

Gauge theory on a punctured two-torus

京都大学・情報学・数理工学専攻 岩井 敏洋 (Toshihiro Iwai)¹

薮 義郎 (Yoshiro Yabu)²

Department of Applied Mathematics and Physics,
Graduate School of Informatics, Kyoto University

1 はじめに

Aharonov-Bohm 効果 [3] とは、波動関数の位相変化を引き起こすトポロジカルな効果として知られている。Aharonov-Bohm 効果の簡単なモデルは、 z -軸に沿って置かれたソレノイドの周りの電子の運動を記述する 3 次元の量子系である。ソレノイドのつくる磁場はベクトルポテンシャル

$$\mathbf{A} = \frac{\Phi}{2\pi} \left(-\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, 0 \right)$$

によって与えられる。ここで、 Φ はソレノイドの磁束である。 z 方向の並進対称性により、系は簡約化され 2 次元平面上の量子系になる。2 次元平面上の Aharonov-Bohm 系については、解析や幾何などの側面から多くの研究がなされている [1, 2, 8]。幾何的な側面からいえば、系のベクトルポテンシャルは原点に特異点を持つため、 $\mathbf{A}$ は直積バンドル $U(1) \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ の平坦な接続形式であり、Aharonov-Bohm 効果とはその接続形式に関するホロノミーであると理解できる。

最近 Arai [4, 5] によって 2 次元平面上の特異なベクトルポテンシャルをもつ量子力学系について、解析的な面から調べられた。Arai によって調べられた磁場は、無限に細いソレノイドが周期的に平面を貫いているようなものである。我々はその周期性に着目し、2 次元トーラス上で有限個 (N 個) のソレノイドが置かれているような系について考える。ベクトルポテンシャルに相当する平坦な接続形式は特異性を持たざるをえないから、2 次元トーラスから N 点を除いた多様体 (punctured トーラスと呼ぶ) 上で接続形式を取り扱うこととなる。微分幾何学的に論点を明らかにするために、次のような問題を考えることにしよう。

問題 1. punctured トーラス上の主 $U(1)$ -バンドルを構成し、そのうえの平坦接続を全て分類せよ。

¹E-mail: iwai@amp.i.kyoto-u.ac.jp

²E-mail: yoshiro@amp.i.kyoto-u.ac.jp

問題 2. 2次元トーラス上で Aharonv-Bohm 効果を実現するような量子系を定義して、それらを分類せよ。

本稿の構成は以下のとおりである：まず2節では、Tanimura[9]による n 次元トーラス上の S^1 -バンドルの構成を参考にして、punctured トーラス上の主 $U(1)$ -バンドルを構成する。また、主 $U(1)$ -バンドル上の接続形式およびゲージ群について考察する。3節では、主 $U(1)$ -バンドル上の平坦な接続形式がゲージ同値であるための必要十分条件を求める。その条件を利用して、平坦接続の表示に対する定理を証明し、平坦接続のモジュライ空間が $(N+1)$ 次元トーラスと同一視できることを示す。その後量子論に移り、2次元トーラス上で Aharonv-Bohm 効果を実現するような量子系を定義する(4節)。最後に、そのような量子系のユニタリー同値性について考察する。

2 $\dot{T}^2$ 上の主 $U(1)$ -バンドル

2.1 主 $U(1)$ -バンドル

まず、2次元トーラス T^2 から N 点をのぞいた多様体(punctured トーラス) $\dot{T}^2$ を構成する。 $\mathbf{c}_0^{(j)} \in [0, 1] \times [0, 1], j = 1, 2, \dots, N$ でソレノイドの位置を表わすこととし、さらに $\mathbf{c}_m^{(j)} = \mathbf{c}_0^{(j)} + \mathbf{m}, \mathbf{m} \in \mathbf{Z}^2$ とおく。 $\mathbf{R}^2$ からこれらの点の集合 $\Lambda = \{\mathbf{c}_m^{(j)}\}_{m \in \mathbf{Z}^2}^{j=1, \dots, N}$ を除いたものを punctured plane と呼び、 $\dot{\mathbf{R}}^2 = \mathbf{R}^2 \setminus \Lambda$ と表わす。本稿における punctured トーラスとは、加群 $\mathbf{Z}^2$ の $\dot{\mathbf{R}}^2$ への自然な作用によって定まる軌道体 $\dot{\mathbf{R}}^2/\mathbf{Z}^2$ であり、以下 $\dot{T}^2 = \dot{\mathbf{R}}^2/\mathbf{Z}^2$ で表わす。

我々は punctured トーラス $\dot{T}^2$ の主 $U(1)$ -バンドルを構成したいのであるが、ここでは Tanimura[9]による2次元トーラス上の S^1 -バンドルの構成を参考にする。 ω を成分がすべて整数であるような2次正方行列全体 $M(2, \mathbf{Z})$ から選び固定し、 $\mathbf{Z} \times_\omega \mathbf{Z}^2$ を次のような半直積群の構造を持つ群であるとする；

$$(m_0, \mathbf{m}) \cdot (n_0, \mathbf{n}) = (m_0 + n_0 + \langle \mathbf{m}, \omega \mathbf{n} \rangle, \mathbf{m} + \mathbf{n}), \quad (m_0, \mathbf{m}), (n_0, \mathbf{n}) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^2. \quad (2.1)$$

$\langle \bullet, \bullet \rangle$ は $\mathbf{R}^2$ の標準内積である。群 $\mathbf{Z} \times_\omega \mathbf{Z}^2$ の $\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}^2$ への左作用を

$$(m_0, \mathbf{m}) \cdot (x_0, \mathbf{x}) = (x_0 + m_0 + \langle \mathbf{m}, \omega \mathbf{x} \rangle, \mathbf{x} + \mathbf{m}), \\ (m_0, \mathbf{m}) \in \mathbf{Z} \times_\omega \mathbf{Z}^2, (x_0, \mathbf{x}) \in \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}^2, \quad (2.2)$$

で定義する。この作用は自由である。したがって、商空間 $\dot{P}_\omega^3 = (\mathbf{Z} \times_\omega \mathbf{Z}^2) \backslash (\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}^2)$ は滑らかな多様体になる。 $N=0$ のときは、 $\dot{P}_\omega^3$ を特に $\cdot$ (dot) を除いて P_ω^3 と書くことがある。 $\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}^2$ から $\dot{P}_\omega^3$ への自然な射影を

$$\Pi_\omega : \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}^2 \longrightarrow \dot{P}_\omega^3 = (\mathbf{Z} \times_\omega \mathbf{Z}^2) \backslash (\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}^2) : (x_0, \mathbf{x}) \longmapsto [(x_0, \mathbf{x})] \quad (2.3)$$

と表わす。ただし、 $[(x_0, \mathbf{x})]$ は代表元 $(x_0, \mathbf{x})$ をもつ同値類である。さらに、 $\dot{P}_\omega^3$ は $U(1)$ の自由な右作用

$$R_g : [(x_0, \mathbf{x})] \mapsto [(x_0, \mathbf{x})] \cdot e^{2\pi i t} = [(x_0 + t, \mathbf{x})], \quad g = e^{2\pi i t} \in U(1) \quad (2.4)$$

を許容するから、 $\dot{T}^2$ 上の主 $U(1)$ -バンドル

$$\pi_\omega : \dot{P}_\omega^3 \longrightarrow \dot{P}_\omega^3 / U(1) \approx \dot{T}^2 \quad (2.5)$$

を得る。以上のような構成は、

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{Z} \times_\omega \mathbf{Z}^2 & \longrightarrow & \mathbf{Z}^2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}^2 & \longrightarrow & \dot{\mathbf{R}}^2 \\ \downarrow & & \Pi_\omega \downarrow & & \downarrow \\ U(1) & \longrightarrow & \dot{P}_\omega^3 & \xrightarrow{\pi_\omega} & \dot{T}^2 \end{array}$$

という図式にまとめられる。また、 $\omega, \omega' \in M(2, \mathbf{Z})$ に対して、 $\dot{P}_\omega^3 \cong \dot{P}_{\omega'}^3$ であるための必要十分条件は

$$\omega - \omega^T = \omega' - \omega'^T$$

である。つまり、 ω の反対称部分 $\omega_{21} - \omega_{12}$ が主バンドルの同型性を決定する。

2.2 接続形式

主 $U(1)$ -バンドル $\dot{P}_\omega^3$ 上の接続形式全体 $\mathcal{C}(\dot{P}_\omega^3)$ は、 $\dot{\mathbf{R}}^2$ 上の 1 形式 A で

$$T_m^* A = A - \langle \mathbf{m}, \omega d\mathbf{x} \rangle, \quad \mathbf{m} \in \mathbf{Z}^2 \quad (2.6)$$

を満たすものの全体

$$\mathcal{A}_\omega(\dot{\mathbf{R}}^2) = \{A : 1\text{-form on } \dot{\mathbf{R}}^2 \mid T_m^* A = A - \langle \mathbf{m}, \omega d\mathbf{x} \rangle, \mathbf{m} \in \mathbf{Z}^2\} \quad (2.7)$$

と同一視できる。ここで、 T_m は $\dot{\mathbf{R}}^2$ 上の平行移動

$$T_m : \dot{\mathbf{R}}^2 \longrightarrow \dot{\mathbf{R}}^2 : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{m} \quad (2.8)$$

である。実際、 $A \in \mathcal{A}_\omega(\dot{\mathbf{R}}^2)$ に対して、 $\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}^2$ 上の 1 形式 $i(dx_0 + A)$ は $\mathbf{Z} \times_\omega \mathbf{Z}^2$ の作用 (2.2) で不変であって、 $\dot{P}_\omega^3$ 上の 1 形式 α_A を誘導する。この α_A が $\dot{P}_\omega^3$ 上の接続形式であること、すなわち、

$$(C1) \quad \alpha_A\left(\frac{\partial}{\partial x_0}\right) = i \quad \text{and} \quad (C2) \quad R_g^* \alpha_A = \alpha_A, \quad g \in U(1),$$

を満足すること見るのは易しい。逆に、 $\dot{P}_\omega^3$ 上の接続形式 α が与えられたとき、 Π_ω によるその引き戻しは

$$\Pi_\omega^* \alpha = i(dx_0 + A)$$

と書け、 A が (2.6) を満たすことが示せる。

今得られた $\mathcal{A}_\omega(\dot{\mathbf{R}}^2)$ から $\mathcal{C}(\dot{P}_\omega^3)$ への対応を

$$\mathcal{A}_\omega(\dot{\mathbf{R}}^2) \longrightarrow \mathcal{C}(\dot{P}_\omega^3) : A \longmapsto \alpha_A \quad (2.9)$$

と書こう。さらに、 $\dot{P}_\omega^3$ 上の平坦接続全体 $\mathcal{C}_{\text{flat}}(\dot{P}_\omega^3)$ と $\mathcal{A}_\omega(\dot{\mathbf{R}}^2)$ のなかの閉形式全体 $\mathcal{Z}_\omega(\dot{\mathbf{R}}^2) = \{A \in \mathcal{A}_\omega(\dot{\mathbf{R}}^2) \mid dA = 0\}$ とが一対一対応がつく。実際、接続形式 α_A に対する曲率形式を $F(\alpha_A) = d\alpha_A$ とすると、 $\Pi_\omega^* F(\alpha_A) = idA$ より、 α_A が平坦であることと A が閉形式であることは同値であることが分かる。

Lemma 1. $\dot{P}_\omega^3$ 上の接続形式全体 $\mathcal{C}(\dot{P}_\omega^3)$ と $\dot{\mathbf{R}}^2$ 上の 1 形式の集合 $\mathcal{A}_\omega(\dot{\mathbf{R}}^2)$ とは 1 対 1 対応がつき、さらにその対応は $\dot{P}_\omega^3$ 上の平坦接続全体 $\mathcal{C}_{\text{flat}}(\dot{P}_\omega^3)$ と $\dot{\mathbf{R}}^2$ 上の 1 形式の集合 $\mathcal{Z}_\omega(\dot{\mathbf{R}}^2)$ との 1 対 1 対応を誘導する。

2.3 Examples

$\dot{P}_\omega^3$ 上の接続形式の例を 2 つ挙げる。ここで挙げる例は後に平坦接続を分類する際に重要な役割を果たす。

1. Uniform magnetic fields:

もっとも簡単な例は次のような接続形式である；

$$A = -\langle \mathbf{x}, \omega d\mathbf{x} \rangle + \langle \boldsymbol{\varepsilon}, d\mathbf{x} \rangle, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbf{R}^2. \quad (2.10)$$

これは物理的には punctured トーラス $\dot{T}^2$ 上の一様磁場を与えるベクトルポテンシャルに相当する接続形式である。特に、 $\omega \in M(2, \mathbf{Z})$ が対称行列であるときに限って、接続形式 (2.10) は平坦である。実際、 $dA = (\omega_{21} - \omega_{12})dx_1 \wedge dx_2$ である。

2. Generalized Aharonov-Bohm connection:

集合 Λ において特異性をもつような例を挙げよう。 $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_N$ を実パラメータとして、 $\dot{\mathbf{R}}^2$ 上の 1 形式 A を

$$A = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \nu_j \operatorname{Im} \left(\zeta(x_1 + ix_2 - c_0^{(j)})(dx_1 + idx_2) \right) \quad (2.11)$$

で定義する。ここで、 $\zeta(z)$ は Weierstrass の ζ 関数 [10] と呼ばれ、

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\mathbf{m} \in \mathbf{Z}^2 \setminus \{0\}} \left\{ \frac{1}{z - m_1 - im_2} + \frac{1}{m_1 + im_2} + \frac{z}{(m_1 + im_2)^2} \right\} \quad (2.12)$$

で定義される複素関数で $\mathbf{Z}^2$ に 1 位の極をもつ。Weierstrass の $\wp$ 関数とは $-\zeta'(z) = \wp(z)$ という関係をもつ。Weierstrass の ζ 関数の性質

$$\zeta(z + m_1 + im_2) = \zeta(z) + \pi(m_1 - im_2), \quad m_1, m_2 \in \mathbf{Z},$$

から、(2.11) で定義される 1 形式 A は

$$T_{\mathbf{m}}^* A = A - \langle \mathbf{m}, \omega d\mathbf{x} \rangle, \quad \omega = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \nu_j \\ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \nu_j & 0 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

という関係式を満足する。従って、パラメータ ν_j たちが

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \nu_j \in \mathbf{Z} \quad (2.14)$$

という条件を満たせば、 $A \in \mathcal{A}_\omega(\dot{\mathbf{R}}^2)$ であることがわかる。さらに、Cauchy-Riemann の関係式から A は $\dot{\mathbf{R}}^2$ 上の閉形式であり、結局 $A \in \mathcal{Z}_\omega(\dot{\mathbf{R}}^2)$ である。

この接続は、2 次元トーラス上の N 点に無限小の太さのソレノイドが置かれているような磁場を与えるベクトルポテンシャルに相当する。微分を超関数微分であると解釈すると、接続形式 α_A から定まる T^2 上の曲率 B は

$$p^* B = \sum_{j=1}^N \sum_{\mathbf{m} \in \mathbf{Z}^2} \nu_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{c}_{\mathbf{m}}^{(j)}) d\mathbf{x}_1 \wedge d\mathbf{x}_2$$

となる。ここで、 $p: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2 \approx T^2$ は自然な射影である。

2.4 磁束の量子化

この節では $\dot{P}_\omega^3$ 上の平坦な接続形式のみを考える。 α_A を $\dot{P}_\omega^3$ 上の平坦な接続形式であるとする。このとき、 α_A に関する磁束 (flux) が、

$$\rho_j(A) = \oint_{|\mathbf{x} - \mathbf{c}_{\mathbf{m}}^{(j)}| = \epsilon} A, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (2.15)$$

として定義できる。ここで、 ϵ は十分小さい正数であるとし、 $dA = 0$ という条件から $\rho_j(A)$ の定義は ϵ の選び方に依存しない。また、(2.6) から $\rho_j(A)$ は $\mathbf{m} \in \mathbf{Z}^2$ の取り方にも依らない。

こうして定義した磁束は、平坦な接続形式 α_A を特徴づけ、平坦接続を分類する際にも重要である。同時に、磁束の総和は主 $U(1)$ -バンドル $\dot{P}_\omega^3$ を特徴付けるという性質もある。

Proposition 2. (Flux quantization) $\alpha_A \in \mathcal{C}_{\text{flat}}(\dot{P}_\omega^3)$ であるとする。このとき、 α_A に関する磁束の総和は平坦接続 α_A の取り方に依らず、主 $U(1)$ -バンドル $\dot{P}_\omega^3$ にのみ依存する整数値をとる；

$$\sum_{j=1}^N \rho_j(A) = \omega_{21} - \omega_{12}. \quad (2.16)$$

ここで、 ω の反対称部分 $\omega_{21} - \omega_{12}$ は $\dot{P}_\omega^3$ の同型性を決定していたことを思い出そう。したがって、磁束の総和 $\sum_{j=1}^N \rho_j(A)$ は主バンドルの不変量であることがわかる。

Proof. $x \in \mathbf{R}^2$ とし、 $\mathbf{R}^2$ 上の閉路

$$C: x \rightarrow x + e_1 \rightarrow x + e_1 + e_2 \rightarrow x + e_2 \rightarrow x$$

を考える。ただし、 e_1, e_2 は $\mathbf{R}^2$ の標準基底であり、 x は C が Λ を通らないように選ぶ。 C に沿って A を積分すると、磁束の定義 (2.15) から

$$\oint_C A = \sum_{j=1}^N \rho_j(A)$$

である。一方で、(2.6) を用いて $\oint_C A$ を計算すると、

$$\begin{aligned} \oint_C A &= \int_{x \rightarrow x+e_1} A + \int_{x+e_1 \rightarrow x+e_1+e_2} A - \int_{x+e_2 \rightarrow x+e_1+e_2} A - \int_{x \rightarrow x+e_2} A \\ &= \int_{x \rightarrow x+e_1} A + \int_{x \rightarrow x+e_2} T_{e_1}^* A - \int_{x \rightarrow x+e_1} T_{e_2}^* A - \int_{x \rightarrow x+e_2} A \\ &= \int_{x \rightarrow x+e_1} \langle e_2, \omega dx \rangle - \int_{x \rightarrow x+e_2} \langle e_1, \omega dx \rangle \\ &= \omega_{21} - \omega_{12} \end{aligned}$$

となる。よって、 $\sum_{j=1}^N \rho_j(A) = \omega_{21} - \omega_{12}$ 。 $\square$

Remark. $N = 0$ のときは平坦接続に対して磁束は定義できない。したがって、(2.16) は成立しないように思えるが、次の Lemma 3 から $N = 0$ であっても (2.16) は成立するとみなすことができる。

Lemma 3. $N = 0$ であるとする。このとき、 $\omega \in M(2, \mathbf{Z})$ が対称行列でなければ、 P_ω^3 上の平坦接続は存在しない。

Proof. $\omega \in M(2, \mathbf{Z})$ は対称行列ではないとし、 $\alpha_A \in \mathcal{C}_{\text{flat}}(\dot{P}_\omega^3)$ であるとする。 $\mathbf{R}^2$ 上の閉路 $C: 0 \rightarrow e_1 \rightarrow e_1 + e_2 \rightarrow e_2 \rightarrow 0$ 上で A を積分すると、 $dA = 0$ と Green の定理から、 $\oint_C A = 0$ である。一方で、上の Proposition 2 の証明と同様の計算によって、 $\oint_C A = \omega_{21} - \omega_{12}$ である。 $\omega_{21} - \omega_{12} = 0$ となるが、これは ω は対称行列でないということに矛盾する。したがって、 ω が対称行列でなければ、 $\dot{P}_\omega^3$ 上の平坦接続は存在しない。 $\square$

2.5 ゲージ群

$\dot{P}_\omega^3$ からそれ自身への写像 $\phi : \dot{P}_\omega^3 \rightarrow \dot{P}_\omega^3$ が、

$$(G1) \ R_g \circ \phi = \phi \circ R_g, \ g \in U(1) \quad \text{and} \quad (G2) \ \pi_\omega \circ \phi = \pi_\omega$$

を満たすとき、 ϕ を $\dot{P}_\omega^3$ 上のゲージ変換と呼ぶ。 $\dot{P}_\omega^3$ 上のゲージ変換全体は、写像の合成によって群をなすため、 $\dot{P}_\omega^3$ 上のゲージ群と呼ばれる。ここで $\dot{P}_\omega^3$ 上のゲージ群を $\mathcal{G}(\dot{P}_\omega^3)$ と表わそう。ゲージ群 $\mathcal{G}(\dot{P}_\omega^3)$ と同型な群を次のようにして見つけることができる。

Lemma 4. $C^\infty(\dot{T}^2; U(1))$ を $\dot{\mathbf{R}}^2$ 上の周期的で滑らかな $U(1)$ 値関数全体であるとする：

$$C^\infty(\dot{T}^2; U(1)) = \{f : \dot{\mathbf{R}}^2 \rightarrow U(1) \mid f(\mathbf{x} + \mathbf{m}) = f(\mathbf{x}), \ \mathbf{m} \in \mathbf{Z}^2\}. \quad (2.17)$$

$C^\infty(\dot{T}^2; U(1))$ は関数の積によって群をなし、さらに $\dot{P}_\omega^3$ 上のゲージ群 $\mathcal{G}(\dot{P}_\omega^3)$ と同型である。

Proof. $f \in C^\infty(\dot{T}^2; U(1))$ に対して、 $\phi_f : \dot{P}_\omega^3 \rightarrow \dot{P}_\omega^3$ を

$$\phi_f : \dot{P}_\omega^3 \rightarrow \dot{P}_\omega^3 : [(x_0, \mathbf{x})] \mapsto [(x_0, \mathbf{x})] \cdot f(\mathbf{x}) \quad (2.18)$$

と定義すると、これは well-defined なゲージ変換である。

逆に、 $\dot{P}_\omega^3$ 上のゲージ変換 ϕ が与えられたとすると、ゲージ変換の条件 (G2) から

$$\phi(\Pi_\omega(x_0, \mathbf{x})) = \Pi_\omega(x_0, \mathbf{x}) \cdot f(x_0, \mathbf{x}) = [(x_0, \mathbf{x})] \cdot f(x_0, \mathbf{x})$$

となる関数 $f : \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}^2 \rightarrow U(1)$ が存在する。(G1) より、 f が x_0 に依存しないことも分かる。また、

$$\begin{aligned} \phi(\Pi_\omega(x_0, \mathbf{x})) &= \phi(\Pi_\omega((x_0, \mathbf{x}) \cdot (m_0, \mathbf{m}))) \\ &= [(x_0, \mathbf{x}) \cdot (m_0, \mathbf{m})] \cdot f(x_0, \mathbf{x}) = [(x_0, \mathbf{x})] \cdot f(\mathbf{x} + \mathbf{m}) \end{aligned}$$

であるから、 $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} + \mathbf{m})$ でなければならない。□

さて、 $\dot{P}_\omega^3$ 上のゲージ群は接続形式全体に自然に作用する；

$$\mathcal{G}(\dot{P}_\omega^3) \times \mathcal{C}(\dot{P}_\omega^3) \longrightarrow \mathcal{C}(\dot{P}_\omega^3) : (\phi, \alpha) \longmapsto \phi^* \alpha. \quad (2.19)$$

この作用は、 $\mathcal{C}(\dot{P}_\omega^3)$ に同値関係

$$\alpha \sim \alpha' \iff \exists \phi \in \mathcal{G}(\dot{P}_\omega^3) \text{ s.t. } \alpha' = \phi^* \alpha \quad (2.20)$$

を定める。接続形式 α, α' がこの同値関係のもとで同値であるとき、 α と α' はゲージ同値であるという。Lemma 1 から、接続形式全体 $\mathcal{C}(\dot{P}_\omega^3)$ と $\dot{\mathbf{R}}^2$ 上の 1 形式の集合 $\mathcal{A}_\omega(\dot{\mathbf{R}}^2)$

との間には1対1の対応が存在した。では、ゲージ変換によって接続形式 α_A が $\alpha_{A'}$ によって移り変わるとき、 A と A' とはどのような関係で結ばれているのだろうか。

Lemma 5. $\alpha_A, \alpha_{A'} \in \mathcal{C}(\dot{P}_\omega^3)$ とし、 $\phi_f \in \mathcal{G}(\dot{P}_\omega^3)$ であるとする。このとき、

$$\alpha_{A'} = \phi_f^* \alpha_A \iff A' = A + \frac{1}{2\pi i} f^{-1} df \quad (2.21)$$

である。ただし、 f^{-1} は群 $C^\infty(\dot{T}^2; \mathbb{U}(1))$ の元 f の逆元を表わす。

Proof. $f(x) = e^{2\pi i \theta(x)}$ と書く。ただし、 $\theta(x)$ は $\mathbb{R}^2$ 上の整数の差の不定性を除いて決まる実数値関数である。すると、

$$\begin{aligned} \Pi_\omega^* \alpha_{A'} &= i(dx_0 + A'), \\ \Pi_\omega^* (\phi_f^* \alpha_A) &= i(d(x_0 + \theta) + A) = i(dx_0 + A + \frac{1}{2\pi i} f^{-1} df), \end{aligned}$$

と計算されるから、補題の主張が成り立つ。 $\square$

同値関係 (2.20) によって定まる商空間を $\dot{P}_\omega^3$ 上の接続形式のモジュライ空間といい、 $\mathcal{C}(\dot{P}_\omega^3)/\mathcal{G}(\dot{P}_\omega^3)$ と表わす。以下で考察の対象となるのは、平坦な接続形式のモジュライ空間であり、それを $\mathcal{C}_{\text{flat}}(\dot{P}_\omega^3)/\mathcal{G}(\dot{P}_\omega^3)$ と表わす。

3 平坦接続のモジュライ空間

この節では、まず $\dot{P}_\omega^3$ 上の平坦接続がゲージ同値であるための必要十分条件を磁束を用いて与える。次に、その条件を利用して $\dot{P}_\omega^3$ 上の平坦接続の表示に関する定理と、平坦接続のモジュライ空間が $(N+1)$ 次元トーラス T^{N+1} と同一視できるということを示す。

Theorem 6. $\alpha_A, \alpha_{A'} \in \mathcal{C}_{\text{flat}}(\dot{P}_\omega^3)$ を $\dot{P}_\omega^3$ 上の平坦な接続形式とする。 α_A と $\alpha_{A'}$ がゲージ同値であるための必要条件は、次の (1) と (2) が成り立つことである。

(1) $j = 1, 2, \dots, N$ に対して、

$$e^{2\pi i \rho_j(A)} = e^{2\pi i \rho_j(A')}. \quad (3.1)$$

(2)

$$e^{2\pi i \int_c^{c+e_l} A} = e^{2\pi i \int_c^{c+e_l} A'}, \quad l = 1, 2, \quad (3.2)$$

を満足する $c \in \mathbb{R}^2$ が存在する。ただし、 $\int_c^{c+e_l}$ は $c \in \mathbb{R}^2$ から $c+e_l \in \mathbb{R}^2$ への線分に沿った積分を表わし、その積分路は Λ を通らないものとする。

Proof. (必要性) α_A と $\alpha_{A'}$ がゲージ同値であるとする、Lemma 5 から $A' = A + \frac{1}{2\pi i} f^{-1} df$ となる $f \in C^\infty(\dot{T}^2; U(1))$ が存在する。 $\alpha_A, \alpha_{A'}$ についてその磁束を計算すると、

$$\begin{aligned}\rho_j(A') &= \rho_j(A) + \oint_{|x-c_0^{(j)}|=\epsilon} \frac{1}{2\pi i} f^{-1} df \\ &= \rho_j(A) + \deg f|_{|x-c_0^{(j)}|=\epsilon}\end{aligned}$$

となる。ここで、 $\deg f|_{|x-c_0^{(j)}|=\epsilon}$ は写像 $f|_{|x-c_0^{(j)}|=\epsilon} : S^1 \rightarrow S^1$ の写像度を表わす。 S^1 から S^1 への写像の写像度はすべて整数となるから、 $\rho_j(A') \equiv \rho_j(A) \pmod{\mathbb{Z}}$ であり、よって (1) が成立する。 c と $c + e_l$ を結ぶ線分が Λ を通らない任意の $c \in \dot{\mathbb{R}}^2$ に対して、(2) が成り立つことも同様に示せる。

(十分性) (1), (2) が成り立っているとする。このとき、 $f : \dot{\mathbb{R}}^2 \rightarrow U(1)$ を

$$f(x) = \exp\left(2\pi i \int_b^x (A' - A)\right) \quad (3.3)$$

と定義する。ただし、 $b \in \dot{\mathbb{R}}^2$ は任意に選び固定した点である。 A, A' が閉形式であることと条件 (1) から、 f は積分路に依らず定義できている。また、 $f \in C^\infty(\dot{T}^2; U(1))$ である。実際、

$$\begin{aligned}& d \exp\left(2\pi i \int_x^{x+e_l} (A' - A)\right) \\ &= 2\pi i (T_{e_l}^* (A' - A) - (A' - A)) \exp\left(2\pi i \int_x^{x+e_l} (A' - A)\right) = 0\end{aligned}$$

と (2) より、 $\exp(2\pi i \int_x^{x+e_l} (A' - A)) = 1$ であることがわかり、従って、

$$f(x + e_l) = f(x) \exp\left(2\pi i \int_x^{x+e_l} (A' - A)\right) = f(x)$$

である。したがって、

$$\frac{1}{2\pi i} f^{-1} df = A' - A$$

と Lemma 5 から、ゲージ変換 ϕ_f によって α_A は $\alpha_{A'}$ に移ることがわかる。 $\square$

punctured トーラスの j 番目のソレノイド $p(c_0^{(j)})$ を囲む十分近くの閉路を考えたとき、 α_A に関するホロノミーは $e^{2\pi i \rho_j(A)}$ である。また、トーラスの基本サイクルに沿ったホロノミーは $\exp(-2\pi i \langle e_l, \omega c \rangle - 2\pi i \int_c^{c+e_l} A)$ である。つまり、Theorem 6 における条件 (1)、(2) は平坦接続に関するホロノミーの条件である。平坦接続のモジュライ空間とホロノミーとの関わりは深く、次の定理が成り立つことが知られている [6]。

Theorem 7. $P \rightarrow M$ を主 G -バンドルとする。このとき、 P 上の平坦接続のモジュライ空間 $\mathcal{C}_{\text{flat}}(P)/\mathcal{G}(P)$ から $\text{Hom}(\pi_1(M), G)$ の共役類全体への全単射写像が存在する。

ここで、 $F, F' \in \text{Hom}(\pi_1(M), G)$ が共役であるとは、

$$F'(c) = g^{-1}F(c)g, \quad \forall c \in \pi_1(M),$$

となるような $g \in G$ が存在するときにいう。これは $\text{Hom}(\pi_1(M), G)$ 上の同値関係を定め、その同値類を共役類という。この定理から分かるように、一般に平坦接続のモジュライ空間を知るには底空間の基本群 $\pi_1(M)$ を求めなくてはならない。しかし、今の場合 Theorem 6 を利用して、具体的に $\mathcal{C}_{\text{flat}}(\dot{P}_\omega^3)/\mathcal{G}(\dot{P}_\omega^3)$ の代表元を構成し、それをもとにモジュライ空間 $\mathcal{C}_{\text{flat}}(\dot{P}_\omega^3)/\mathcal{G}(\dot{P}_\omega^3)$ を知ることができる。

Theorem 8. $N > 0$ であるとする。このとき、 $A \in \mathcal{Z}_\omega(\dot{\mathbf{R}}^2)$ は

$$A = A^a - \left\langle \mathbf{x}, \frac{\omega + \omega^T}{2} d\mathbf{x} \right\rangle + \langle \boldsymbol{\varepsilon}, d\mathbf{x} \rangle + \frac{1}{2\pi i} f^{-1} df, \quad (3.4)$$

$$A^a = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \nu_j \text{Im} \left(\zeta(x_1 + ix_2 - c_0^{(j)}) (dx_1 + idx_2) \right), \quad (3.5)$$

という表示を持つ。ただし、 $\nu_1, \dots, \nu_N, \boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ は実数であり、 $f \in C^\infty(\dot{T}^2; \mathbf{U}(1))$ である。

Theorem 9. $N > 0$ であるとする。 $\dot{P}_\omega^3$ 上の平坦接続のモジュライ空間は $(N+1)$ 次元トーラス T^{N+1} と同一視できる。

Corollary 10. $N = 0, \omega \in M(2, \mathbf{Z})$ は対称行列であるとする。このとき、 P_ω^3 上の平坦接続のモジュライ空間は 2 次元トーラス T^2 と同一視できる。

Proof of Theorem 9. $N > 0$ とする。 $\mathcal{Z}_\omega(\dot{\mathbf{R}}^2)$ から T^{N+1} への写像を

$$\mathcal{Z}_\omega(\dot{\mathbf{R}}^2) \longrightarrow T^{N+1} : A \longmapsto (e^{2\pi i p_1(A)}, \dots, e^{2\pi i p_{N-1}(A)}, e^{2\pi i p_1(\mathbf{c}, A)}, e^{2\pi i p_2(\mathbf{c}, A)}) \quad (3.6)$$

で定義する。ここで、

$$p_l(\mathbf{c}, A) = \int_{\mathbf{c}}^{\mathbf{c} + \mathbf{e}_l} A, \quad l = 1, 2, \quad (3.7)$$

である。Theorem 6 より (3.6) は $\mathcal{C}_{\text{flat}}(\dot{P}_\omega^3)/\mathcal{G}(\dot{P}_\omega^3)$ から T^{N+1} への単射を誘導することが分かる。したがって、この誘導された単射写像が全射になっていることを示せばよい。全射性を示すには、任意の $(e^{2\pi i t_1}, \dots, e^{2\pi i t_{N-1}}, e^{2\pi i \tau_1}, e^{2\pi i \tau_2}) \in T^{N+1}$ に対して、(3.6) によってこの点に写像される $A \in \mathcal{Z}_\omega(\dot{\mathbf{R}}^2)$ を見つければよい。その候補として

$$A = A^a - \left\langle \mathbf{x}, \frac{\omega + \omega^T}{2} d\mathbf{x} \right\rangle + \langle \boldsymbol{\varepsilon}, d\mathbf{x} \rangle,$$

$$A^a = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \nu_j \text{Im} \left(\zeta(x_1 + ix_2 - c_0^{(j)}) (dx_1 + idx_2) \right),$$

を考えよう。この A が (2.6) を満たす、つまり $A \in \mathcal{Z}_\omega(\dot{\mathbf{R}}^2)$ であるための必要十分条件は (2.13) より、

$$\sum_{j=1}^N \nu_j = \omega_{21} - \omega_{12} \quad (3.8)$$

である。さらにこのとき、留数定理から α_A の磁束は $\rho_j(A) = \nu_j$, $j = 1, 2, \dots, N$, と計算されるが、すると (3.8) は磁束の量子化条件 (2.16) に他ならない。これらの計算からパラメータ $\nu_1, \dots, \nu_N, \varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ を

$$\begin{cases} \exp(2\pi i \nu_j) = \exp(2\pi i t_j), & j = 1, 2, \dots, N-1, \\ \nu_N = \omega_{21} - \omega_{12} - \sum_{j=1}^{N-1} \nu_j, \\ \exp(2\pi i \varepsilon_l) = \exp(2\pi i \tau_l) \exp\left(-2\pi i p_l \left(\mathbf{c}, A^a - \left\langle \mathbf{x}, \frac{\omega + \omega^T}{2} d\mathbf{x} \right\rangle\right)\right), & l = 1, 2, \end{cases} \quad (3.9)$$

と選べば、 A は磁束の量子化条件 (2.16) を満足し、かつ (3.6) によって T^{N+1} の点 $(e^{2\pi i t_1}, \dots, e^{2\pi i t_{N-1}}, e^{2\pi i \tau_1}, e^{2\pi i \tau_2}) \in T^{N+1}$ に写像される。

以上より、(3.6) により $\mathcal{C}_{\text{flat}}(\dot{P}_\omega^3)/\mathcal{G}(\dot{P}_\omega^3)$ から T^{N+1} への全単射写像が誘導され、**Theorem 9** が証明された。□

また、上の証明から **Theorem 8** が成り立つことも分かる。

4 量子論

本稿の動機は、punctured トーラスにおける量子系を考察することであつた。そこでまず、punctured トーラス上の量子論を考えるために、主 $U(1)$ -バンドルに同伴する複素直線束を導入し、波動関数の役割を果たす複素直線束の切断がなす Hilbert 空間を構成する。また、共変微分から自然に運動量作用素に対応する作用素が得られることをみる。量子系を位置作用素と運動量作用素の組として定義し、量子系のユニタリー同値性について論ずる。

4.1 同伴複素直線束

k を整数とし、 χ_k を次のような $U(1)$ の表現とする：

$$\chi_k(g) = g^k, \quad g \in U(1). \quad (4.1)$$

表現 χ_k を用いて $\dot{P}_\omega^3 \times \mathbb{C}$ に

$$(u, z) \sim (u \cdot g, \chi_k(g^{-1})z), \quad (u, z) \in \dot{P}_\omega^3 \times \mathbb{C} \quad (4.2)$$

という同値関係を入れ、その商空間を $E_{\omega,k} = (\dot{P}_\omega^3 \times \mathbf{C}) / \sim$ と表わす。 $E_{\omega,k}$ から $\dot{T}^2$ への自然な射影 $\pi_{\omega,k}$ が定義され、 $\pi_{\omega,k} : E_{\omega,k} \rightarrow \dot{T}^2$ は $\mathbf{C}$ をファイバーに持つファイバーバンドルとなる。 $E_{\omega,k}$ は $\dot{P}_\omega^3$ に同伴する複素直線束と呼ばれる。写像 $\sigma : \dot{T}^2 \rightarrow E_{\omega,k}$ が $\pi_{\omega,k} \circ \sigma = \text{id}_{\dot{T}^2}$ を満たすとき、 σ を複素直線束 $E_{\omega,k}$ の切断という。 $E_{\omega,k}$ の滑らかな切断全体を $\Gamma(\dot{T}^2; E_{\omega,k})$ と表わそう。よく知られているように $\Gamma(\dot{T}^2; E_{\omega,k})$ は $\dot{P}_\omega^3$ 上の同変関数全体

$$\mathcal{E}_k(\dot{P}_\omega^3) = \{\psi : \dot{P}_\omega^3 \rightarrow \mathbf{C} \mid R_g^* \psi = \chi_k(g^{-1})\psi, g \in U(1)\} \quad (4.3)$$

と同型である。さらに以下の計算を簡単にするための補題を用意する。

Lemma 11. $E_{\omega,k}$ 上の切断のなす空間 $\Gamma(\dot{T}^2; E_{\omega,k})$ 、 $\dot{P}_\omega^3$ 上の同変関数のなす空間 $\mathcal{E}_k(\dot{P}_\omega^3)$ はともに次の関数空間と同型である；

$$C_{\omega,k}^\infty(\dot{\mathbf{R}}^2) = \{f \in C^\infty(\dot{\mathbf{R}}^2) \mid f(\mathbf{x} + \mathbf{m}) = e^{2\pi i k \langle \mathbf{m}, \omega \mathbf{x} \rangle} f(\mathbf{x}), \mathbf{m} \in \mathbf{Z}^2\} \quad (4.4)$$

Proof. $f \in C_{\omega,k}^\infty(\dot{\mathbf{R}}^2)$ とし、 $\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}^2$ 上の関数 $\widetilde{\psi}_f$ を

$$\widetilde{\psi}_f(x_0, \mathbf{x}) = e^{-2\pi i k x_0} f(\mathbf{x}) \quad (4.5)$$

として定義する。 $\widetilde{\psi}_f$ は $\mathbf{Z} \times_\omega \mathbf{Z}^2$ の左作用 (2.2) で不変な関数であり、したがって $\dot{P}_\omega^3$ 上の同変関数 ψ_f を誘導する。逆に $\psi \in \mathcal{E}_k(\dot{P}_\omega^3)$ とし、 $f(\mathbf{x}) = (\Pi_\omega^* \psi)(0, \mathbf{x})$ により $\dot{\mathbf{R}}^2$ 上の関数 f を定義すると、 $f \in C_{\omega,k}^\infty(\dot{\mathbf{R}}^2)$ である。実際、

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} + \mathbf{m}) &= (\Pi_\omega^* \psi)(0, \mathbf{x} + \mathbf{m}) = \psi([(0, \mathbf{m}) \cdot (-\langle \mathbf{m}, \omega \mathbf{x} \rangle, \mathbf{x})]) \\ &= e^{2\pi i k \langle \mathbf{m}, \omega \mathbf{x} \rangle} \psi([(0, \mathbf{x})]) = e^{2\pi i k \langle \mathbf{m}, \omega \mathbf{x} \rangle} f(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

である。この f に対して

$$\begin{aligned} \psi_f([(x_0, \mathbf{x})]) &= e^{-2\pi i k x_0} f(\mathbf{x}) = e^{-2\pi i k x_0} (\Pi_\omega^* \psi)(0, \mathbf{x}) \\ &= e^{-2\pi i k x_0} \psi([(0, \mathbf{x})]) = \psi([(x_0, \mathbf{x})]) \end{aligned}$$

であるから、 $\psi_f = \psi$ となる。 $\square$

$C_{\omega,k}^\infty(\dot{\mathbf{R}}^2)$ には自然に内積 $\langle f, g \rangle_{C_{\omega,k}^\infty(\dot{\mathbf{R}}^2)} = \int_{[0,1]^2} \overline{f(\mathbf{x})} g(\mathbf{x}) d^2 \mathbf{x}$ が定義でき、この内積により $C_{\omega,k}^\infty(\dot{\mathbf{R}}^2)$ は完備化されて Hilbert 空間

$$L_{\omega,k}^2(\dot{\mathbf{R}}^2) = \left\{ f : \dot{\mathbf{R}}^2 \rightarrow \mathbf{C} \left| \begin{array}{l} f(\mathbf{x} + \mathbf{m}) = e^{2\pi i k \langle \mathbf{m}, \omega \mathbf{x} \rangle} f(\mathbf{x}), \mathbf{m} \in \mathbf{Z}^2, \\ \int_{[0,1]^2} |f(\mathbf{x})|^2 d^2 \mathbf{x} < +\infty \end{array} \right. \right\} \quad (4.6)$$

となる。この $C_{\omega,k}^\infty(\dot{\mathbf{R}}^2)$ の内積が $\Gamma(\dot{T}^2; E_{\omega,k})$ 、 $\mathcal{E}_k(\dot{P}_\omega^3)$ の自然な内積を誘導し、 $C_{\omega,k}^\infty(\dot{\mathbf{R}}^2)$ の完備化にともなって $\Gamma(\dot{T}^2; E_{\omega,k})$ 、 $\mathcal{E}_k(\dot{P}_\omega^3)$ はそれぞれ Hilbert 空間に完備化される。 $\Gamma(\dot{T}^2; E_{\omega,k})$ 、 $\mathcal{E}_k(\dot{P}_\omega^3)$ のその完備化空間をそれぞれ $L^2(\dot{T}^2; E_{\omega,k})$ 、 $L^2(\dot{P}_\omega^3, \chi_k)$ と表わす。 $L_{\omega,k}^2(\dot{\mathbf{R}}^2)$ 、 $L^2(\dot{P}_\omega^3, \chi_k)$ 、 $L^2(\dot{T}^2; E_{\omega,k})$ は Hilbert 空間として同型である。

4.2 共変微分

$\alpha_A \in \mathcal{C}(\dot{P}_\omega^3)$ を $\dot{P}_\omega^3$ 上の接続形式とし、 $X \in \mathcal{X}(\dot{T}^2)$ を $\dot{T}^2$ 上のベクトル場であるとする。 $X \in \mathcal{X}(\dot{T}^2)$ の $\dot{P}_\omega^3$ への接続形式 α_A に関する水平リフトを X^* と書く。つまり、 $X^* \in \mathcal{X}(\dot{P}_\omega^3)$ は

$$(\text{HL1}) \quad (\pi_\omega)_* X^* = X \quad \text{and} \quad (\text{HL2}) \quad \alpha_A(X^*) = 0$$

を満たす。 $\mathbf{E}_{\omega,k}$ 上の共変微分 $\nabla_X : \Gamma(\dot{T}^2; \mathbf{E}_{\omega,k}) \rightarrow \Gamma(\dot{T}^2; \mathbf{E}_{\omega,k})$ は、 X の水平リフト X^* を用いて

$$\nabla_X \sigma = \gamma X^*(\gamma^{-1} \sigma), \quad \sigma \in \Gamma(\dot{T}^2; \mathbf{E}_{\omega,k}) \quad (4.7)$$

と定義される。ここで γ は $\mathcal{E}_k(\dot{P}_\omega^3)$ から $\Gamma(\dot{T}^2; \mathbf{E}_{\omega,k})$ への同型写像である。 $\Gamma(\dot{T}^2; \mathbf{E}_{\omega,k})$, $\mathcal{E}_k(\dot{P}_\omega^3)$, $C_{\omega,k}^\infty(\dot{\mathbf{R}}^2)$ が互いに同型であったから、共変微分に対応する $C_{\omega,k}^\infty(\dot{\mathbf{R}}^2)$ 上の作用素が次のように得られる。

Lemma 12. $X \in \mathcal{X}(\dot{T}^2)$ とし、 X から誘導される $\dot{\mathbf{R}}^2$ 上のベクトル場も同じ記号 $X \in \mathcal{X}(\dot{\mathbf{R}}^2)$ で表わす。微分作用素

$$P_X : C_{\omega,k}^\infty(\dot{\mathbf{R}}^2) \longrightarrow C_{\omega,k}^\infty(\dot{\mathbf{R}}^2) : f \longmapsto (X + 2\pi i k A(X))f \quad (4.8)$$

は $C_{\omega,k}^\infty(\dot{\mathbf{R}}^2)$ 上で well-defined であり、図式

$$\begin{array}{ccccc} C_{\omega,k}^\infty(\dot{\mathbf{R}}^2) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{E}_k(\dot{P}_\omega^3) & \xrightarrow{\sim} & \Gamma(\dot{T}^2; \mathbf{E}_{\omega,k}) \\ \downarrow P_X & & \downarrow X^* & & \downarrow \nabla_X \\ C_{\omega,k}^\infty(\dot{\mathbf{R}}^2) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{E}_k(\dot{P}_\omega^3) & \xrightarrow{\sim} & \Gamma(\dot{T}^2; \mathbf{E}_{\omega,k}) \end{array}$$

を可換にする。

4.3 量子系

以上の準備の下、 $\dot{T}^2$ 上の量子力学系を定義しよう。

Definition 13. $\dot{T}^2$ 上の量子力学系とは、組 $(L_{\omega,k}^2(\dot{\mathbf{R}}^2), U_1, U_2, P_1, P_2)$ のことである。ここで、 U_1, U_2 は $L_{\omega,k}^2(\dot{\mathbf{R}}^2)$ 上のユニタリー作用素

$$(U_l f)(\mathbf{x}) = e^{2\pi i x_l} f(\mathbf{x}), \quad l = 1, 2, \quad (4.9)$$

であり、位置作用素と呼ぶ。また、 P_1, P_2 は正準運動量作用素

$$P_l = -iP_{\partial/\partial x_l} = -i\frac{\partial}{\partial x_l} + 2\pi k A_l, \quad l = 1, 2, \quad (4.10)$$

である。

この定義は Hilbert 空間 $L^2_{\omega,k}(\mathbf{R}^2)$ を用いた定義であるが、 $L^2_{\omega,k}(\mathbf{R}^2)$ は $L^2(T^2; \mathbf{E}_{\omega,k})$ を同型であるから、 $L^2(T^2; \mathbf{E}_{\omega,k})$ を用いても同値な定義ができる。

Definition 14. T^2 上の量子力学系とは、組 $(L^2(T^2; \mathbf{E}_{\omega,k}), \hat{U}_1, \hat{U}_2, \nabla_{\partial/\partial x_1}, \nabla_{\partial/\partial x_2})$ のことである。ここで、 $\hat{U}_1, \hat{U}_2$ はそれぞれ U_1, U_2 から誘導される $L^2(T^2; \mathbf{E}_{\omega,k})$ 上のユニタリ作用素である。

以下では、計算が簡単に行なえるという理由から、**Definition 13** の量子系の定義を採用する。さて、位置作用素と運動量作用素の交換関係は

$$\begin{aligned} [U_1, U_2] &= [P_1, P_2] = 0, \\ [P_l, U_{l'}] &= 2\pi U_l \delta_{ll'}, \quad l, l' = 1, 2, \end{aligned} \quad (4.11)$$

となる。ここで注意しなければならないことは、 P_1 と P_2 は可換 $[P_1, P_2] = 0$ であるが P_1, P_2 の生成する 1 パラメータユニタリ一群は可換ではないということである。それを確かめるために P_l の生成する 1 パラメータユニタリ一群を求めてみよう。

Lemma 15. $P_l, l = 1, 2$, は $L^2_{\omega,k}(\mathbf{R}^2)$ 上の自己共役作用素であって、ユニタリ作用素

$$(e^{itP_l} f)(\mathbf{x}) = \chi_k \left(\exp \left(2\pi i \int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x}+te_l} A \right) \right) f(\mathbf{x} + te_l), \quad l = 1, 2, t \in \mathbf{R} \quad (4.12)$$

を生成する。

Proof. (4.12) の右辺を $(V_l(t)f)(\mathbf{x})$ とおくと、 $V_l(t)$ は $L^2_{\omega,k}(\mathbf{R}^2)$ 上の 1 パラメータユニタリ一群である。 $f \in C^\infty_{\omega,k}(\dot{\mathbf{R}}^2)$ に対して、

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (V_l(t)f)(\mathbf{x}) = i(P_l f)(\mathbf{x})$$

となるから Stone の定理より、補題の主張は成立する。 $\square$

これより、 e^{itP_1}, e^{itP_2} の交換子は計算できて、

$$e^{itP_1} e^{isP_2} e^{-itP_1} e^{-isP_2} = \chi_k(e^{2\pi i \Phi_{t,s}}) \quad (4.13)$$

となる。ここで、 $\Phi_{t,s}$ は

$$\Phi_{t,s}(\mathbf{x}) = \oint_{\ell(\mathbf{x}; t, s)} A, \quad \text{a.e. } \mathbf{x}$$

$$\ell(\mathbf{x}; t, s) : \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + te_1 \rightarrow \mathbf{x} + te_1 + se_2 \rightarrow \mathbf{x} + se_2 \rightarrow \mathbf{x},$$

である。特に、 $A \in \mathcal{Z}_\omega(\dot{\mathbf{R}}^2)$ ならば、 $dA = 0$ であるから、

$$\Phi_{t,s}(\mathbf{x}) = \text{sgn}(ts) \sum_{c_m^{(j)} \in S(\mathbf{x}; t, s)} \rho_j(A) \quad (4.14)$$

となる。 $S(\mathbf{x}; t, s)$ は閉路 $\ell(\mathbf{x}; t, s)$ で囲まれる $\mathbf{R}^2$ の領域を表わし、 $\sum_{c_m^{(j)} \in S(\mathbf{x}; t, s)}$ は $S(\mathbf{x}; t, s)$ 内にある Λ の点すべてについて和を取ることを意味する。 $A \in \mathcal{Z}_\omega(\dot{\mathbf{R}}^2)$ のとき、 e^{itP_1}, e^{itP_2} が可換となるには、 $k\rho_j(A) \in \mathbf{Z}$, $j = 1, 2, \dots, N$, が必要かつ十分である。

4.4 同値な量子系

これ以降は平坦な接続形式のみを考えることにする。すなわち、 $A \in \mathcal{Z}_\omega(\dot{\mathbf{R}}^2)$ であるとする。2つの量子系

$$(L_{\omega,k}^2(\mathbf{R}^2), U_1, U_2, P_1, P_2), \quad (L_{\omega,k}^2(\mathbf{R}^2), U_1, U_2, P'_1, P'_2),$$

が与えられているとする。ここで、 $P_l = -i\frac{\partial}{\partial x_l} + 2\pi k A_l$, $P'_l = -i\frac{\partial}{\partial x_l} + 2\pi k A'_l$ ($l = 1, 2$), $A, A' \in \mathcal{Z}_\omega(\dot{\mathbf{R}}^2)$ である。これらの量子系がユニタリー同値であるとは、 $L_{\omega,k}^2(\mathbf{R}^2)$ 上のユニタリー変換 U で

$$UU_l = U_l U, \quad UP_l = P'_l U, \quad l = 1, 2, \quad (4.15)$$

を満たす U が存在することをいう。もし、 A と A' がゲージ同値であるならば、上の2つの量子系はユニタリー同値となる。しかし、平坦接続のゲージ同値性と量子系のユニタリー同値性とは等価ではない。まず、量子系がユニタリー同値であるための必要条件を求める。

Lemma 16. $A, A' \in \mathcal{Z}_\omega(\dot{\mathbf{R}}^2)$ であるとし、

$$\Phi_{t,s}(\mathbf{x}) = \oint_{\ell(\mathbf{x}; t, s)} A, \quad \Phi'_{t,s}(\mathbf{x}) = \oint_{\ell(\mathbf{x}; t, s)} A', \quad \text{a.e. } \mathbf{x},$$

とおく。もし、量子系 $(L_{\omega,k}^2(\mathbf{R}^2), U_1, U_2, P_1, P_2)$ と $(L_{\omega,k}^2(\mathbf{R}^2), U_1, U_2, P'_1, P'_2)$ がユニタリー同値ならば、任意の $t, s \in \mathbf{R}$ に対して、

$$\chi_k(e^{2\pi i k \Phi_{t,s}(\mathbf{x})}) = \chi_k(e^{2\pi i k \Phi'_{t,s}(\mathbf{x})}), \quad \text{a.e. } \mathbf{x} \quad (4.16)$$

が成り立つ。さらに、ある点 $\mathbf{c} \in \dot{\mathbf{R}}^2$ が存在して

$$\chi_k\left(e^{2\pi i \int_{\mathbf{c}}^{\mathbf{c}+\mathbf{e}_l} A}\right) = \chi_k\left(e^{2\pi i \int_{\mathbf{c}}^{\mathbf{c}+\mathbf{e}_l} A'}\right), \quad l = 1, 2, \quad (4.17)$$

を満たす。ここで、 $\int_{\mathbf{c}}^{\mathbf{c}+\mathbf{e}_l}$ は $\mathbf{c}$ から $\mathbf{c} + \mathbf{e}_l$ への線分に沿った積分を表わす。

Proof.

$$UU_j = U_j U, \quad UP'_j = P_j U, \quad j = 1, 2, \quad (4.18)$$

となるユニタリー作用素 U が存在する。このとき、 $e^{itP'_j} = U^{-1}e^{itP_j}U$ であるから、(4.13) より $\exp(-2\pi ki\Phi'_{t,s}) = U^{-1}\exp(-2\pi ki\Phi_{t,s})U$ が成り立つ。任意の $\mathbf{m} \in \mathbf{Z}^2$ に対して、

$$\begin{aligned}\Phi_{t,s}(\mathbf{x} + \mathbf{m}) &= \oint_{\ell(\mathbf{x}+\mathbf{m};t,s)} A = \oint_{\ell(\mathbf{x};t,s)} T_{\mathbf{m}}^* A \\ &= \oint_{\ell(\mathbf{x};t,s)} (A - \langle \mathbf{m}, \omega \mathbf{x} \rangle) = \Phi_{t,s}(\mathbf{x})\end{aligned}$$

より $\Phi_{t,s}$ は周期関数であり、 $e^{-2\pi ki\Phi_{t,s}}$ は L^2 ノルムの意味で Fourier 級数展開できる。その Fourier 級数展開を

$$e^{-2\pi ki\Phi_{t,s}} = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbf{Z}^2} d_{\mathbf{m}} e^{2\pi i \langle \mathbf{m}, \mathbf{x} \rangle}$$

としよう。今、かけ算作用素 $A_n, n \in \mathbf{Z}$ を

$$A_n = \sum_{\substack{\mathbf{m}=(m_1,m_2) \in \mathbf{Z}^2 \\ -n \leq m_1, m_2 \leq n}} d_{\mathbf{m}} e^{2\pi i \langle \mathbf{m}, \mathbf{x} \rangle}$$

で定義する。かけ算作用素 A_n は作用素ノルムの意味でかけ算作用素 $e^{-2\pi ki\Phi_{t,s}}$ に収束する。また、 $UU_l = U_l U$ であるから、 $UA_n = A_n U$ であることに注意する。よって、任意の $f \in L^2_{\omega,k}(\mathbf{R}^2)$ に対して

$$\begin{aligned}& \|e^{-2\pi ki\Phi'_{t,s}} f - e^{-2\pi ki\Phi_{t,s}} f\|_{L^2_{\omega,k}(\mathbf{R}^2)} \\ &= \|U^{-1}e^{-2\pi ki\Phi_{t,s}} Uf - e^{-2\pi ki\Phi_{t,s}} f\|_{L^2_{\omega,k}(\mathbf{R}^2)} \\ &\leq \|U^{-1}e^{-2\pi ki\Phi_{t,s}} Uf - A_n f\|_{L^2_{\omega,k}(\mathbf{R}^2)} + \|A_n f - e^{-2\pi ki\Phi_{t,s}} f\|_{L^2_{\omega,k}(\mathbf{R}^2)} \\ &\leq 2\|A_n f - e^{-2\pi ki\Phi_{t,s}} f\|_{L^2_{\omega,k}(\mathbf{R}^2)} \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty,\end{aligned}$$

であり、(4.16) が成立する。

(4.12) において $t=1$ とおくと e^{iP_l} はかけ算作用素 $\chi_k(e^{2\pi i(\langle e_j, \omega \mathbf{x} \rangle + \int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x}+e_j} A)})$ に等しいことがわかり、 $\chi_k(e^{2\pi i(\langle e_j, \omega \mathbf{x} \rangle + \int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x}+e_j} A')}) = U^{-1}\chi_k(e^{2\pi i(\langle e_j, \omega \mathbf{x} \rangle + \int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x}+e_j} A)})U$ が成立する。任意の $\mathbf{m} \in \mathbf{Z}^2$ に対して、

$$\begin{aligned}\langle e_l, \omega(\mathbf{x} + \mathbf{m}) \rangle + \int_{\mathbf{x}+\mathbf{m}}^{\mathbf{x}+\mathbf{m}+e_l} A &= \langle e_l, \omega(\mathbf{x} + \mathbf{m}) \rangle + \int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x}+e_l} T_{\mathbf{m}}^* A \\ &= \langle e_l, \omega(\mathbf{x} + \mathbf{m}) \rangle + \int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x}+e_l} (A - \langle \mathbf{m}, \omega d\mathbf{x} \rangle) \\ &\equiv \langle e_l, \omega \mathbf{x} \rangle + \int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x}+e_l} A \pmod{\mathbf{Z}}\end{aligned}$$

であるから、関数 $\chi_k(e^{2\pi i(\langle e_j, \omega \mathbf{x} \rangle + \int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x}+e_j} A)})$ は周期関数である。したがって、(4.16) を示したのと同様の方法により $\chi_k(e^{2\pi i(\langle e_l, \omega \mathbf{x} \rangle + \int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x}+e_l} A)})$ と $\chi_k(e^{2\pi i(\langle e_l, \omega \mathbf{x} \rangle + \int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x}+e_l} A')})$ は関数として等しいことが示せる。よって、(4.17) が成り立つ。 $\square$

Theorem 17. $A, A' \in \mathcal{Z}_\omega(\dot{\mathbf{R}}^2)$ とし,

$$P_l = -i \frac{\partial}{\partial x_l} + 2\pi k A_l, \quad P'_l = -i \frac{\partial}{\partial x_l} + 2\pi k A'_l, \quad l = 1, 2,$$

とする. 量子系 $(L^2_{\omega,k}(\mathbf{R}^2), U_1, U_2, P_1, P_2)$ と $(L^2_{\omega,k}(\mathbf{R}^2), U_1, U_2, P'_1, P'_2)$ がユニタリー同値であるのは、次の条件が成り立つときであり、かつそのときに限る.

(1) $j = 1, 2, \dots, N$ に対して、

$$\chi_k(e^{2\pi i \rho_j(A)}) = \chi_k(e^{2\pi i \rho_j(A')}).$$

(2) ある $c \in \dot{\mathbf{R}}^2$ が存在して

$$\chi_k \left(\exp \left(2\pi i \int_c^{c+e_l} A \right) \right) = \chi_k \left(\exp \left(2\pi i \int_c^{c+e_l} A' \right) \right), \quad l = 1, 2,$$

を満足する.

Proof. 必要性は (4.14) と Lemma 16 より明らかである. よって、十分性のみ示す.

(1), (2) が成り立っているとする. このとき、 $:\dot{\mathbf{R}}^2 \rightarrow \mathbf{U}(1)$ を

$$f(\mathbf{x}) = \exp \left(2\pi i k \int_b^{\mathbf{x}} (A' - A) \right) \quad (4.19)$$

と定義する. ただし、 $b \in \dot{\mathbf{R}}^2$ は任意に選び固定した点である. A, A' が閉形式であることと条件 (1) から、 f は積分路に依らず定義できている. また、 f は周期的である. 実際、

$$\begin{aligned} & d \exp \left(2\pi i k \int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x}+e_l} (A' - A) \right) \\ &= 2\pi i k (T_{e_l}^*(A' - A) - (A' - A)) \exp \left(2\pi i k \int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x}+e_l} (A' - A) \right) = 0 \end{aligned}$$

と (2) より、 $\exp(2\pi i k \int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x}+e_l} (A' - A)) = 1$ であることがわかり、従って、

$$f(\mathbf{x} + e_l) = f(\mathbf{x}) \exp \left(2\pi i k \int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x}+e_l} (A' - A) \right) = f(\mathbf{x})$$

である. この f を用いて、 $L^2_{\omega,k}(\mathbf{R}^2)$ 上のユニタリー変換 U を

$$(U\psi)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}), \quad \psi \in L^2_{\omega,k}(\mathbf{R}^2) \quad (4.20)$$

と定義すると、簡単な計算から $U^{-1}P_l U = P'_l$, $l = 1, 2$, が成立する. よって、十分性が証明できた. $\square$

量子系の定義 **Definition 13** にしたがって **Theorem 17** を証明したが、量子系の定義として **Definition 14** を採用することもできた。 **Definition 14** を量子系の定義として採用すると、 **Theorem 17** は次のように言い替えられる。

Theorem 18. $A, A' \in \mathcal{Z}_\omega(\mathbb{R}^2)$ とする。 $\dot{P}_\omega^3$ 上の平坦接続 $\alpha_A, \alpha_{A'}$ に関する同伴複素直線束 $\mathbf{E}_{\omega,k}$ 上の接続をそれぞれ ∇, ∇' とする：

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_l}} = \frac{\partial}{\partial x_l} + 2\pi i k A_l, \quad \nabla'_{\frac{\partial}{\partial x_l}} = \frac{\partial}{\partial x_l} + 2\pi i k A'_l, \quad l = 1, 2. \quad (4.21)$$

また、 $L^2_{\omega,k}(\mathbb{R}^2)$ 上のユニタリー作用素 $U_1 = e^{2\pi i x_1}, U_2 = e^{2\pi i x_2}$ から誘導される $L^2(\dot{T}^2; \mathbf{E}_{\omega,k})$ 上のユニタリー作用素をそれぞれ $\hat{U}_1, \hat{U}_2$ と表す。

量子系 $(L^2_{\omega,k}(\mathbb{R}^2)\nabla, \hat{U}_1, \hat{U}_2)$ と $(L^2_{\omega,k}(\mathbb{R}^2)\nabla', \hat{U}_1, \hat{U}_2)$ とがユニタリー同値であるための必要十分条件は次の (1), (2) が成り立つことである。

(1) $j = 1, 2, \dots, N$ に対して、

$$\chi_k(e^{2\pi i \rho_j(A)}) = \chi_k(e^{2\pi i \rho_j(A')}).$$

(2) ある $c \in \mathbb{R}^2$ が存在して

$$\chi_k\left(\exp\left(2\pi i \int_c^{c+e_l} A\right)\right) = \chi_k\left(\exp\left(2\pi i \int_c^{c+e_l} A'\right)\right), \quad l = 1, 2,$$

を満足する。

References

- [1] R. Adami and A. Teta, Lett. Math. Phys., **43**, 43-53 (1998).
- [2] M.A. Aguilar and M. Socolovsky, Internat. J. Theoret. Phys., **41**, 839-860 (2002).
- [3] Y. Aharonov and D. Bohm, Phys. Rev. (2), **115**, 485-491 (1959).
- [4] A. Arai, J. Math. Phys., **33**, 3374-3378 (1992), J. Math. Phys., **34**, 915-935 (1993), J. Math. Phys., **36**, 2569-2580 (1995).
- [5] A. Arai, J. Math. Phys., **37**, 4203-4218 (1996), J. Math. Phys., **39**, 2476-2498 (1998).
- [6] 森田茂之, 特性類と幾何学 (岩波講座現代数学の展開), 岩波書店, 1999.

- [7] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, IOP Publishing, Bristol, England, 1990.
- [8] H. Reech, *J. Math. Phys.*, **29**, 1535-1532 (1988).
- [9] S. Tanimura, *J. Math. Phys.*, **43**, 5926-5948 (2002).
- [10] E.T. Whittaker and G.N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge Univ. Press, London, 1902.