

球面上の極小部分の様体と

Veronese の様体について

東北大 教養 剣持勝衛

§1. 記号 $S_R^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in R^{n+1}, x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = \frac{1}{R^2}\}$,
 $M^n \in n$ 次元 リーマン多様体とし, $x: M^n \rightarrow S_1^{n+p}$, $p \geq 1$, なる
 isometric minimal immersion について考える。

$1 \leq A, B, C \leq n+p$, $1 \leq i, j, k \leq n$, $n+1 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq n+p$.

$E_A \in E_i$ が M^n の各点で, M^n に接しているような S_1^{n+p} の local
 orthonormal frame fields, $\omega_B \in E_A$ の dual, ω_{AB} connection
 forms とし,

$$(1.1) \quad DE_A = \sum_B \omega_{AB} E_B,$$

(1.2) $\omega_{i\alpha} = \sum_j h_{\alpha ij} \omega_j$, $\Pi_\alpha = \sum_{i,j} h_{\alpha ij} \omega_i \omega_j$ は 2nd
 fundamental forms とよばれる。

§2. Veronese surface.

S_1^4 内の Veronese surface V_2^2 とは,

$$(2.1) \quad (x_1, x_2, x_3) \in S_{\frac{2}{3}}^2 \longrightarrow \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}(x_1^2 - x_2^2), \frac{1}{6}(x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2), \frac{1}{\sqrt{3}}x_1x_2, \right.$$

$\frac{1}{\sqrt{3}}x_1x_3, \frac{1}{\sqrt{3}}x_2x_3) \in S_1^4$ なる isometric immersion の像をいう。
この V_2^2 が S_1^4 内の 極小曲面 である: とを最初に指適したのは,
Barinka [1], 1928年, であるように思われる。この論文
の中で彼は frame を適当にとることにより, V_2^2 は

$$(2.2) \quad \begin{cases} u_3 = 0, & u_4 = 0, \\ u_{13} = R u_1, & u_{14} = R u_2, \\ u_{23} = -R u_2, & u_{24} = R u_1, \\ u_{34} = 2 u_{12} \end{cases} \quad R^2 = \frac{1}{3}.$$

を満足し, 逆に (2.2) を満す S_1^4 内の compact な曲面は (2.1)
(かまいたとをいっている。その後, Barinka は (2.1) が S_1^2
上の spherical harmonics により定義されていることに注目して,
 $V_m^2: \underset{m(m+1)}{S_2^2} \longrightarrow S_1^{2m}$ への isometric minimal immersion
を定義して, その immersion のみならず構造方程式を決
めて, その性質をしらべた [3], 1933年のことである。
その後, この種の曲面の研究は, 一、二の例外を除いて忘れら
れていたように思われるが, 近年になり V_2^2 は 2nd fund.
form の長さにより特徴づけられ [8], 又 S_1^{2m} 内の V_m^2 に
ついては, 独立に別の見地から, 大槻により再発見され, 新
しい極小部分多様体を作る時にもちいられた, [16], [17]。
 V_m^2 を minimal immersion の higher order の metric
invariants を用いて特徴づけようとしたのは, 最初に

Berlinka [3] があり, 最近では伊藤 [13] に依りしやうに
ている。

球面 S^N 内の一般の極小曲面を考える時, 上の Berlinka-大塚
の generalized Veronese surface V_m^N は 一つの重要な model
とみることができ, そう思う時, S^N 内で S^2 に homeo. な
極小曲面の理論をつくった Calabi [4], Chern [7], の仕事は重
要である。以下にその概略を Chern に従ってのべる:
 M^2 をリーマン計量を許容している compact Riemann surface.

$$\varphi = w_1 + i w_2, \quad E_1 = e_1 + i e_2 \quad \text{とおく,}$$

$$(2.3) \quad \dots DE_1 = -i w_{12} E_1 + \overline{\varphi} \sum_{\alpha} H_{\alpha}^{(2)} e_{\alpha}, \quad H_{\alpha}^{(2)} = h_{\alpha 11} + i h_{\alpha 12}$$

この時 $\sum_{\alpha} (\overline{H_{\alpha}^{(2)}})^2 \varphi^4$ は M^2 上全域的に定義され, 且 M^2 上
degree 4 の abelian form であることがわかる。よってもし
 M^2 の genus = 0 ならば, Riemann-Roch の定理 (=5) (c.f.

$$[12]) \quad \sum_{\alpha} (H_{\alpha}^{(2)})^2 = 0. \quad \text{i.e.,}$$

$$(2.4) \quad \sum h_{\alpha 11}^2 = \sum h_{\alpha 12}^2, \quad \sum h_{\alpha 11} h_{\alpha 12} = 0.$$

これは 二つのベクトル, $\sum h_{\alpha 11} e_{\alpha}$ と $\sum h_{\alpha 12} e_{\alpha}$ とが 2nd
order の osculating space において互に直交していて, その
長さが等しいということ。 $H_{\alpha}^{(2)} = 0$ なる点を order 1 の
singular point と呼ぶことにすると, Chern ([7], p. 32) に
より $H_{\alpha}^{(2)} \neq 0$ ならば singular points は isolated で, そ
れとてそのような singular point においても, 極限をとること

より "2nd order の osculating space" が定義できる: k_1 のかわりに。
 $k_1 \equiv (\sum h_{\alpha 11}^2)^{\frac{1}{2}} \geq 0$ とし、 $k_1 \neq 0$ の時は、
 上の議論から、 E_3 と E_4 を選ぶことができる。 $E_2 = E_3 + iE_4$ とすると

$$DE_1 = -iW_{12}E_1 + k_1 \bar{\varphi} E_2 \quad \text{とわかる。次に}$$

$$DE_2 = -k_1 \varphi E_1 - iW_{24}E_2 + \Phi \quad \text{とおくとき、}$$

$$\Phi = \sum_{\mu \neq 5} (W_{3\mu} + iW_{4\mu})e_{\mu} \quad \text{であって、regular point においては、}$$

$$(2.5) \quad \dots = \frac{\bar{\varphi}}{k_1} (\sum H_{\mu}^{(3)} e_{\mu}), \quad H_{\mu}^{(3)} = h_{\mu 11} + i h_{\mu 12}, \quad \text{とわかる。}$$

$\sum_{\mu} (H_{\mu}^{(3)})^2 \varphi^6$ は frame field のとり方に独立であり、又 singular point では 0 と定義すると、 M^2 上全域的に定義され、且 degree 6 の abelian form であることがわかる。従って $g=0$ ならば Riemann-Roch の定理により、 $\sum (H_{\mu}^{(3)})^2 = 0$ 。よって $k_1 \equiv (\sum h_{\mu 11}^2)^{\frac{1}{2}} \neq 0$ の時は、
 $DE_2 = -k_1 \varphi E_1 - iW_{24}E_2 + k_2 \bar{\varphi} E_3$ とわかるような $E_3 \in E_2 = E_3 + iE_4$ にとることもできる。このようにつづけてゆくと、 M^2 の genus = 0 の時は、 M^2 の regular point で次のように local frame field e_A を選ぶことができる:

$$(2.6) \quad \begin{cases} E_s = e_{2s-1} + i e_{2s}, & 1 \leq s \leq m \\ DE_s = -k_{s-1} \varphi E_{s-1} - i W_{2s-1, 2s} E_s + k_s \bar{\varphi} E_{s+1}, \\ & 1 \leq s \leq m, \quad k_0 = k_m = 0. \end{cases}$$

整数 m は、 DE_m が E_{m-1} と E_m で張られる最小の数。(2.6) の積分可能条件をしらべて、

$$(2.7) \quad \begin{cases} u_{2s-1,2s}^2 = s u_{12}^2 + O_{s-1}, & 2 \leq s \leq m \\ k_s^2 = \frac{1}{2}(1-K) \geq 0, & O_s = d^c \log(k_1 \cdots k_s) \\ \frac{1}{2} \Delta \log(k_1 \cdots k_s) + k_s^2 - k_{s+1}^2 - \frac{1}{2}(s+1)K = 0 \\ & s=1, \dots, m-1 \end{cases}$$

これをまとめて,

定理 1 (Calabi, Chern) $x: S^2 \rightarrow S_1^N (R^{N+1})$: isometric minimal immersion (実際, S_1^N は任意の定曲率空間である (Chern)).
 かつ $x(S^2)$ は R^{N+1} の超平面に含まれない。その時 $N=2m$,
 singular points は isolated. regular point において, local invariants の complete system が (2.7) を満足する $k_s > 0$, $1 \leq s \leq m-1$, によって与えられる。

S^2 が特に定曲率の時は, 次の uniqueness が成立する。

定理 2 (Calabi, do Carmo-Wallach, Chern, Berlinka)
 S^2 が定曲率の時は, K をガウス曲率として, $K \leq 1$ であって
 $K=1$ は totally geodesic の時に限り, $K < 1$ ならば
 $K = \frac{2}{m(m+1)}$ が 全ての k_s は定数になり, m で記述できる。
 おいて, そのような曲面は, S_1^N の等長変換を除いて唯一つ
 (i.e., generalized Veronese surface)。

又 (2.7) を用いて, $x(S^2)$ の面積を計算する事ができて,

定理3 (Calabi) image surface の面積 $A=A(x)$ は
 $2\pi \times (\text{整数})$ であり $A(x) \geq 2\pi m(m+1)$.

S^2 に homeo. 2" 生定曲率でないような S_1^{2m} 内の minimal surface の作りかについては, Berunka [3], Calabi [5], Chern [7] を参照。

§3. 問題1. genus ≥ 1 の時, 上のような理論はできるか?

その為, 先ず $g=1$ の時, V_m^2 に相当するような "model" となるべき曲面は何であらうか。 S_1^3 内の Clifford minimal torus や S_1^5 内の ある類種の曲面 (Berunka [2]) が昔から知られている。ここでは Berunka の方法を直接的に一般化して, 任意の奇数次元単位球内の flat minimal surface の例を書く。 $x: M^2[0] \rightarrow S_1^{2m+1} \subset R^{2m+2}$, $M^2[0]$ は flat surface

$z = u + i\sqrt{v} \in \text{local coordinates}$. $x = (x_1, \dots, x_{m+1}, y_1, \dots, y_{m+1}) \in$

$R^{2m+2} \ni (\dots, x_i + \sqrt{v} y_i, \dots, x_i - \sqrt{v} y_i, \dots)$ によって $\mathbb{C}^{2m+2}$ の

元とみる。 $\varepsilon \in \varepsilon^{2m+2} - 1 = 0$ を満たす一つの虚根とする。この時

$$X_i = x_i + \sqrt{v} y_i, \quad X_{i+m+1} = x_i - \sqrt{v} y_i \quad \text{とおく,} \\ i = 1, 2, \dots, m+1$$

$$(3.1) \quad \dots \quad X_A = \frac{1}{\sqrt{m+1}} \exp \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \varepsilon^A z - \overline{\varepsilon^A z} \}, \quad A=1, 2, \dots, 2m+2$$

は S_1^{2m+1} 内の flat minimal surface を与える。

特に $m=1$ の時は S^3 内の Clifford minimal torus を与え, $m=2$ の時は S^5 内の Borinka [2] の研究した曲面を与える。

(3.1) の曲面の Frenet - Borinka formulas は,

$$(3.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} dx = \frac{1}{2} \bar{\varphi} E_1 + \frac{1}{2} \varphi \bar{E}_1, \\ DE_1 = -i \omega_{12} E_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\varphi} E_2, \\ \dots \dots \dots \\ DE_{m-1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \varphi E_{m-2} - i(m-1) \omega_{12} E_{m-1} + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\varphi} E_m, \\ DE_m = -\frac{1}{\sqrt{2}} \varphi E_{m-1} - i m \omega_{12} E_m + \bar{\varphi} E_{m+1}, \\ DE_{m+1} = -\varphi E_m - \bar{\varphi} \bar{E}_m. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \varphi = \omega_1 + i \omega_2 \\ E_0 = 0 \\ E_1 = e_1 + i e_2 \\ \dots \dots \dots \\ E_m = e_{2m-1} + i e_{2m}, \\ E_{m+1} = e_{2m+1}. \end{array}$$

であって, (3.2) 式は 大槻 [17] が T-type の minimal surface と呼んでいるものの特別な場合で [17] の p.118, (II) において, $\alpha=1$, $\beta=0$ とおいてえられた式に等しい。

注意1. Borinka [2] と全く同様に (て, 曲面 (3.1) の射影微分幾何学的な characterization を与えることができる。

注意2. S^N 内の compact minimal surface で $K \geq 0$ なるものがある。higher order の metric invariant にある仮定をおくと, その与えていた曲面は (3.1) のみである。

注意3. S^3 内のどのような $g \geq 1$ の minimal surface については, Lawson [14], [15] の詳しい研究がある。

§4 問題2. §2の定理を $n \geq 3$ の場合へ拡張せよ.

特に, 定理2のような rigidity は成立するであろうか?

まず V_2^n の一般次元への拡張について:

$$\psi_{n,2}: S_{k(2)}^n \longrightarrow S_{l(2)}^{m(2)}, \quad k(2) = \frac{n}{2(n+1)}, \quad m(2) = n + \frac{(n+2)(n-1)}{2}$$

1の写像 $\psi_{n,2} = (f_1, \dots, f_{m(2)+1})$ を以下のように定義する.

$$(4.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_1 = \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}} \cdot \frac{1}{2} (x_1^2 - x_2^2), \\ f_2 = \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} (x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2), \\ \dots \\ f_n = \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n(n+1)}} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n x_{n+1}^2 \right) \\ f_{ij} = \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}} x_i x_j \quad (i < j, \quad i, j = 1, \dots, n+1). \end{array} \right.$$

この時 $\psi_{n,2}$ は isometric minimal embedding である.

特に $\psi_{2,2}$ は Veronese surface in S_1^9 であり,

$$\psi_{3,2}: S_{\frac{3}{8}}^3 \longrightarrow S_1^8,$$

$$\psi_{4,2}: S_{\frac{2}{5}}^4 \longrightarrow S_1^{13},$$

$\psi_{n,2}$ についての注意1. この写像が isometric embedding である

ることについては、E. Cartan の教科書 [6] の最後の頁次にある。

注意 2. [8] の p. 73, Example 2 と上にのべた $\psi_{n,2}$ は "同じ" 図形を与える。

$$\text{より一般に } \psi_{n,s} : S_{R(s)}^n \longrightarrow S_1^{m(s)} \subset R^{m(s)+1},$$

$k(s) = \frac{n}{s(s+n-1)}$, $m(s) = \frac{(s+n-2)!}{s!(n-1)!} - 1$, なる "standard" minimal immersion が球面上の spherical harmonics of order s を用いて定義できること [11] が知られており、この $\psi_{n,s}$ は上にのべたことから球面上の Veronese manifold と呼んでもいいかもしれない。さてこの $\psi_{n,s}$ については、次の Do Carmo-Wallach [11] の仕事は基本的である。彼等の結果をのべる際に次の言葉を用意する。

◦ minimal immersion $\varphi : S_R^n \longrightarrow S_1^l \subset R^{l+1}$ において、 $\varphi(S_R^n)$ が R^{l+1} の超平面に含まれない時、 φ は full であるという。

◦ 二つの immersions $\varphi_1, \varphi_2 : S_R^n \longrightarrow S_1^l \subset R^{l+1}$ に対して S_1^l のある等長変換 P があって、 $\varphi_2 = P \circ \varphi_1$ とするとき、 φ_1 と φ_2 は equivalent であるといって、 $\varphi_1 \sim \varphi_2$ と記す。

その時、高橋の定理を用いて、次は容易に示される。

命題 4. $\varphi : S_R^n \longrightarrow S_1^l$: isometric minimal immersion

$\Rightarrow \exists s : k = k(s)$. 更に φ が full ならば $l \leq m(s)$.

$n \geq 3$ の時でも次の時には、一意性は成立する、い.e.,

定理 5 (Do Carmo-Wallach) φ を上と同じとする。

更に φ が full で $S \leq 3 \Rightarrow \varphi \sim \varphi_{m,s}$, 特に $l = m(s)$.

$n \geq 3$, $S \geq 4$ にとると その状況は非常にこまわり,

定理 6 (de Carmo - Wallach), φ : 上と同じ, φ : full,

$n \geq 3$, $S \geq 4 \Rightarrow$ そのような immersions の同値類の集合は, 最低でも 18 次元 の あるバナッヒ空間の ある compact convex body L により smoothly parametrize される: L の内実は $l = m(s)$ であるような φ に対応しており, L の boundary points は $l < m(s)$ であるような φ に対応している。

参考文献

1. O. Borůvka, Sur une classe de surfaces minima plongées dans un espace à quatre dimensions à courbure constante, Bull. intern. de l'Acad. Tech. des Sci., Prague, 29 (1928), 296-297.
2. ———, Sur une classe de surfaces minima plongées dans un espace à cinq dimensions à courbure constante, Pub. de la Faculté des sci. de L'université Masaryk, (1929), 3-28.
3. ———, Sur les surfaces représentées par les fonctions sphériques

de première espèce, *J. Math. Pures Appl.*, 12 (1973), 337-383.

4. E. Calabi, Minimal immersions of surfaces in Euclidean spaces, *J. D. G.*, 1 (1967), 111-1125.
5. ———, Quelques applications de l'analyse complexe aux surfaces d'aire minima, in *Topics in Complex Manifolds*, Univ. of Montreal, Montreal, 1967.
6. E. Cartan, *Leçons sur la géométrie projective complexe*, Cahiers Sci. vol 10. Gauthier-Villars, Paris, 1950.
7. S.S. Chern, On the minimal immersions of the two-sphere in a space of constant curvature, *Problems in Analysis*, honor of Prof. S. Bochner, Princeton, P.P. 27-40.
8. ———, M. Do Carmo, S. Kobayashi, Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length, *Functional Analysis and Related Fields*, 59-75.
9. Do Carmo - N.R. Wallach, Minimal immersions of a sphere into spheres, *Proc. N.A.S.*, 63 (1969), 640-642.
10. ———, Representations of compact groups and minimal immersions into spheres, *J.D.G.*, 4 (1970), 91-104.
11. ———, Minimal immersions of spheres into spheres, *Ann. of Math.*, 93 (1971), 43-62.

12. R.C. Gunning, Lectures on Riemann surfaces, Princeton,
Mathematical Notes, 1966.
13. T. Itoh, Minimal surfaces in a Riemannian manifold
of constant curvature, preprint.
14. H.B. Lawson, JR, Complete minimal surfaces in S^3 ,
Ann. of Math., 92 (1970), 335-374.
15. ———, Compact minimal surfaces in S^3 , Proceed. Symp.
in Pure Math., vol IV, Global Analysis, 215-282.
16. T. Otsuki, Minimal submanifolds with M -index 2 in
Riemannian manifolds of constant curvature,
Tohoku M.J., 23 (1971), 371-402.
17. ———, Minimal submanifolds with m -index 2 and
generalized Veronese surfaces, J.M.S.J., 24 (1972),
89-122.
18. T. Takahashi, Minimal immersions of Riemannian manifolds,
J. M. S. J., 18 (1966), 380-385. T.