

Semi-free S^1 -actions on homotopy spheres and higher dimensional knots

東下 理 榊田 幹也

(Mikiya Masuda)

§1 序

ホモトピー球面上の smooth S^1 作用を考える際、作用が「free」な場合と、「semi-free」な場合が、最も単純な場合と、思われる。「free」の場合、 S^1 -orbit space を考えると、それは、ホモトピー複素射影空間になり、容易に、

“ホモトピー S^{2n+1} 上の free S^1 作用全体”

$\updownarrow$ 1:1

“ホモトピー CP^n 全体”

であることがわかる。この事実に注目し、surgery理論を用いて、ホモトピー球面上の free S^1 作用が、(可算)無限にあることが示される([Hc])。しかし、残念ながら、この集合には、自然な群構造がない。したがって、(可算)無限にあるとしか言えないし、(中心的な位置にあると思われる)生成元は何かということも無意味な問題である。これに

反して、「semi-free」の場合には、固定点のまわりの equivariant connected sum により、自然に可換群の構造が入り、その構造や、生成元は何かということ論ずることが出来る。この群の free part の rank については、すでに Brouder-Petrie により完全な解答が与えられている。ここでは、free part の生成元について、考えた。

§2. 背景

以下、考える category は C^∞ で、manifold は断りなしに限りすべて closed とし、次の記号を用いる。

- $X \simeq Y \Leftrightarrow X$ と Y は ホミトポ-同値
- $X \cong Y \Leftrightarrow X$ と Y は diffeo.
- $\rho \in X$ 上の群 G の作用をとるとき、

G -fixed point set $\in F(\rho, X)$ 又は $F(G, X)$

G -orbit space $\in X/\rho$ 又は X/G と表す。

定義

$$\Sigma_q^n(S^1) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (\Sigma, \phi) \left| \begin{array}{l} \Sigma \simeq S^n \quad (\Sigma: \text{oriented}) \\ \phi: \text{semi-free } S^1\text{-action on } \Sigma \\ \text{s.t.} \\ \text{(i) } F(\phi, \Sigma) \cong S^0 \\ \text{(ii) (complex) normal bdl of } F(\phi, \Sigma) \text{ is trivial} \end{array} \right. \right\}$$

(注) ・ $m-g$ は正の偶数

・ $F(\phi, \Sigma)$ の normal bundle は S^1 作用により、自然に複素構造が入る。

・ 多くの場合 (ii) の条件は満たされている。(例として、

$m-g=2$ または 4 のとき、又は後述の通り)。

上記の集合は、固定点のまわりの equivariant connected sum により可換群の構造をもつ。この群の free part の rank は、次で与えられる。

定理 1 (Browder-Petrie [B-P]).

$$\text{rank}_{\mathbb{Z}} \Sigma_g^n(S^1) = \text{rank}_{\mathbb{Z}} H^{4*}(\mathbb{C}P^{S^1} \times (D^{g+1}, S^g); \mathbb{Z}) - \varepsilon$$

ただし、 $2S = m-g$.

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{if } m \equiv 1 \pmod{4} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

これより特に、(1) $m-g=2$ のとき、 $\text{rank}_{\mathbb{Z}} \Sigma_g^n(S^1) = 0$ (実は、 $\Sigma_g^n(S^1) = 0$ for $m \geq 7$ W.Y. Hsiang [H_r]).

(2) $m-g=4$ のとき、

$$\text{rank}_{\mathbb{Z}} \Sigma_g^n(S^1) = \begin{cases} 1 & \text{if } g \equiv 3 \pmod{4} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

この場合、 $\Sigma_g^n(S^1)$ は codim 3 高次元 knot group と密接な関係がある。それを述べるために、次の定義をあげる。

定義

$$\Sigma_g^m \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \text{oriented pair } (M, N) \mid \begin{array}{l} M \cong S^m \\ N \cong S^g \\ N \subset M \text{ submanifold} \end{array} \right\}$$

さらに、 $M \cong S^m$ を要請した Σ_g^m の部分集合を、 $\Sigma^{m,g}$ とかく。

これらの集合は、 $m-g \geq 3$ か、 $g \geq 5$ のとき knot connected sum により、可換群になる。

注意 1. $\Sigma_g^m \cong \Sigma^{m,g} \oplus \mathbb{H}^m$, ただし $\mathbb{H}^m$ はホーミトピー S^m 全体のみが群 (特に有陪群)。

さて、 $(\Sigma, \phi) \in \Sigma_g^n(S^1)$ の元とするとき、orbit space Σ/ϕ は、 $m-g=4$ のとき、ホーミトピー-球面になることが、容易にわかる。したがって、 $2. \text{ pair } (\Sigma/\phi, F(\phi, \Sigma))$ は Σ_g^m の元を定める。

定理 2 (Levine [L,] 1973). よで述べた対応。

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_g^{2+4}(S^1) & \xrightarrow{\sim} & \Sigma_g^{2+3} \\ \downarrow & \Psi & \\ (\Sigma, \phi) & \longmapsto & (\Sigma/\phi, F(\phi, \Sigma)) \end{array} \quad \text{は同型}$$

一方、knot group Σ_g^{8+3} は Levine [L₂] に依り、ホーホー群の言葉を用いて、ある exact sequence で表わされ (後述)、ある程度わかってゐる。例えば、

$$\Sigma_g^{8+3} = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \text{torsion (finite)} & \text{if } g \equiv 3 \pmod{4} \\ \text{torsion (finite)} & \text{その他} \end{cases}$$

である。この事実と、定理2より $\text{rank}_{\mathbb{Z}} \Sigma_g^{8+4}(S^1)$ が決定されるから、これは、Browder-Petrie に依り得られた前述のものと一致してゐる。

(注) $g=3$ のときは Haefliger に依り $\Sigma_3^6 \cong \mathbb{Z}$ (i.e. torsionless) あり、 $\Sigma_3^7(S^1) \cong \mathbb{Z}$ 。

一方、最近 M. Davis は次の事を示した。

定理3 (Davis [D] 1982). $\Sigma_3^7(S^1)$ の生成元は、 S^4 上の S^3 -bundle として得られる あるホーホー S^7 上の自然な semi-free S^1 作用である。

(具体的な構成については [D] を参照してください)。

$\Sigma_g^n(S^1)$ は torsion subgroup でないもの $\in \hat{\Sigma}_g^n(S^1)$ と書くことにすると、Davis の定理の一般化として、自然に、

次の問題が考えられる。

問題 $\hat{\sum}_g^n(S^1)$ の生成元は何か。

特に $m-g=4$ のときはどうか。

注意 2. 一般の m, g に対しては、“一般に” rank が 1 以上となるが、特に $m-g=4$ のときには、以下のように

$$\hat{\sum}_g^n(S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{if } g \equiv 3 (4) \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$

§3. 例.

ホモトピー-球面上の semi-free S^1 作用の例として、以下で述べる Brieskorn 上の S^1 作用が有名である。

$$N_\varepsilon := \{ (u, v, z_1, \dots, z_{2k}) \in \mathbb{C}^{2k+3} \mid u^3 + v^{6r-1} + z_1^2 + \dots + z_{2k}^2 = \varepsilon \} \quad (\varepsilon > 0)$$

とあくとき、 $M^{4k+1}(r) \stackrel{\text{def}}{=} N_\varepsilon \cap S^{4k+5}$ の diffeo. type は

ε の取り方によらず、次の性質をもつ。

事実 $bP^{4m} \cong \text{parallelizable manifold}$ を bound するホモトピー S^{4m-1} 全体とすると、 $m \geq 2$ のとき、有限巡回群で:

$$(1) M^{4m-1}(r) \in bP^{4m}$$

$$(2) M^{4m-1}(r) \cong S^{4m-1} \iff b_m \mid r \quad (b_m \text{ は } bP^{4m} \text{ の位数})$$

すなわち $M^{4k-1}(r)$ 上には次の自然な semi-free S^1 作用がある。

$l < k$, $g = e^{i\theta} \in S^1$ とする。この作用 ϕ_l を

$$\phi_l(g, z) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} I_{2l+2} & 0 \\ 0 & D(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ z_1 \\ \vdots \\ z_k \end{pmatrix} \quad \text{と定義する。}$$

ただし、 $I_{2l+2} = (2l+2)$ 次単位行列

$$D(\theta) = \begin{pmatrix} \omega\theta & -\Delta\omega\theta \\ \Delta\omega\theta & \omega\theta \end{pmatrix}$$

明らかに、 $F(\phi_l, M^{4k-1}(r)) = M^{4l-1}(r) \in bP^{4l}$ 。
 $\uparrow$
 $(l \geq 2 \text{ のみ必要})$

よく知られているように、固定点の complex normal bundle は trivial である。よって、 $\Sigma_k^n(S^1)$ の定義の (ii) の条件は満たされている。従って、 $(M^{4k-1}(r), \phi_l)$ が $\Sigma_{4l-1}^{4k-1}(S^1)$ の元であるためには、固定点 $M^{4l-1}(r)$ が S^{4l-1} に diffeo. であることが必要十分である。事実 (2) より、

$$(M^{4k-1}(r), \phi_l) \in \Sigma_{4l-1}^{4k-1}(S^1) \iff 4l \mid r.$$

注意3. $W^{4k}(r) \stackrel{\text{def}}{=} N_\epsilon \cap D^{4k+6}$ とすると、これ上にも、semi-free S^1 作用が、同様に定義される。それを $\tilde{\phi}_l$ とかくと、
 $\partial(W^{4k}(r), \tilde{\phi}_l) = (M^{4k-1}(r), \phi_l)$

- $F(\tilde{\phi}_l, W^{4l}(r)) = W^{4l}(r)$,
- $W^{4l}(r)$ の complex normal bundle は trivial.

§ 4. 結果

主定理 次のように. Homomorphism $\hat{\beta}$ が存在.

$$\hat{\beta}: \sum_{4l-1}^{4l+1} (S^1) \rightarrow \mathbb{Z} \quad \text{hom.}$$

s.t. $\hat{\beta}((M^{4l+1}(\phi_l), \phi_l)) = a_l \quad \text{for } l \geq 2 \quad (\text{up to sign})$

ここで.

$$a_l = \begin{cases} 1 & \text{if } l \text{ is even,} \\ 2 & \text{if } l \text{ is odd.} \end{cases}$$

系 1. $k=l+1$, つまり $\text{codim } 4$ の場合. $(M^{4l+3}(\phi_l), \phi_l)$

$(l \geq 2)$ は. $\sum_{4l-1}^{4l+3} (S^1) (\cong \mathbb{Z})$ の

(i) 生成元 $(l \text{ が 偶数のとき})$

(ii) 生成元が生成元の 2 倍 $(l \text{ が 奇数のとき}).$

又. $\text{codim } 4$ の場合は. knot 群 $\sum^{4l+2, 4l-1}$ と関連がある. 一方. この群 は. Levine $[L_2]$ により. exact sequence

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \sum^{4l+2, 4l-1} \rightarrow \ker \sigma_l \rightarrow 0$$

を用いて、表わされている。ここで、 σ_l は inclusion から導かれる自然な homomorphism $\pi_{4l-1}(G_3, SO_3) \rightarrow \pi_{4l-1}(G, SO)$ 。
しかし、この exact sequence が split しているかどうかについては、知られていないようである。我々の定理は、この splitting に関する情報を与えている。

系 2. Levine exact sequence $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha_l} \sum^{4l+2, 4l-1} \rightarrow \text{ker } \sigma_l \rightarrow 0$ は、 l が偶数のとき、split。

<証> 注意 1 と定理 2 より、 $\sum_{4l-1}^{4l+3} (S^1) \cong \sum^{4l+2, 4l-1} \oplus \bigoplus^{4l+2}$
 $\hat{\beta}$ は、 $\sum_{4l-1}^{4l+3} (S^1)$ から $\mathbb{Z}$ への homomorphism であるから、
 $\bigoplus^{4l+2}$ は有限群であるから、 $\sum^{4l+2, 4l-1}$ から $\mathbb{Z}$ への homomorphism と導く。これも同じ記号 $\hat{\beta}$ で表わすと、 α_l と $\hat{\beta}$ の定義から、
 $\hat{\beta} \circ \alpha_l(1) = 0_l$ になる。□

(注) $l=1$ のとき、上の exact sequence は split (2.11) (実際 $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$ となる)。 $l > 1$ なる奇数のとき、上の exact sequence が split するかどうかは、わからない。

§5. β の定義の動機.

β の定義の動機となった Montgomery-Yang の対応を.
簡単に復習しよう. まあ.

$\Pi = \{ \text{ホモトピー-} \mathbb{CP}^3 \text{ 全体} \}$ とする.

(実は, この集合は, 和が定義できて, 可換群になることが,
[M-Y] により, 知られている。) $X \in \Pi$ の元 とするとき,
 $\gamma(X) \in \mathbb{Z}$ が次で定まる.

$$p_1(X) = (4 + 24\gamma(X))x^2.$$

ここで, $p_1(X)$ は X の first Pontryagin class であり x は,
 $H^2(X; \mathbb{Z})$ の生成元.

定理4 (Montgomery-Yang, Wall, ---)

$$\Sigma_3^7(S^1) \xrightarrow{\Psi} \Sigma_3^6 = \Sigma^{6,3} \xrightarrow{\kappa} \Pi \xrightarrow{\gamma} \mathbb{Z}$$

はすべて isomorphism.

この定理は, 我々にいくつかのことを教えてくれる.

例えば,

(I) $\Sigma_3^7(S^1)$ (すなわち $\Sigma^{6,3}$) を研究することは, Π を研究することと同じ.

(II) γ , 本質的に Π の (first) Pontryagin class, は, $\Sigma_3^7(S^1)$
の invariant である.

これら 2 つの事実は、高次元の場合でも正しい成立する。
それを説明する前に、上の対応をもう少し詳しく見よう。

まず、 Ψ は定理 2 で与えられたもの、つまり、orbit space とする対応。 K は knot のまわりで、適当な framing を取って、surgery する対応。この順序は、入れかえてもよい。つまり、まず (equivariant) surgery をして、次に orbit space とするも、同じことである。

$\tilde{S}^{2n-1}$, $\tilde{D}^{2n}$ を $\mathbb{C}^n$ の単位球面、単位球で、複素数 z をかけるという S^1 作用をもったものとする。 $\Sigma \in \Sigma_g^n(S^1)$ は、

$$\Sigma = D^4 \times \tilde{S}^3 \cup_f S^3 \times \tilde{D}^4 \quad \text{と分解する。}$$

$z \in \mathbb{C}^n$, $f: S^3 \times \tilde{S}^3 \rightarrow S^3 \times \tilde{S}^3$ equivariant diffeo. z 。

$S^3 \times S^1 = F(\phi, \Sigma)$ 。今、注意した様に、合成 $K \circ \Psi$ は、次の様に記述できる。

$$\begin{array}{c}
 \Sigma = D^4 \times \tilde{S}^3 \cup_f S^3 \times \tilde{D}^4 \\
 \downarrow \text{equivariant surgery} \\
 K \circ \Psi \left(\begin{array}{c} \tilde{\Sigma} = D^4 \times \tilde{S}^3 \cup_f D^4 \times \tilde{S}^3 \\ \downarrow \text{orbit space} \end{array} \right. \\
 \left. \tilde{\Sigma}/S^1 = D^4 \times S^2 \cup_f D^4 \times S^2 \right) \in \Pi.
 \end{array}$$

さて、高次元の場合を見よう。 $\Sigma \in \Sigma_g^n(S^1)$ ($n-g=2s$) とすると、

$$\Sigma = D^{g+1} \times \tilde{S}^{2s-1} \bigcup_f S^g \times \tilde{D}^{2s} \quad \text{と分解する。}$$

$$\downarrow \text{equivariant surgery}$$

$$\tilde{\Sigma} = D^{g+1} \times \tilde{S}^{2s-1} \bigcup_f D^{g+1} \times \tilde{S}^{2s-1}$$

$$\downarrow \text{orbit space.}$$

$$\tilde{\Sigma}/S^1 = D^{g+1} \times \mathbb{C}P^{s-1} \bigcup_{f'} D^{g+1} \times \mathbb{C}P^{s-1}$$

高次元の場合、 Σ に $\tilde{\Sigma}/S^1$ と対応させる対応は、
 全単射とは言えないが、ある意味で“ほとんど全単射”
 であることがわかる。これは、(I)の事実に対応している。
 また、 $\tilde{\Sigma}/S^1$ の Pontryagin class たちが、 $\Sigma_g^n(S^1)$ の
 invariant と与えることが予想される。実際、Pontryagin
 class を用いて、 $\text{rank}_{\mathbb{Z}} H^*(\mathbb{C}P^{s-1} \times (D^{g+1}, S^g); \mathbb{Z})$ の分、
 $\Sigma_g^n(S^1)$ から $\mathbb{Z}$ への homomorphism が定義でき、Signature
 theorem から、少なくとも、このうち独立なものは、
 $\text{rank}_{\mathbb{Z}} H^{4*}(\mathbb{C}P^{s-1} \times (D^{g+1}, S^g); \mathbb{Z}) - \varepsilon$ 個であることがわかり、
 これらが実際独立であることは Surgery 理論を使って
 示せる。

§6. β の定義:

簡単のため、 $\sum_{4l-1}^{4l+3} (S^1)$ (codim 4) 2" $l \geq 2$ の場合

のみ扱う。 $(\Sigma, \phi) \in \Sigma_{4l-1}^{4l+3}(S^1)$ に対し、固定点集合の
 周りの equivariant embedding $h: S^{4l-1} \times \tilde{D}^4 \rightarrow \Sigma$
 を一つ選ぶ。これを用いて、前節で述べた対応 π により、
 $\tilde{\Sigma}/S^1$ を得る。次の補題は Mayer-Vietoris exact seq.
 よりすぐ分かる。

補題1. $l \geq 2$ のとき $H^*(\tilde{\Sigma}/S^1) \cong H^*(S^{4l} \times S^2)$.

定義 $l \geq 2$ のとき、

$$\beta((\Sigma, \phi)) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha \cup p_*(\tilde{\Sigma}/S^1) [\tilde{\Sigma}/S^1] \in \mathbb{Z}$$

ただし、 α は $H^2(\tilde{\Sigma}/S^1; \mathbb{Z})$ の生成元。

⑤ 正確には、生成元 α の取り方は、符号の
 あいまいさがある。それを除くには、向きのことと考慮に
 入れる必要がある。

補題2. (1) β の値は h の取り方によらない。

(2) $\beta: \Sigma_{4l-1}^{4l+3}(S^1) \rightarrow \mathbb{Z}$ は homomorphism

<証> 略 $\square$

一般に β が 全射であることは期待できない。

実際、次のことが示せる。

補題3. β の値は $(2l-1)! a_l \times (\frac{B_l a_l}{4l} \text{ の分母})$ ($= d_l$ とおく)
で割れる。 ところで B_l は l 番目の Bernoulli 数。

<証> $\sigma_l \in \tilde{\Sigma}/S^1$ の tangent bundle に associate (i.e.)
principal $SO(4l+2)$ bundle の $H^{4l}(\tilde{\Sigma}/S^1; \mathbb{Z})$ に値をもつ
obstruction class とすると、Kervaire $[K]$ より、

$$P_l(\tilde{\Sigma}/S^1) = (2l-1)! a_l \sigma_l \quad \text{--- ①}$$

--- b. Atiyah-Hirzebruch-Singer より

$$\mathbb{Z} \ni e^{x \cup} \hat{\omega}(\tilde{\Sigma}/S^1) [\tilde{\Sigma}/S^1] \quad (\hat{\omega}(\cdot) \text{ は } \hat{\omega}\text{-class})$$

$$= -\frac{B_l}{2 \times (2l)!} x \cup P_l(\tilde{\Sigma}/S^1) [\tilde{\Sigma}/S^1]$$

$$= -\frac{B_l a_l}{4l} x \cup \sigma_l [\tilde{\Sigma}/S^1]$$

$$\therefore x \cup \sigma_l [\tilde{\Sigma}/S^1] \text{ は } \frac{B_l a_l}{4l} \text{ の分母で割れる --- ②}$$

① ② より 補題を得る。 $\square$

この補題より

$$\text{定義 } \hat{\beta}((\Sigma, \phi)) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\beta((\Sigma, \phi))}{d_l} \in \mathbb{Z}$$

(d_l は 補題 3 の d_l),

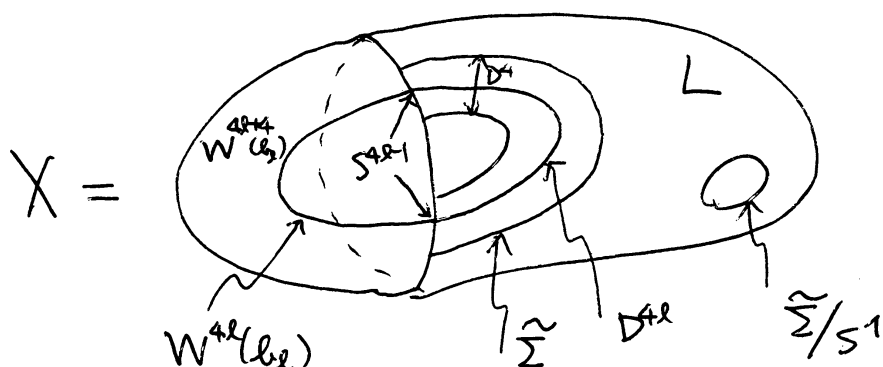
§7. 定理の証明.

$k = l+1$ の場合だけ示す。まず、 $(M^{4l+3}(r), \phi_k) = \partial(W^{4l+4}(r), \tilde{\phi}_k)$ であつた (§3 注意3)。我々の関心は $r = b_k$ のときである。簡単のため $M^{4l+3}(b_k) \in \Sigma$, 作用 $\phi_k \in \Phi$ と略記する。計算したいのは 値 $\beta((\Sigma, \Phi)) = x^0 p_k(\tilde{\Sigma}/S^1) [\tilde{\Sigma}/S^1]$. そのため次のような closed S^1 -manifold X を考える。

$L: \tilde{\Sigma} \xrightarrow{S^1} \tilde{\Sigma}/S^1$ に associate した D^2 -bundle の total space とする。

$W^{4l+4}(b_k)$ の boundary $M^{4l+3}(b_k)$ の固定点は standard T^2 S^{4l-1} であるから、これに沿つて handle $D^{4l} \times \tilde{D}^4$ を equivariant に貼り付けることが出来る。

これによつて出来た S^1 -manifold N の boundary だ。さらに $\tilde{\Sigma}$ であることに注意された。従つて N と L をそれぞれの境界に沿つて貼り付けることが出来る。これが、求める X である。つまり、 $X = W^{4l+4}(b_k) \cup D^{4l} \times \tilde{D}^4 \cup L$



X は $(4l+4)$ 次元 closed S^1 -manifold である。作用は semi-free, 固定点集は $W^{4l}(b_2) \cup D^{4l} (= F_{\text{fix}})$ と $\tilde{\Sigma}/S^1$ の 2つの連結成分からなる。

さて、 F の complex normal bundle が trivial であることに注意して、G-signature theorem を用いると、

$$\text{Sign } X = \mathcal{L}(F) \left(\frac{t+1}{t-1} \right)^2 [F] + \mathcal{L}(\tilde{\Sigma}/S^1) \left(\frac{te^{2l}+1}{te^{2l}-1} \right) [\tilde{\Sigma}/S^1]$$

ただし、

t は 標準的な 複素 1次元の S^1 -module,

$\mathcal{L}()$ は Hirzebruch の $\mathcal{L}$ -class.

これに、

$$\begin{cases} \text{Sign } F = \text{Sign } W^{4l}(b_2) + \text{Sign } D^{4l} = 8b_2 \\ \mathcal{L}(\tilde{\Sigma}/S^1) = 1 + c_2 p_2(\tilde{\Sigma}/S^1) \quad (c_2 = 2^{2l}(2^{2l}-1)B_2/2!) \end{cases}$$

を代入すると、

$$\text{Sign } X = 8b_2 \left(\frac{t+1}{t-1} \right)^2 + (1 + c_2 p_2(\tilde{\Sigma}/S^1)) \left(\frac{te^{2l}+1}{te^{2l}-1} \right) [\tilde{\Sigma}/S^1].$$

$\text{Sign } X$ は 定義より、定数であるから、右辺は $t=1$ の値を持つなければならない。従って 簡単な計算より、

$$c_2 p_2(\tilde{\Sigma}/S^1) [\tilde{\Sigma}/S^1] = \frac{8b_2}{c_2} \quad \text{でなければならない。}$$

よって

$$\hat{\beta}((\Sigma, \phi)) = \frac{\beta((\Sigma, \phi))}{d_2} = \frac{8b_2}{c_2 d_2}.$$

＝ 42 に.

$$\begin{cases} b_l = 2^{2l-2} (2^{2l-1} - 1) \left(\frac{4B_l}{l} \text{ or } \frac{1}{2} \right) \\ c_l = 2^{2l} (2^{2l-1} - 1) \frac{B_l}{(2l)!} \\ d_l = (2l-1)! a_l \left(\frac{B_l a_l}{4l} \text{ or } \frac{1}{2} \right) \end{cases}$$

Σ 代入すると

$$\hat{\beta}((\Sigma, \phi)) = a_l$$

＝ 42 は、我々の定理で示すことができる。 $\square$

参考文献.

[Hc] W.C. Hsiang, A note on free differentiable actions of S^1 and S^3 on homotopy spheres, Ann. of Math. 83 (1966)

[B-P] Browder-Petrie, Diffeomorphisms of manifolds and semifree actions on homotopy spheres, Bull. of A.M.S. 77 (1971).

[Hy] W.Y. Hsiang, On the unknottedness of the fixed point set of differentiable circle group actions on spheres — P.A. Smith conjecture, Bull. of A.M.S. 70 (1964).

- [L₁] Levine, Semi-free circle actions on spheres,
Invent. Math. 22 (1973).
- [L₂] —, A classification of differentiable knots,
Ann. of Math. 82 (1965).
- [D] M. Davis, Some group actions on homotopy spheres
of dimension seven and fifteen, Amer. J. Math. 104 (1982).
- [M-Y] Montgomery-Yang, Differentiable actions on
homotopy seven spheres, Trans. A.M.S. 122 (1966)
- [K] Kervaire, A note on obstructions and
characteristic classes, Amer. J. Math. 81 (1959).