. \quad (22)$$

また、衝撃波の形成位置 x_s は、式 (21)(22) を式 (19) に代入することによって

$$x_s = \left\{ \frac{2\gamma\sqrt{\nu^2 - 1}}{\gamma+1} \left[\nu^2 - \frac{(\gamma+1)(2\gamma+1)}{2\gamma^2} \right] - \frac{\nu}{\gamma} \right\} \left[\nu^2 - \frac{\gamma+1}{2\gamma} \right]^{-1}, \quad (23)$$

と表わすことができる。このとき、衝撃波の形成される点における速度 u_s は、 M と ν を用いると

$$u_s = -\frac{M}{\nu}, \quad (24)$$

によって与えられる。式 (22) および (24) から、衝撃波が波形の希薄部に形成されること、 u_s の大きさが M とともに大きくなるのが容易にわかる。とくに、

(a) $M \rightarrow 0$ の極限では、式 (22) より

$$\nu \rightarrow 1/\gamma M, \quad (25)$$

であるから

$$\tau_s \rightarrow \pi + 1/\beta M, \quad x_s \rightarrow 1/\beta M, \quad u_s \rightarrow 0. \quad (26)$$

これは確かに弱非線形理論の結果と一致する[2,3].

(b) $M \rightarrow M_{max} \equiv 2/(\gamma - 1)$ の極限では, 式 (22) より

$$\nu \rightarrow 1, \quad (27)$$

となる. これよりただちに

$$\tau_s \rightarrow \pi/2, \quad x_s \rightarrow -M_{max}, \quad u_s \rightarrow -M_{max}, \quad (28)$$

が得られる. すなわち, この極限において衝撃波は平板上で形成される (式 (3) 参照).

衝撃波の形成時刻 τ_s (式 (21)) の M に対する変化が図 3(a) に, その形成位置 x_s (式 (23)) の M に対する変化が図 3(b) に示されている. τ_s は M が増大するにつれて単調に減少するのにたいして, x_s は M_{max} の近傍で極小値をとる. 図 4 に, 厳密解 (18)(19) を用いて描かれた衝撃波形成時刻の速度波形が示され, 弱非線形理論による波形との比較がなされている.

3-II. 衝撃波形成時刻以後

衝撃波の形成時刻以後は方程式系 (12)–(14) を境界条件 (17) のもとで upwind difference scheme のひとつである Osher's scheme[5,6]を用いて数値的に解く. 以下はその結果である.

図 5 に無次元時刻 $\tau = 20\pi$ における平板 $x = 0$ から波の先端 $x = 20\pi$ までの速度波形を示す. 平板の近傍で形成された衝撃波はその強さを急激に減衰させながら全体として鋸歯状波型の波に発展していく. 衝撃波の伝播速度が c_0 より速いために, c_0 以下の速度で進む波の先端の膨張波の部分 (希薄部) は先頭の衝撃波にのみこまれる.

図 6(a)(b) は速度 c_0 で波の伝播方向へ進む座標系からみた波の先端部 ($y < 2\pi$) である. 先頭の衝撃波は希薄部をのみこんだ後, 静止気体中を徐々に減速しながら進んでゆく. しかし, やがて先頭の衝撃波は後続の衝撃波に追いつかれて合体する (図 6(b)). 一般に M が増大すると衝撃波の伝播速度も増大する.

図 7(a)(b) は x 軸に垂直な単位断面を横切って輸送される質量の時間平均 $\overline{\rho u}$

$$\overline{\rho u} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_T^{T+2\pi} \rho u \, d\tau, \quad (29)$$

の x 軸上の各点での値を示している. 衝撃波が形成されるまでは, 厳密解 (18)(19) および式 (10) から $\overline{\rho u} \equiv 0$ を証明できる. 図 7(a) は $M = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ に対して, 式 (29) で $T = 78\pi$ としたときの $\overline{\rho u}$ を図示したものである. 各々のマッハ数に対して, (波の先端部

と平板近傍を除く大部分の区間で) 空間的にはほぼ一定の流量の, 音波の伝播方向に向かう流れがあることがわかる. また, M が小さくなるほど流量は小さくなっている (弱非線形理論 ($M \rightarrow 0$) では音響流は発生しない). 図 7(b) は $M = 0.4$ の場合に, T を変えて (a) と同じ図を描いたものである. 時間的にみてもほぼ一定の流量であることがわかる. この音響流のために, 平板近傍の気体の密度は時間とともに低下する.

4. まとめ

本研究の結果明らかになった強非線形の音波および音響衝撃波の伝播にともなう非線形現象の主な特徴を以下に要約する:

- (i) 波形の圧縮部と希薄部の対称性は失われる (図 2, 図 4, 図 5 参照). その非対称性は M とともに増大する.
- (ii) 衝撃波は近傍場において波形の希薄部に形成される (図 2, 図 4). とくに $M \rightarrow 2/(\gamma-1)$ の極限では衝撃波は平板上で形成される.
- (iii) 遠方では, 非対称な鋸歯状波型の波に発展する (図 5).
- (iv) 衝撃波は c_0 より速い速度で伝播する. したがって, 波形の希薄部は衝撃波にのみこまれる. 先頭の衝撃波は希薄部をのみこんだ後, 伝播速度が徐々に低下する. やがて後続の衝撃波に追いつかれ合体する (図 6).
- (v) 衝撃波形成後, 音波の伝播方向に向かう音響流 (acoustic streaming) が発生する. その流量は M とともに増大するが, M を定めると時間的空間的にはほぼ一定である. このため平板の近傍の気体は時間が経つにつれて希薄になる (図 7).

参考文献

1. Rudenko, O. V. and Soluyan, S. I., *Theoretical Foundations of Nonlinear Acoustics*, Consultants Bureau, New York, 1977.
2. Blackstock, D. T., Connection between the Fay and Fubini solutions for plane sound waves of finite amplitude. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1966, **39**, 1019-26.
3. Soluyan, S. I. and Khokhlov, R. V., Propagation of acoustic waves of finite amplitude in a dissipative medium. *Vestn. Moskovskogo Univ.*, 1961, **3**, 52-61 (translated in *Nonlinear Acoustics in Fluids*, ed. R. T. Beyer, Benchmark Papers in Acoustics, vol. 18, Van Nostrand Reinhold Company Inc., New York, 1984, pp. 193-6.).
4. Blackstock, D. T., Propagation of plane sound waves of finite amplitude in nondissipative fluids. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1962, **34**, 9-30.
5. Osher, S. and Solomon, F., Upwind difference schemes for hyperbolic systems of conservation laws. *Math. Comp.*, 1982, **38**, 339-74.

6. Chakravarthy, S. R. and Osher, S., Computing with high-resolution upwind schemes for hyperbolic equations. In *Large-Scale Computations in Fluid Mechanics*, eds. B. Engquist, S. Osher, and R. C. J. Somerville, Lectures in applied mathematics, vol. 22-part 1, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1985, pp. 57-86.

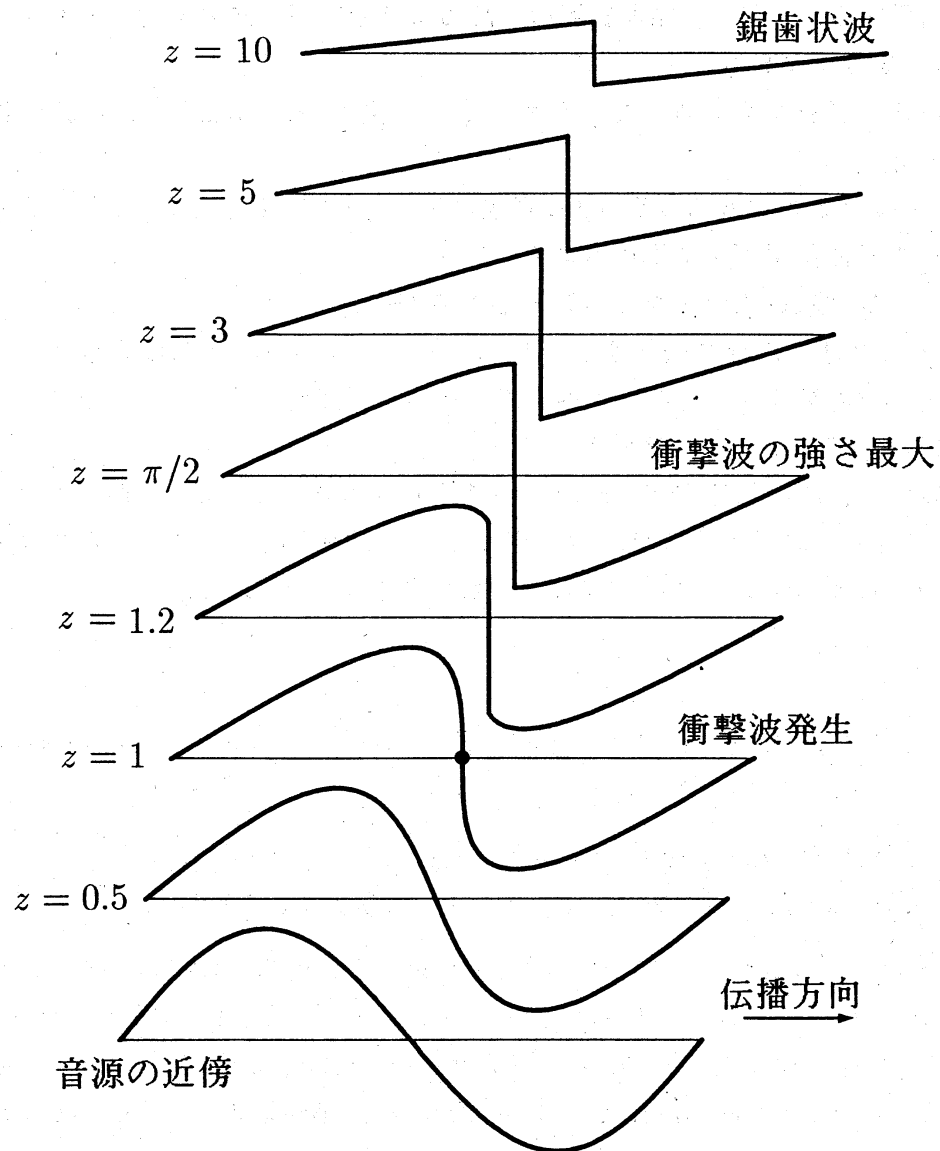


図1 弱非線形音波の伝播 ($M \ll 1$, $R_e \gg 1$)

$$z \equiv \beta M \omega t, \quad \beta = (\gamma + 1)/2$$

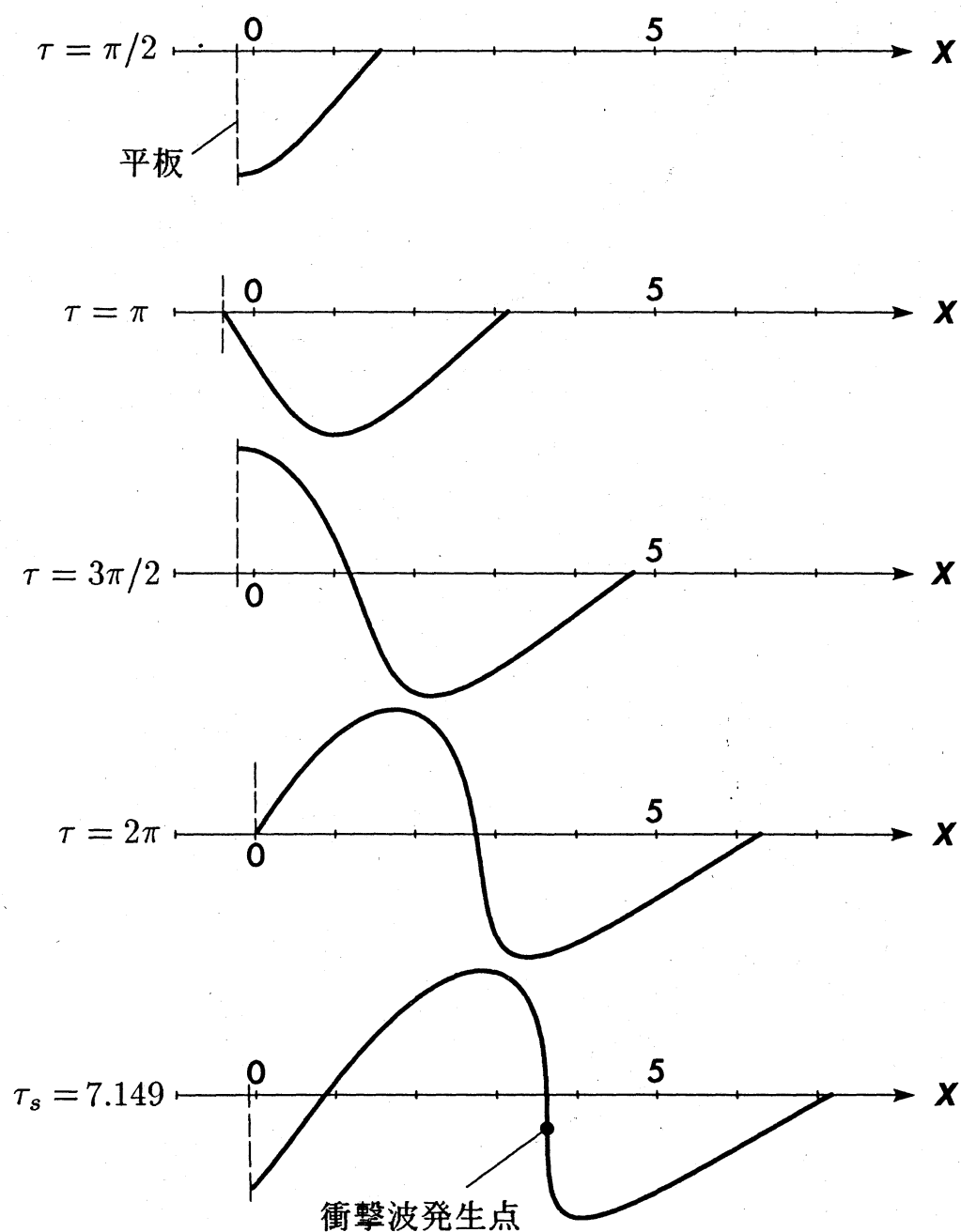


図2 大振幅の音波の伝播（衝撃波の形成時刻まで）
（速度波形） $M = 0.2, \gamma = 1.4$

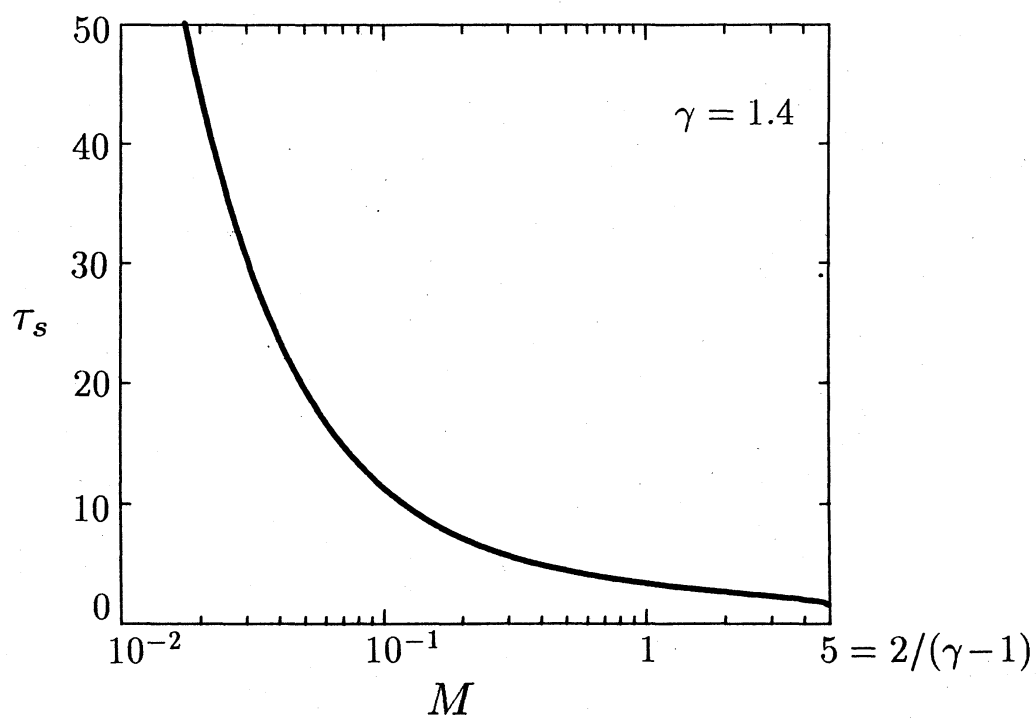


圖 3(a) 衝擊波形成時刻 τ_s

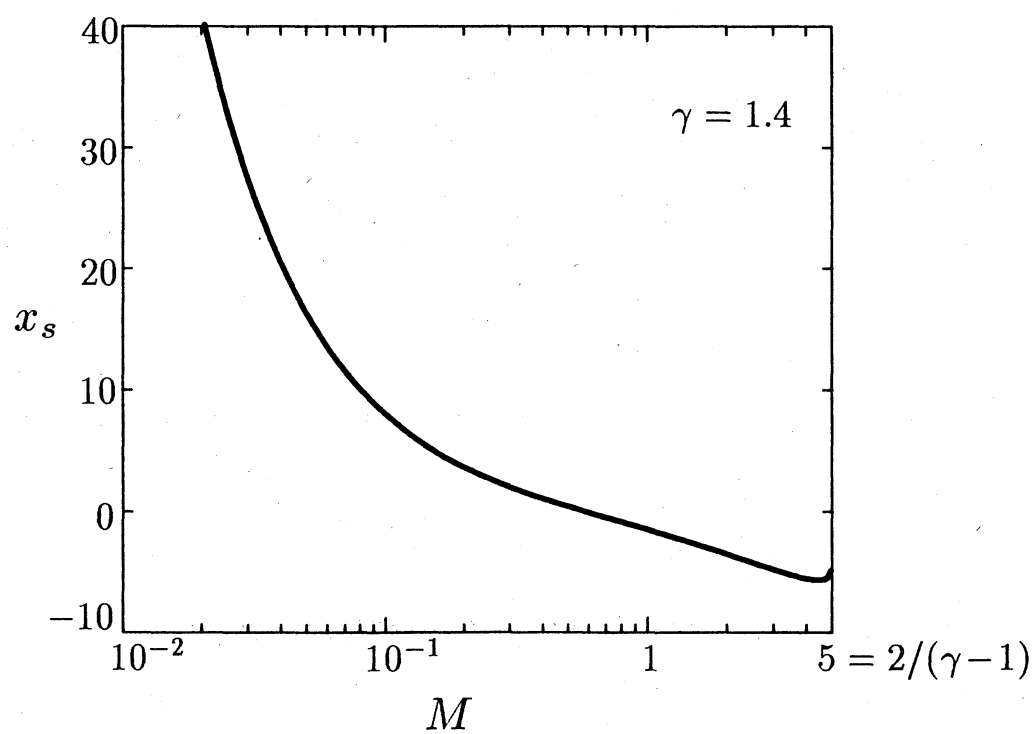


圖 3(b) 衝擊波形成位置 x_s

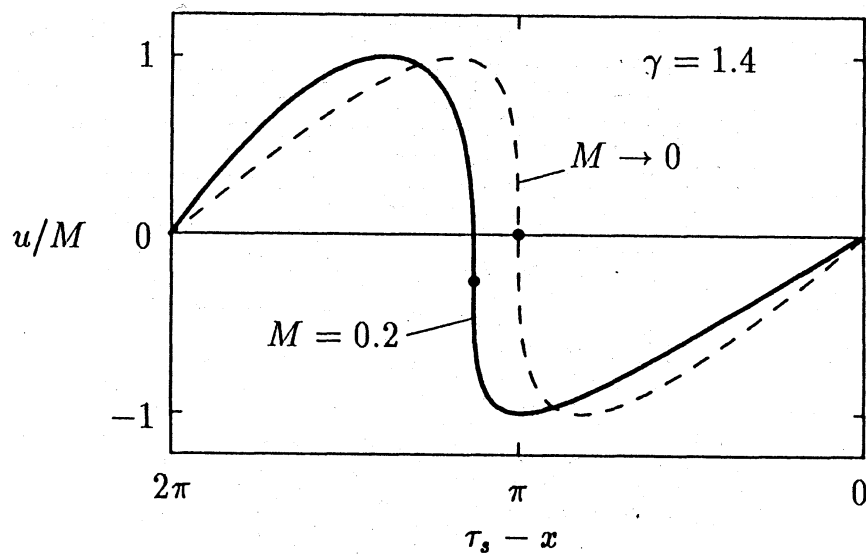


図4 衝撃波形成時刻の速度波形

● : 衝撃波発生点

実線 : 強非線形波; $M = 0.2$, $\tau_s = 7.149$

破線 : 弱非線形理論; $M \rightarrow 0$, $\tau_s = 1/\beta M + \pi$

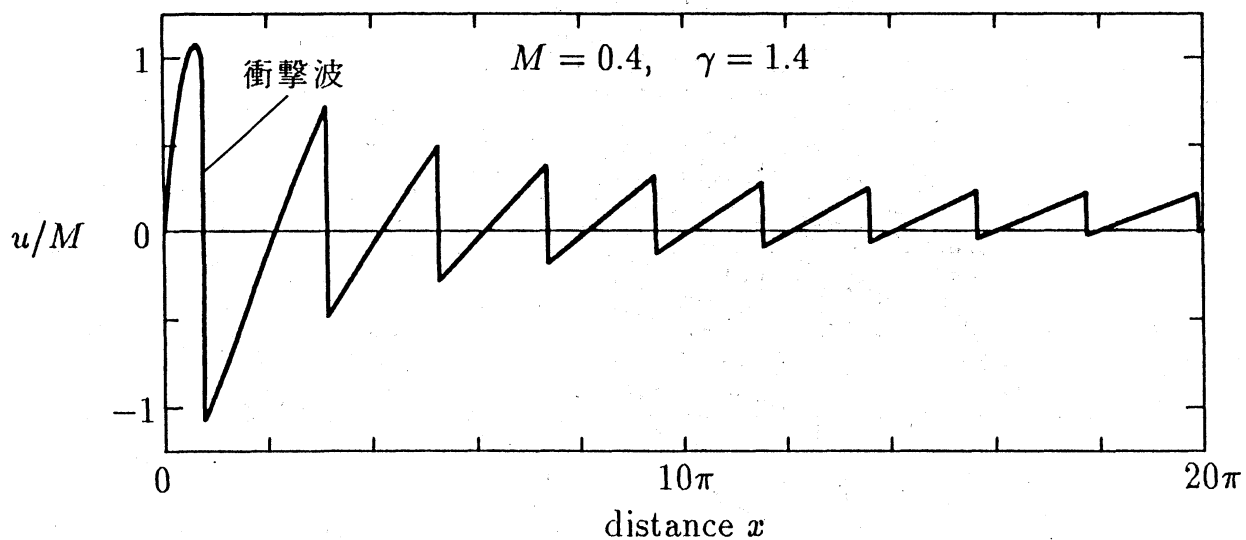


図5 大振幅の音響衝撃波の伝播（無次元時刻 $\tau = 20\pi$ における速度波形）

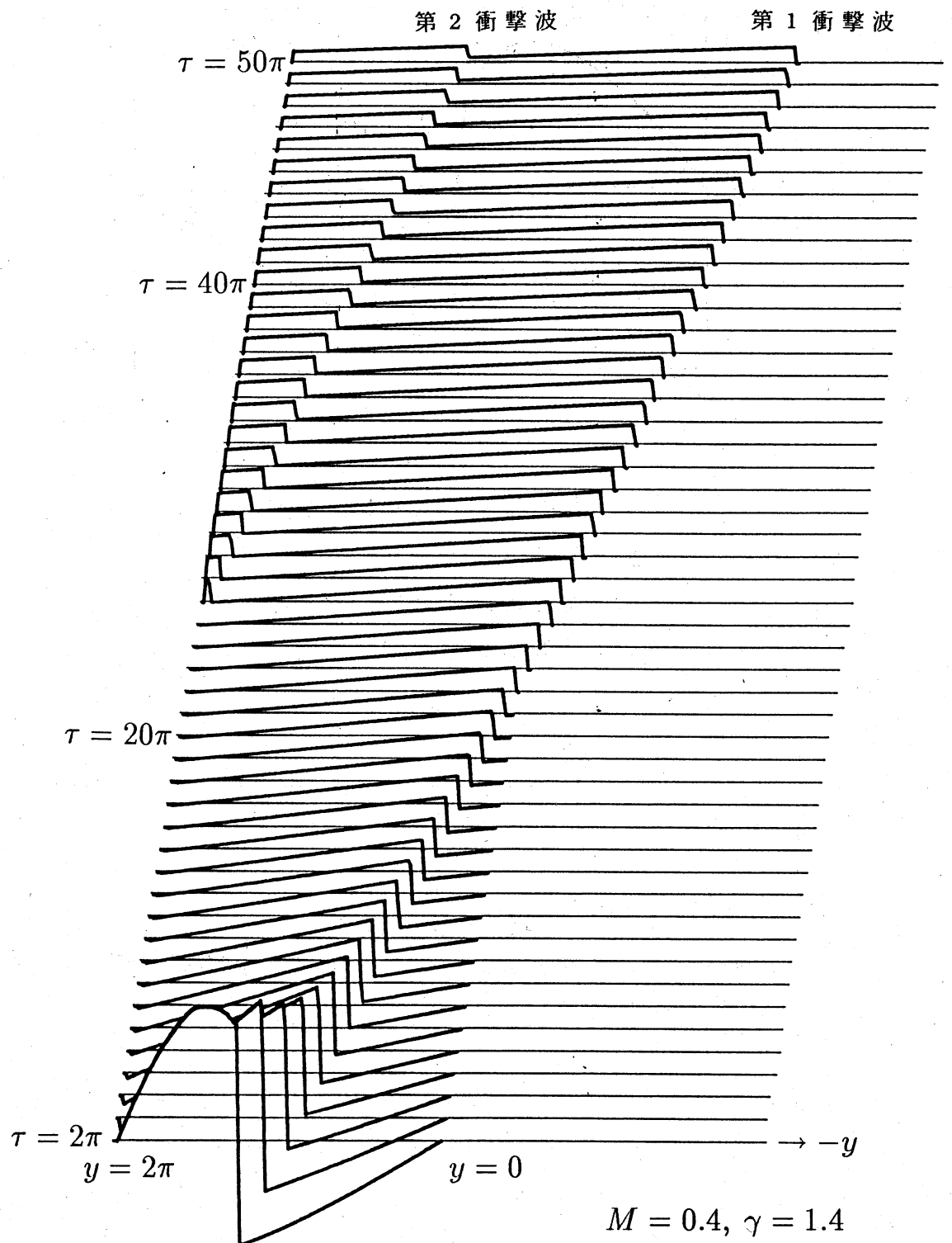


図 6(a) 大振幅の音響衝撃波の速度波形の時間発展 (c_0 で音波の伝播方向に進む座標系からみた波形)

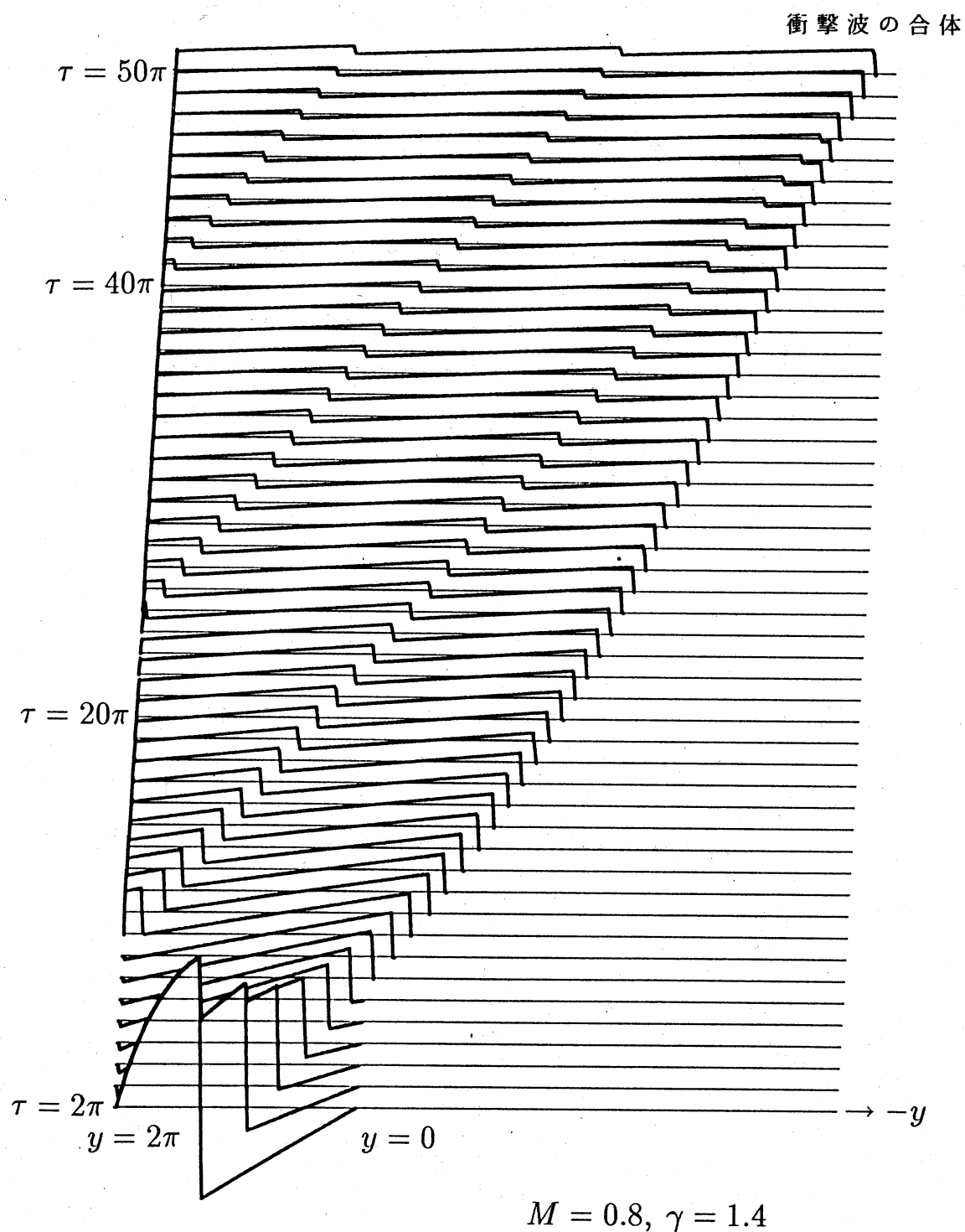


図 6(b) 大振幅の音響衝撃波の速度波形の時間発展 (c_0 で音波の伝播方向に進む座標系からみた波形)

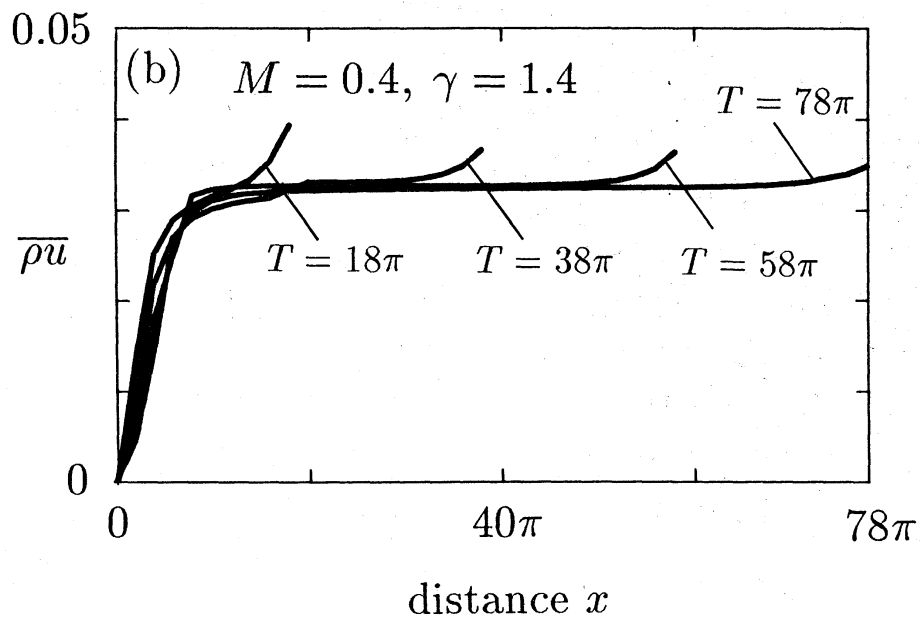
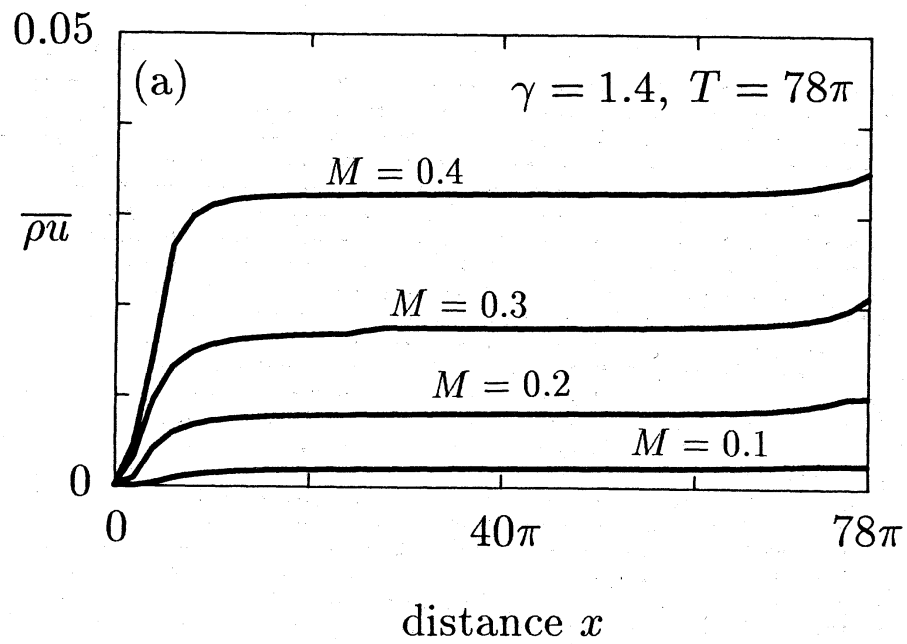


図7 平均の質量流 (x 軸に垂直な断面を横切って輸送される気体の質量の時間平均)